

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft  
**Herausgeber:** Thurgauische Naturforschende Gesellschaft  
**Band:** 11 (1894)

**Artikel:** Ueber die scheinbare Entfernung zweier Punkte  
**Autor:** Kiefer, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-594106>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber die scheinbare Entfernung zweier Punkte.

(Tafeln III und IV, Fig. 1, 2, 3, 4.)

---

Von

Dr. A. Kiefer, Institut Concordia, Zürich.

---

Wenn zwei Punkte  $A, B$  von einem dritten Punkte  $C$  aus betrachtet werden,<sup>1</sup> so nennt man den Winkel  $ACB = \gamma$  unter welchem die zwei Punkte erscheinen, die *scheinbare Entfernung* derselben. Der Winkel  $\gamma$  ist von der Lage des Punktes  $C$  abhängig und es lassen sich leicht einige hierauf bezügliche Fragen beantworten; dabei soll zunächst die Lage von  $C$  auf eine durch  $AB$  gehende Ebene beschränkt bleiben.

## I.

(Fig. 1.)

Man lege durch  $A, B$  und den beliebig gewählten Punkt  $C$  einen Kreis; bewegt sich jetzt  $C$  auf dem Bogen  $ACB$  des Kreises, so bleibt der Winkel  $ACB$  konstant, gleich  $\gamma$ , und wenn  $C$  sich auf dem Bogen  $AC'B$  bewegt, so bleibt der Winkel  $AC'B$  ebenfalls konstant, gleich  $180 - \gamma$ . Denkt man sich durch  $A, B$  noch den zu diesem Kreis symmetrischen Kreis gelegt, so liegen auf diesen zwei Kreisen alle Punkte  $C$ , für welche die scheinbare Entfernung der Punkte  $A, B$  gleich  $\gamma$  resp.  $180 - \gamma$  ist.

## II.

(Fig. 2.)

$g$  sei eine beliebige Gerade der Ebene; wie viel Punkte  $C$  liegen auf derselben, für welche die scheinbare Entfernung

---

<sup>1</sup> Z. B. zwei Bergspitzen von dem idyllischen Weiningen aus.

10741  
126515

der Punkte  $A, B$  die vorgeschriebene Größe  $\gamma$  hat? Die gesuchten Punkte sind die 4 Schnittpunkte  $C, C', C'', C'''$  der Geraden  $g$  mit den 2 vorhin erwähnten Kreisen. Wenn  $g$  den einen Kreis berührt, so fallen von den 4 Punkten 2 zusammen; wenn  $g$  beide Kreise berührt, so fallen zweimal je 2 Punkte zusammen und wenn  $g$  außerhalb beider Kreise liegt, so werden die 4 Punkte imaginär. Geht  $g$  zwischen  $A, B$  hindurch, so beträgt der Winkel bei den äußern Schnittpunkten  $\gamma$  und bei den 2 innern  $180 - \gamma$ . Enthält  $g$  einen der Punkte  $A$  oder  $B$ , z. B.  $A$ , so fallen von den 4 Punkten 2 in denselben; die beiden andern Schnittpunkte sind dann immer reell und es kann noch ein weiterer derselben nach  $A$  fallen, nämlich wenn  $g$  den einen oder den andern der 2 Kreise in  $A$  berührt. (Die 4 Tangenten der beiden Kreise in  $A$  und  $B$  haben die Eigenschaft, daß es auf jeder einen einzigen Punkt gibt, für den die scheinbare Entfernung der Punkte  $A, B$  die Größe  $\gamma$  hat). Wenn  $\gamma = 90^\circ$  ist, so fallen die beiden Kreise in einen einzigen zusammen, der  $AB$  zum Durchmesser hat und auf einer beliebigen Geraden gibt es 2 Punkte, für welche die scheinbare Entfernung der beiden Punkte  $A, B$  gleich  $90^\circ$  ist.

### III.

(Fig. 3.)

