

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft  
**Herausgeber:** Thurgauische Naturforschende Gesellschaft  
**Band:** 8 (1888)

**Artikel:** Geometrische Lösung einer einfachen Aufgabe aus der Optik  
**Autor:** Kiefer, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-593862>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Geometrische Lösung einer einfachen Aufgabe aus der Optik.

Von Dr. A. Kiefer in Frauenfeld.

## I.

Die Aufgabe lautet: „Auf einer gegebenen Kurve die Lage eines leuchtenden Punktes zu bestimmen, so dass durch ihn eine gegebene Gerade an vorgeschriebener Stelle möglichst stark beleuchtet werde.“

(Fig. 1.) Bezeichnet  $A$  die vorgeschriebene Stelle auf der gegebenen Geraden  $g$ ,  $X$  irgend einen Punkt der Kurve  $C$ ,  $\varphi$  den Winkel zwischen  $AX$  und  $g$ , so handelt es sich darum, auf  $C$  den Punkt  $X$  so zu bestimmen, dass  $\frac{\sin \varphi}{AX^2}$  möglichst gross, oder  $\frac{AX^2}{\sin \varphi}$  möglichst klein wird. Das Perpendikel in  $A$  auf  $g$  möge das Perpendikel in  $X$  auf  $AX$  im Punkte  $Y$  schneiden; dann ist Winkel  $AYX = \varphi$ ,  $AX = AY \sin \varphi$  und also  $\frac{AX^2}{\sin \varphi} = AX \cdot AY$ , welcher Ausdruck also möglichst klein werden soll. Dieser Umstand tritt bekanntlich ein, wenn  $AX \cdot AY = AX' \cdot AY'$  ist, wobei  $X'$  der unendlich benachbarte Punkt zu  $X$  auf  $C$  ist und  $Y'$  in ähnlicher Weise zu  $X'$  gehört wie  $Y$  zu  $X$ . Der Schnittpunkt von  $AX'$  mit  $XY$  sei  $Z$ ; da  $XY$  auf  $AX$  senkrecht steht, so muss bei unendlicher Nähe von  $X$  und  $X'$   $AZ = AX$  und daher  $AZ \cdot AY = AX' \cdot AY'$  sein, oder

$$\frac{AZ}{AX'} = \frac{AY'}{AY}.$$

10741  
126537

Aus dieser Gleichung folgt, dass  $ZY'$  parallel  $X'Y$  sein muss; bezeichnet  $P$  den Schnittpunkt von  $XY$  und  $X'Y'$ , so muss  $AP$  die Strecken  $ZY'$  und  $X'Y$  halbiren, und wenn die Punkte  $X'$  und  $X$  sich unbegrenzt nähern, *so ist die Grenzlage von  $P$  die Mitte von  $XY$* . Bei der Bewegung des Punktes  $X$  auf  $C$  umhüllt die Gerade  $XY$  die negative Fusspunktkurve von  $C$ ; der Berührungs punkt von  $XY$  ist der Schnittpunkt mit der unendlich benachbarten Geraden  $X'Y'$ . Man hat also den Satz:

*X ist ein gesuchter Punkt auf C, wenn das Perpendikel XY zu AX die zu A als Pol gehörige negative Fusspunktkurve von C in der Mitte zwischen XY berührt.*

Von den verschiedenen Konstruktionen des gesuchten Punktes, die sich aus diesem Satz ergeben, mag bloss die folgende angegeben werden:

*Zu C bestimmt man für A als Pol die negative Fusspunktkurve, schneidet jede Tangente derselben mit dem Perpendikel  $g'$  auf  $g$  durch A und trägt das Stück zwischen dem Berührungs punkt und  $g'$  rückwärts ab, auf die Verlängerung über den Berührungs punkt hinaus; der Ort der so entstehenden Punkte ist eine neue Kurve  $C''$ , welche durch die gesuchten Punkte auf C hindurch geht. (Es wird in Abschnitt VIII gezeigt, wie in einfacher Weise von jeder Tangente der negativen Fusspunktkurve der Berührungs punkt gefunden wird.)*

Im Folgenden sollen einige spezielle Fälle der Aufgabe behandelt werden.

## II.

(Fig. 2.)  $C$  sei eine gerade Linie, welche im Punkte  $S$  auf  $g$  senkrecht steht. Die Gerade  $g'$  wird zu  $C$  parallel; die negative Fusspunktkurve von  $C$  für den Pol  $A$  ist eine Parabel mit  $A$  als Brennpunkt und  $C$  als Scheiteltangente. (Der Ort der Fusspunkte der vom Brennpunkt einer Parabel auf ihre Tangenten gezogenen Lote ist die Scheiteltangente.) Da der Berührungs punkt von  $XY$  mit der Parabel in der Mitte zwischen  $XY$  liegen muss, so ist nach einer bekannten Parabeleigenschaft das Stück  $XT$  der Verlängerung von  $YX$  bis nach  $g$  gleich der Hälfte von  $XY$ , daher auch  $ST = \frac{1}{2} AS$ . Man hat somit folgende Konstruktion:

Man verlängert  $AS$  um die Hälfte über  $S$  hinaus bis nach  $T$ ; dann schlägt man über  $AT$  als Durchmesser einen Kreis, welcher  $C$  in den gesuchten Punkten  $X_1$  und  $X_2$  schneidet.

