Ueber den Fundamentalsatz : jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten hat so viele Wurzeln als ihr Grad beträgt

Autor(en): **Scherrer, F.R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft**

Band (Jahr): **10 (1892)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-558815

Ueber den Fundamentalsatz:

Jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten hat so viele Wurzeln als ihr Grad beträgt.

Von

F. R. Scherrer,

Lehrer der Mathematik an der thurgauischen Kantonsschule.

Hierzu Tafel II.

Zu den zahlreichen arithmetischen Sätzen, deren Richtigkeit zuerst mit Zuhülfenahme geometrischer Vorstellungen bewiesen wurde, gehört auch der in der Ueberschrift genannte sehr wichtige Satz, welchen man auch häufig in der Form ausspricht:

Jede ganze Funktion einer Veränderlichen lässt sich stets als ein Produkt von Faktoren ersten Grades darstellen.

Bekanntlich war *Gauss* der erste, welcher dieses Theorem einwandfrei bewies, und zwar lieferte er für dasselbe vier verschiedene Beweise, von denen der zweite[1] und dritte[2] ausschliesslich arithmetischer Natur sind, während der erste[3] und der mit diesem eng zusammenhängende vierte[4] zum Teil auf geometrischen Betrachtungen beruhen. Obgleich nun das Bestreben herrscht, arithmetische Sätze auf rein arithmetischem Wege herzuleiten, so wird doch die Benützung geometrischer Hülfsmittel der Anschaulichkeit halber für Lehrzwecke stets ihren Wert beibehalten. Von diesem Gesichts-

---

[1] Demonstratio nova altera theorematis etc. (Gauss Werke, Bd. III Seite 33).

[2] Theorematis de resolubilitate functionum alg. integr. in factores etc. (Gauss Werke, Bd. III Seite 59).

[3] Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. (Gauss Werke, Bd. III Seite 3).

[4] Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. I. Abt. (ebendaselbst Seite 73).

punkt aus betrachtet, erscheint besonders der *Kinkelinsche* Beweis[1] des genannten Satzes der Beachtung würdig.

Ist

$$x = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$$

die unabhängige Veränderliche und

$$f_{(x)} = R\,(\cos A + i\,\sin A)$$

eine ganze rationale Funktion derselben, so entspricht jedem Punkte m mit den Polarkoordinaten r und α ein Punkt M mit den Polarkoordinaten R und A. Hält man r fest und lässt α von o bis 2π wachsen, so durchläuft m einen um den Pol des Koordinatensystems als Mittelpunkt gelegten Kreis vom Radius r, während M eine geschlossene krumme Linie durchläuft, welche Herr *Kinkelin* eine *repräsentirende Linie* nennt. Eine Funktion, deren repräsentirende Linien geschlossene, nicht ins Unendliche gehende Linien sind, welche die ganze Zahlenebene in der Weise stetig bedecken, dass die einem unendlich grossen r entsprechenden ganz im Unendlichen liegen, nennt er eine *unbegrenzte Funktion* und beweist dann die beiden folgenden Hülfssätze:

I) *Die Summe aus einer unbegrenzten Funktion und einer konstanten Zahl ist selbst eine unbegrenzte Funktion;*

II) *das Produkt aus einer unbegrenzten Funktion und ihrer Veränderlichen ist selbst eine unbegrenzte Funktion,*

aus welchen sich der zu beweisende Lehrsatz sehr leicht ergibt.

Der Beweis des zweiten dieser beiden Hülfssätze, welchen übrigens Herr *Netto*[2] beanstandet hat, gründet sich u. a. auf die Stetigkeit der ganzen Funktionen für endliche Argumentwerte und auf die Tatsache, dass der Modul einer ganzen Funktion stets und nur dann unendlich gross wird, wenn der Modul der unabhängigen Variabeln selbst unendlich gross wird. Diese beiden Eigenschaften der ganzen Funktionen ergeben sich bekanntlich aus folgenden beiden Sätzen:

(1) *Der Modul einer ganzen Funktion von z, welche zugleich mit ihrer unabhängigen Variabeln verschwindet, wird kleiner als eine beliebige positive Grösse δ, sobald*

$$|z|^* < \frac{\delta}{|a| + \delta}$$

[1] Neuer Beweis des Vorhandenseins komplexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. (Mathematische Annalen, Bd. I Seite 502).

[2] Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik, Bd. II Seite 41.

* $|z|$ bezeichnet den Modul bezw. Zahlwert von z.

gewählt wird, wo $|a|$ *den grössten der Moduln der Koëffizienten der Funktion bezeichnet.*

(2) *Wenn* $a_0 z^n$ *das Glied höchster Dimension einer beliebigen ganzen Funktion* $f_{(z)}$ *ist, und*

$$f_{(z)} = a_0 z^n [1 + \varphi_{(z)}]$$

gesetzt wird, so wird der Modul von $\varphi_{(z)}$ *kleiner als eine beliebig gegebene positive Zahl* ε, *sobald*

$$|z| \geqq \frac{|a_0| \varepsilon + m}{|a_0| \varepsilon}$$

gewählt wird, wo m den grössten der Moduln der Koëffizienten von $f_{(z)}$ *mit Ausschluss von* a_0 *bezeichnet.*[1]

Ich will nun im folgenden zeigen, dass diese beiden Sätze allein schon zum Beweise des oben angeführten algebraischen Fundamentalsatzes ausreichen.