$g$  sei wieder eine beliebige Gerade der Ebene und der Punkt  $C$  bewege sich auf  $g$ ; wie ändert sich dabei der Winkel  $ACB$ ? Wenn sich  $C$  in dem unendlich fernen Punkte von  $g$  befindet, so ist  $\sphericalangle ACB = 0$ ; kommt  $C$  ins Endliche, so nimmt der Winkel zu, erreicht aber im Schnittpunkt  $S$  von  $g$  mit der Geraden  $AB$  wieder den Wert Null. Folglich müssen beidseitig von  $S$  zwischen  $S$  und dem unendlich fernen Punkte von  $g$  solche Punkte  $C$  liegen, für welche  $\sphericalangle ACB$  ein Maximum wird. Diese Punkte sind leicht zu finden. Nach einem allgemeinen Prinzip über Maxima und Minima muß nämlich an einer solchen Stelle eine unendlich kleine Verschiebung des Punktes  $C$  die Größe des Winkels  $ACB$  nicht ändern; folglich muß der gesuchte Punkt auf  $g$  und sein unendlich benachbarter auf einem Kreis durch  $A, B$  gelegen sein. Legt man daher durch  $A, B$  diejenigen Kreise, welche  $g$  berühren, so sind die Berührungspunkte diejenigen Punkte auf  $g$ , für welche die scheinbare Entfernung  $ACB$  der Punkte

$A, B$  möglichst groß ist. Bekanntlich gibt es durch  $A, B$  zwei Kreise, welche die Gerade  $g$  berühren; bezeichnet man die Berührungspunkte mit  $C_1, C_2$ , so ist  $SC_1 = SC_2$  die mittlere geometrische Proportionale zwischen  $SA$  und  $SB$ ;  $SC_1 = SC_2 = \sqrt{SA \cdot SB}$ . Man kann auch direkt zeigen, daß für die Punkte  $C_1, C_2$  auf  $g$  der Winkel  $ACB$  ein Maximum ist.  $C$  sei ein Punkt zwischen  $S$  und  $C_1$  oder auf der Verlängerung über  $C_1$  hinaus; man ziehe  $CB, CA$  und  $DB$ , wobei  $D$  der Schnittpunkt von  $CA$  mit dem Kreis ist, der  $g$  in  $C_1$  berührt. Nun ist  $\sphericalangle AC_1B = \angle ADB$ , aber  $ADB$  ist als Außenwinkel des Dreieckes  $DCB$  größer als  $ACB$ , folglich ist auch  $\sphericalangle AC_1B > \angle ACB$ ; ähnlich bei  $C_2$ . Was die Größe der beiden Maximalwinkel  $AC_1B$  und  $AC_2B$  anbetrifft, so kann man dieselben folgendermaßen berechnen. Es sei  $\sphericalangle C_1SB = \alpha$ ,  $SA = a$ ,  $SB = b$ ; dann ist  $SC_1 = \sqrt{a \cdot b}$ . Der Sehnentangentenwinkel  $SC_1A$  ist gleich dem Peripheriewinkel  $SBC_1$ . Auf das Dreieck  $SBC_1$  kann man den Tangentensatz anwenden und erhält:

$$\frac{b - \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (SC_1B - SBC_1)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (SC_1B + SBC_1)},$$

aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (SC_1B - SBC_1) &= \frac{1}{2} \angle AC_1B = \frac{1}{2} \gamma_1, \\ \frac{1}{2} (SC_1B + SBC_1) &= \frac{1}{2} (180 - \alpha) = 90 - \frac{\alpha}{2}; \end{aligned}$$

also, indem man auf der linken Seite noch Zähler und Nenner mit  $\sqrt{b}$  dividiert

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}},$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man hierin an Stelle von  $\alpha$  den Wert  $180 - \alpha$ , so liefert die Formel für den Winkel  $AC_2B = \gamma_2$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Für  $\alpha = 90^\circ$  wird

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Für  $\alpha = 0^\circ$ ,  $b = a = \infty$  versagen die Formeln; in diesem Falle ist  $g$  parallel  $AB$  und durch  $b$ ,  $a$ ,  $\alpha$  nicht mehr bestimmt. Setzt man den Abstand der beiden Parallelen gleich  $h$ , so ist

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} = \frac{AB}{2h}, \quad \gamma_2 = 0.$$

Es mag noch bemerkt werden, daß  $C_1, C_2$  imaginär werden, wenn  $g$  zwischen  $A$  und  $B$  hindurch geht;  $b$  und  $a$  sind dann mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.

Läßt man in einer der beiden Formeln für

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2}$$

die linke Seite konstant und auf der rechten Seite das Verhältnis  $\frac{b}{a}$  und den Winkel  $\alpha$  variabel, so bewegen sich die entsprechenden Geraden  $g$  als Tangenten der 2 durch  $A, B$  und  $C_1$  resp.  $C_2$  bestimmten Kreise.

#### IV.

(Fig. 4.)