### III.

(Fig. 3.)  $C$  sei eine beliebige gerade Linie. In diesem Falle ist die negative Fusspunktkurve von  $C$  für den Pol  $A$  wieder die Parabel mit  $A$  als Brennpunkt,  $C$  als Scheiteltangente und also dem Perpendikel  $AST$  von  $A$  auf  $C$  als Axe. Wenn  $X_1$  ein gesuchter Punkt auf  $C$  ist, so muss die Parabel die Gerade  $X_1 Y_1$  in der Mitte zwischen den Punkten  $X_1$ ,  $Y_1$  berühren. Dann ist aber auch  $TX_1 = X_1 P = PY_1$ ; daher ist der Abstand des Punktes  $P$  von  $C$  halb so gross als der Abstand des Punktes  $Y_1$  von  $C$ , und der Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $AS$  ist  $\frac{2}{3}$  von dem Abstand des Punktes  $Y_1$  von der letztern Geraden. Daraus folgt weiter, dass der Punkt  $P$  und die Mitte  $A_1$  von  $AS$  und der Punkt  $S_1$ , der die Strecke  $S'S$  im Verhältnis  $\frac{S'S_1}{SS_1} = \frac{1}{2}$  teilt, auf einer Geraden liegen.

Diese Gerade ist durch  $A_1$ ,  $S_1$  bestimmt, und ihre Schnittpunkte mit der Parabel sind die Punkte  $P$ ; die Parabeltangenten in diesen Punkten schneiden  $C$  in den gesuchten Punkten  $X$ .

Eine einfachere Konstruktion ergibt sich, indem man von der Geraden  $A_1 S_1$  in Bezug auf die Parabel den Pol  $Q$  konstruiert, — als Schnittpunkt der Polaren von  $A_1$  und der Richtung von  $A_1 S_1$  in Bezug auf die Parabel — und dann von  $Q$  aus die Tangenten legt. Nämlich:

Von  $A$  fällt man das Perpendikel auf  $A_1 S_1$  und verlängert dasselbe bis zum Schnittpunkt  $U$  mit  $C$ ; dann verlängert man die Strecke  $A_1 U$  um sich selbst über  $U$  hinaus bis nach  $Q$ . Legt man jetzt den Kreis, der  $QA$  zum Durchmesser hat, so schneidet er  $C$  in den gesuchten Punkten  $X_1$  und  $X_2$ . Man bemerkt, dass die Punkte  $X_1$ ,  $X_2$  stets reell sind.

### IV.

(Fig. 4.)  $C$  sei ein Kreis, welcher durch den Punkt  $A$  hindurch geht. In diesem Falle ist die negative Fusspunktkurve

von  $C$  ein Punkt, nämlich der andere Endpunkt  $B$  des durch  $A$  gehenden Kreisdurchmessers. Daher ergeben sich die gesuchten Punkte so:

*Man verlängert den Kreisdurchmesser  $AB$  über  $B$  hinaus um sich selbst und zieht durch den so erhaltenen Punkt  $B'$  die Parallele zu  $g'$ ; dieselbe schneidet den Kreis  $C$  in den gesuchten Punkten  $X_1, X_2$ .*

Die Punkte  $X_1, X_2$  können zusammenfallen oder imaginär werden. Sie fallen zusammen, wenn der Mittelpunkt des Kreises von  $g'$  einen Abstand hat, der gleich dem dritten Teil seines Abstandes von  $A$  ist. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise durch  $A$ , bei denen die (2) gesuchten Punkte zusammenfallen, besteht also aus 2 durch  $A$  gehenden Geraden; sie trennen die Regionen der Ebene von einander, in denen die Mittelpunkte der Kreise mit reellen, respektive imaginären Lösungen gelegen sind. Der Ort der gesuchten Punkte besteht ebenfalls aus 2 Geraden durch  $A$ .