Es sei

$$f_{(z)} = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots\ldots a_{n-1} z + a_n ,$$

wo a_0 und a_n von Null verschieden sind, eine beliebige ganze Funktion der komplexen Veränderlichen z mit reellen oder komplexen Koëffizienten, ferner δ eine positive Zahl, welche der Bedingung genügt

$$\delta < |a_n| ,$$

und $|a|$ der grösste der Moduln der Koëffizienten $a_1 , a, \ldots a_{n-1}$.

Wählt man jetzt z der Art, dass

$$|z| \leqq \frac{\delta}{|a| + \delta}$$

ist, so wird nach (1)

$$|a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_{n-1} z| < \delta,$$

folglich erhält man, wenn man $f_{(z)}$ mit Hülfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der seit *Gauss* üblichen Weise graphisch darstellt, für den zugehörigen Wert von $f_{(z)}$ einen Punkt, welcher innerhalb eines Kreises mit dem Radius δ liegt, der mit dem Punkt, welcher der Zahl a_n entspricht, und den ich ebenfalls mit a_n bezeichne,[2] als Mittelpunkt beschrieben ist. Allen Werten des Moduls von z, welche

[1] Vergl. J. A. Serret, cours d'algèbre supérieure, Bd. I, Seite 91—94.

[2] In der Figur sind die Punkte stets gleich bezeichnet, wie die Zahlen, welche sie darstellen.

kleiner als δ sind, entsprechen somit repräsentirende Linien, die innerhalb des genannten Kreises verlaufen, und daher unmöglich durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehen oder ihn einschliessen können, da dieser von jenem ausgeschlossen wird.

Setzt man aber

$$f_{(z)} = a_0 z^n [1 + \varphi_{(z)}], \tag{3}$$

und wählt im Gegensatz zu der soeben gemachten Annahme

$$|z| \geqq \frac{|a_0| \varepsilon + m}{|a_0| \varepsilon}, \tag{4}$$

wo dem m dieselbe Bedeutung wie in Satz (2) zukommt, und ε eine beliebige positive Zahl, welche kleiner als 1 ist, bezeichnet, so wird nach (2)

$$|\varphi_{(z)}| < \varepsilon,$$

folglich fällt der Punkt, welcher die Funktion $1 + \varphi_{(z)}$ graphisch darstellt, innerhalb eines Kreises, welcher um den Einheitspunkt als Mittelpunkt mit dem Radius ε gelegt wird. Der Punkt $f_{(z)}$ ergibt sich leicht, da gemäss Gleichung (3) die Punkte 0, $a_0 z^n$, $f_{(z)}$ ein Dreieck bilden, das zum Dreieck der Punkte 0, 1, $1 + \varphi_{(z)}$ gleichstimmig ähnlich ist.

Verfügt man über den Modul von z gemäss (4) und hält ihn fest, während man das Argument stetig von 0 bis 2π wachsen lässt, so durchläuft der Punkt $a_0 z^n$ einen um 0 als Mittelpunkt gelegten Kreis vom Radius

$$R = |a_0 z^n|$$

n mal in positivem Sinne. Bei dieser Bewegung wird er vom Punkte $f_{(z)}$ der Art begleitet, dass der Abstand der beiden Punkte stets kleiner als $R\varepsilon$ ist. Die dem gewählten Wert des Moduls von z entsprechende repräsentirende Linie ist somit eine sich n mal um den Nullpunkt herumwindende Kurve, welche vollständig auf der Fläche eines um den Nullpunkt als Mittelpunkt gelegenen Kreisringes verläuft, dessen innerer Radius $R(1-\varepsilon)$ und dessen äusserer Radius $R(1+\varepsilon)$ ist.

Wenn also der Modul von z stetig vom Wert $\frac{\delta}{\delta + |a|}$ bis zum Wert $\frac{|a_0| \varepsilon + m}{|a_0| \varepsilon}$ wächst, so tritt die ihm ent-

sprechende repräsentirende Linie allmälig aus dem Kreise mit dem Mittelpunkt a_n heraus und verwandelt sich durch stetige Deformation in die soeben besprochene auf der Ringfläche verlaufende Kurve; sie überschreitet somit während dieses Ueberganges notwendig wenigstens einmal den Nullpunkt. Folglich gibt es mindestens einen Wert z_1 von z, für welchen der zugehörige Funktionalwert verschwindet.

Die Existenz der übrigen Wurzeln kann bekanntlich leicht mit Hülfe des Satzes von der Teilbarkeit von $f_{(z)}$ durch $z—z_1$ nachgewiesen werden.

Frauenfeld, im Juli 1892.