$F$  sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Durch  $F$  gibt es unendlich viele gerade Linien  $g$  und unter den Punkten einer jeden derselben gibt es 2, für welche die scheinbare Entfernung der Punkte  $A, B$  ein Maximum ist. Wie verteilen sich diese Punkte? Wenn  $g$  eine der Geraden durch  $F$  ist, so findet man die auf ihr gelegenen Punkte  $C_1, C_2$  als Berührungspunkte von  $g$  mit 2 durch  $A, B$  gehenden Kreisen. Legt man daher durch  $A, B$  alle möglichen Kreise und zieht von  $F$  aus Tangenten an dieselben, so bildet die Gesamtheit der Berührungspunkte den gesuchten Ort. Es ergeben sich leicht noch andere Entstehungsarten der Kuvre. Sind  $C_1, C_2$  die fraglichen Punkte auf  $FS$ , so ist  $SC_1 = SC_2$  die mittlere geometrische Proportionale zwischen  $SA$  und  $SB$ , d. h. gleich der Tangente von  $S$  aus an den Kreis über  $AB$  als Durchmesser. Legt man daher von jedem Punkte  $S$  der Geraden  $AB$  die Tangente  $SD$  an den Kreis über  $AB$  als Durch-



messer und beschreibt man um  $S$  mit der Tangente  $SD$  als Radius einen Kreis, so erzeugen die Endpunkte  $C_1, C_2$  der durch  $F$  gehenden Durchmesser dieser Kreise den fraglichen Ort. Die Kreise um die Punkte  $S$  mit der jeweiligen Tangente  $SD$  als Radius bilden ein Kreisbüschel zweiter Art und wir haben somit die Küppersche Erzeugung jener eigentümlichen Kurve dritter Ordnung, welcher die imaginären Kreispunkte als konjugierte Punkte angehören. Weil  $SC_1 = SD$  ist, so folgt aus der Figur  $OS^2 - SC_1^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ . Auf eine bekannte

Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel gestützt kann man daraus schließen, daß die 4 Punkte  $C_1, C_2, A, B$  auf der gleichseitigen Hyperbel liegen, welche  $AB$  zum Durchmesser hat und deren Asymptoten zu den Halbierungsgeraden des Winkels  $OSF$  und seines Nebenwinkels parallel sind. Die Kurve erscheint hiernach als das Erzeugnis eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel  $F$  und eines dazu projektivischen Büschels von gleichseitigen Hyperbeln; die letztern haben alle  $AB$  zum Durchmesser und die projektivische Zuordnung besteht darin, daß die Asymptoten der Hyperbel jeweils zu den Halbierungsgeraden des Winkels  $OSF$  und seines Nebenwinkels parallel sind. Es ergibt sich ferner leicht, daß ein Kegelschnitt durch  $C_1$  mit  $A, B$  als Brennpunkten in  $C_1$  von einer Parabel berührt wird, die  $F$  zum Brennpunkt hat und deren Axe zu  $AB$  parallel ist, ferner daß Winkel  $BC_1F$  stets gleich dem Winkel ist, den  $AC_1$  mit der Parallelen durch  $C_1$  zu  $BA$  bildet u. s. f.; alle diese Sätze lassen sich verallgemeinern und geben zu weiteren Erzeugungsarten und Eigenschaften Veranlassung. —

Die Kurve dritter Ordnung ändert sich mit der Wahl des Punktes  $F$ ; wenn  $F$  im Unendlichen angenommen wird, so verschiebt sich die Gerade  $FS$  parallel zu sich selber. Da  $OS^2 - SC^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$  konstant bleibt, so beschreiben in diesem Falle die Punkte  $C_1, C_2$  die gleichseitige Hyperbel, welche  $AB$  zum Durchmesser hat und deren Asymptoten zu den Halbierungslinien des Winkels  $OSC_1$  und seines Nebenwinkels parallel sind; hieraus könnte man mancherlei Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel ableiten. Wählt man  $F$  auf der Geraden  $AB$ , so ist der Ort der Punkte  $C_1, C_2$  der Kreis,

der  $F'$  als Mittelpunkt hat und einen beliebigen durch  $A, B$  gehenden Kreis orthogonal schneidet.