## V.

(Fig. 5a.)  $C$  sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf  $g$  liegt.\*). Die negative Fusspunktkurve von  $C$  für den Pol  $A$  ist ein Kegelschnitt, für welchen  $A$  Brennpunkt und der gegebene Kreis der Kreis über der Hauptaxe als Durchmesser ist. (Der Ort der Fusspunkte der von den Brennpunkten eines Kegelschnittes auf seine Tangenten gefällten Perpendikel ist der Kreis über der Hauptaxe des Kegelschnittes als Durchmesser.) Der auf  $g$  gelegene Durchmesser des Kreises  $C$  heisse  $DE$ ; ist  $X$  irgend ein Punkt auf  $C$ , so ziehe man  $XS \perp g$  und  $XR \perp AX$ . Konstruiert man jetzt den vierten harmonischen Punkt  $T$  von  $R$  in Bezug auf  $DE$ , so schneidet das Perpendikel in  $T$  auf  $g$  die Gerade  $XY$  im Berührungs-punkt mit dem Kegelschnitt.  $X$  ist also ein gesuchter Punkt auf  $C$ , wenn  $T$  in der Mitte zwischen  $AS$  gelegen ist. Lässt man den Punkt  $R$  sich auf  $g$  bewegen, so beschreiben die Punkte  $S, T$  zwei zur Reihe der Punkte  $R$  projektivische Punktreihen; denn zu jedem Punkte  $R$  gehört ein Punkt  $S$

\*) Dieser Fall tritt ungefähr auf, wenn es sich bei einem Klavier darum handelt, den Leuchter so zu stellen, dass das Notenblatt möglichst stark beleuchtet ist.

und umgekehrt, und zu jedem Punkte  $S$  gehört ein Punkt  $T$  und umgekehrt. Durch Verschieben eines jeden Punktes  $T$  in den doppelten Abstand von  $A$  nach  $S'$  entsteht eine neue Punktreihe, welche ebenfalls zur Reihe der Punkte  $S$  projektivisch ist. Wenn  $X$  ein gesuchter Punkt auf  $C$  ist, so fallen die zusammengehörigen Punkte  $S$  und  $S'$  aufeinander. Fällt  $R$  nach  $D$ , so kommt auch  $S$  nach  $D$ , und  $S'$  fällt nach  $D'$ , wobei  $AD' = 2 AD$ . Fällt  $R$  nach  $E$ , so kommt auch  $S$  nach  $E$ , und  $S'$  fällt nach  $E'$ , wobei  $AE' = 2 AE$ . Fällt  $R$  ins Unendliche, so kommt  $S$  nach  $A$  und  $S'$  nach  $A'$ , wobei  $A'$  von  $A$  doppelt so weit absteht, als der Mittelpunkt des Kreises  $C$ . (Fällt  $R$  in die Mitte von  $DE$ , so kommt  $S$  in den harmonischen Punkt  $A_1$  von  $A$  in Bezug auf  $DE$ , und  $S'$  fällt ins Unendliche. Fällt  $R$  in den Punkt  $A'$ , der von  $A$  doppelt so weit absteht, als der Mittelpunkt des Kreises  $C$ , so rückt  $S$  ins Unendliche und  $S'$  fällt nach dem Punkte, der gefunden wird, indem man den vierten harmonischen Punkt von  $A'$  nach  $D, E$  konstruiert und dann diesen in den doppelten Abstand von  $A$  verschiebt u. s. f.)

Jetzt hat man folgende Lösung des Problems:

(Fig. 5b.) *Man setzt die beiden Punktreihen  $A, D, E$  und  $A', D', E'$  ( $AD' = 2 AD$ ,  $AE' = 2 AE$ ,  $AA' = AD + AE$ ) in projektivische Beziehung, so dass die Zuordnung der Reihenfolge der bezeichneten Punkte entspricht und konstruiert die Doppelpunkte der beiden Reihen; dann errichtet man in den gefundenen Punkten die Perpendikel zu  $g$ , welche  $C$  in den gesuchten Punkten schneiden.*

Von diesen Punkten sind 2 imaginär. Man könnte umgekehrt den einen Doppelpunkt der beiden projektivischen Punktreihen durch einen optischen Versuch bestimmen. (In der Figur sind die Konstruktionslinien, welche zur Bestimmung der Doppelpunkte  $G, H$  nötig waren, weggelassen.)

## VI.

(Fig. 6.)  $C$  sei ein beliebig gelegener Kreis. Die negative Fusspunktkurve von  $C$  für den Pol  $A$  ist wieder ein Kegelschnitt, für welchen  $A$  der eine Brennpunkt und der Kreis  $C$  der Kreis über der Hauptaxe des Kegelschnittes als Durchmesser ist. Ist  $M$  der Mittelpunkt von  $C$ , so wird der andere