## V.

Die Aufgabe, unter den Punkten einer geraden Linie diejenigen zu finden, für welche der Winkel  $ACB$  ein Maximum wird, läßt sich dadurch verallgemeinern, daß man an Stelle der Geraden eine Kurve setzt und diejenigen Punkte  $C$  derselben aufsucht, für welche Winkel  $ACB$  ein Maximum oder Minimum wird. Um diese Aufgabe zu lösen, hat man diejenigen Kreise durch  $A, B$  zu bestimmen, welche die gegebene Kurve berühren. Die Berührungspunkte sind die gesuchten Punkte. Wenn die gegebene Kurve ein Kreis ist, so läßt die Aufgabe 2 Lösungen zu; wird ein Kegelschnitt gewählt, so gibt es 6 Lösungen und für eine Kurve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung  $m$  ( $m+1$ ) Lösungen. Der Berührungsstelle entspricht ein Maximum, wenn die Kurve dort außerhalb des berührenden Kreises verläuft und ein Minimum, wenn sie innerhalb des berührenden Kreises weiter läuft.

## VI.

Bis jetzt blieb die Lage von  $C$  auf eine durch  $A, B$  gehende Ebene beschränkt. Hält man an dieser Bestimmung nicht mehr fest, so kann man zunächst nach dem Ort aller Punkte  $C$  des Raumes fragen, für welche der Winkel  $ACB$  dieselbe Größe hat. Jede durch  $A, B$  gehende Ebene schneidet den Ort in 2 kongruenten durch  $A, B$  gehenden und symmetrisch gelegenen Kreisen; der Ort ist daher die Rotationsfläche vierter Ordnung  $R_4$ , die entsteht, wenn man den Kreis durch  $A, B, C$  um die Gerade  $AB$  herum rotieren läßt. Schneidet man die Fläche mit einer Geraden oder mit einer Ebene, so erhält man auf der Geraden die Punkte und auf der Ebene den Ort der Punkte, für welche der Winkel  $ACB$  dieselbe Größe hat. Läßt man  $C$  eine beliebige Gerade durchlaufen, so kann man nach den Stellen auf  $g$  fragen, für welche  $ACB$  ein Maximum oder Minimum wird. Für eine solche Stelle auf  $g$  muß eine unendlich kleine Verschiebung des Punktes  $C$  die Größe von  $\sphericalangle ACB$  nicht ändern, folglich muß  $g$  an der betreffenden Stelle von einer Rotationsfläche  $R_4$

berührt werden. Denkt man sich auch die Gerade  $g$  um die Axe  $AB$  herumrotiert, so beschreiben die 2 im Berührungspunkt unendlich benachbarten Punkte der Geraden 2 unendlich benachbarte Parallelkreise und folglich berührt das durch Rotation von  $g$  entstandene Hyperboloid die Fläche  $R_4$  längs eines Parallelkreises. Schneidet man das Hyperboloid und die Fläche  $R_4$  mit einer durch  $AB$  gehenden Ebene, so schneidet sie das erstere in einer Hyperbel und die letztere in 2 Kreisen, von denen der eine die Hyperbel berühren muß. Für die gesuchten Punkte auf  $g$  hat man nun folgende Konstruktion: Man schneidet das Hyperboloid, das durch Rotation der Geraden  $g$  um die Axe  $AB$  entsteht, mit einer durch  $AB$  gehenden Ebene; dann konstruiert man durch  $A, B$  die 6 Kreise, welche die Schnitthyperbel berühren und dreht die Berührungspunkte auf  $g$  zurück. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Hyperbel in Bezug auf die Gerade  $AB$  symmetrisch liegt; daher liegen die 6 Kreise ebenfalls paarweise symmetrisch und auf der Geraden  $g$  entstehen nur 3 gesuchte Punkte. Wählt man den beliebigen Punkt  $P$  des Raumes, so kann man nach den Geraden  $g$  durch  $P$  fragen, für welche  $P$  eine solche Maximums- oder Minimumsstelle wird; die Geraden  $g$  müssen die Rotationsfläche  $R_4$  berühren, welche durch  $P$  geht und daher bilden sie ein Strahlenbüschel durch  $P$ , dessen Ebene durch die Tangente des Kreises durch  $ABP$  hindurch geht und auf der Ebene des Kreises senkrecht steht. Denkt man sich alle möglichen Geraden durch den Punkt  $P$  gelegt und für jede die 3 Maximums- oder Minimumsstellen konstruiert, so ist der Ort derselben eine Fläche vierter Ordnung, welche durch den Punkt  $P$  hindurch geht. Sie enthält auch die Gerade  $AB$  und besitzt mancherlei leicht zu findende Eigenschaften. Liegt  $P$  auf der Geraden  $AB$ , so tritt an Stelle der Fläche vierter Ordnung eine Kugel. Fällt  $P$  ins Unendliche, so sondert sich die unendlich ferne Ebene als Bestandteil der Fläche ab.