Brennpunkt  $A'$  des Kegelschnittes gefunden, indem  $AM$  über  $M$  hinaus um sich selbst verlängert wird. Wenn  $X$  irgend ein Punkt auf  $C$  und  $XY \perp AX$  ist, so findet man bekanntlich den Berührungs punkt  $P$  von  $XY$  mit dem Kegelschnitt, indem man den Gegenpunkt  $A''$  von  $A'$  in Bezug auf die Gerade  $XY$  konstruiert und die Gerade  $A''A$  mit  $XY$  schneidet. (Die Mitte von  $A'A''$  ist der zweite Schnittpunkt von  $YX$  mit  $C$ .)  $X$  ist nun ein gesuchter Punkt, wenn  $P$  in der Mitte von  $XY$  gelegen ist. Zieht man dann  $AF'$  parallel zu  $XY$ , oder was dasselbe ist, senkrecht zu  $A'A''$ , so bilden die 4 Strahlen  $AY, AP, AX, AF'$  eine harmonische Gruppe. Die Parallelstrahlen dazu durch den Punkt  $M$  schneiden  $A'A''$  in 4 harmonischen Punkten, von denen der eine ins Unendliche fällt ( $AX$  ist parallel zu  $A'A''$ ); von den andern ist der eine  $G$ , der Schnittpunkt von  $A'A''$  mit der Parallelen  $g''$  zu  $g'$  durch  $M$ ; der zweite,  $A^*$ , in der Mitte von  $A'A''$  liegt auf  $C$  und der dritte ist der Fusspunkt  $F$  des von  $M$  auf  $A'A''$  gefällten Perpendikels. Der Ort von  $F$  ist, wenn  $A'A''$  gedreht wird, der Kreis  $C'$ , der  $A'M$  zum Durchmesser hat. Wenn  $X$  ein gesuchter Punkt ist, so muss  $FG = GA^*$  sein; man hat also folgende Konstruktion:

*Durch  $M$  legt man die Gerade  $g''$  parallel zu  $g'$ , und über  $MA'$  als Durchmesser legt man den Kreis  $C'$ . Dann zieht man durch  $A'$  alle möglichen Geraden, schneidet jede mit dem Kreis  $C'$  und der Geraden  $g''$  in  $F, G$  und macht stets  $GA^* = GF$ , d. h. man verlängert  $FG$  um sich selbst über  $G$  hinaus. Der Ort von  $A^*$  ist dann eine Kurve  $\mathfrak{C}$ , welche  $C$  in gewissen Punkten schneidet. Verbindet man einen solchen Schnittpunkt  $A^*$  mit  $A'$ , so schneidet das Perpendikel in  $A^*$  auf  $A'A^*$  den Kreis  $C$  in einem gesuchten Punkt  $X_1$ .*

Es ist ersichtlich, dass die Kurve  $\mathfrak{C}$  von dem Radius des Kreises  $C$  unabhängig ist. Diese Konstruktion ist sehr scharf und kann auch im Falle V angewendet werden.

## VII.

Im vorigen Abschnitt ist eine Kurve  $\mathfrak{C}$  verwendet worden, von der im folgenden noch einiges ausgesagt werden soll.  $\mathfrak{C}$  entsteht so: Wenn  $MA'$  Durchmesser eines Kreises und  $g''$  eine Gerade durch  $M$  ist, so schneidet man jede Gerade

durch  $A'$  mit dem Kreis und der Geraden  $g''$  in  $F$  resp.  $G$  und verlängert stets  $FG$  um sich selbst über  $G$  hinaus bis nach  $A^*$ ; dann ist der Ort der Punkte  $A^*$  die Kurve  $\mathfrak{C}$ . Die Geraden durch  $F$  und  $A^*$  parallel zu  $g''$  liegen symmetrisch zu  $g''$ . Daher hat man folgende Erzeugung der Kurve  $\mathfrak{C}$ :

*Man wählt die Strahleninvolution mit dem Scheitel  $A'$ , deren Pol in Bezug auf den Kreis der unendlich ferne Punkt von  $g''$  ist und nimmt zu jeder Durchbohrungssehne die symmetrische Gerade in Bezug auf  $g''$ ; dadurch entsteht ein zur Involution projektivisches Büschel paralleler Strahlen, das mit der Involution die Kurve  $\mathfrak{C}$  erzeugt.*

Daraus folgt ohne weiteres:

$\mathfrak{C}$  ist eine Kurve dritter Ordnung mit  $A'$  als Doppelpunkt. Sie geht durch den unendlich fernen Punkt von  $g''$  und enthält auch die imaginären Kreispunkte. Die reelle Asymptote hat von  $g''$  denselben Abstand wie  $A'$  (ist also  $g'$ ) und schneidet den Kreis in denjenigen Punkten, durch welche die Doppelpunktstangenten gehen müssen. Der dritte Schnittpunkt der Asymptote mit der Kurve ist der Schnittpunkt der Asymptote mit der Kreistangente des Punktes  $A'$ . Die Kurve geht auch durch die Schnittpunkte von  $g''$  mit dem Kreis. Die Tangenten der Kurve, welche zur Asymptote parallel sind, werden erhalten, indem man an den Kreis die Tangenten legt, welche zu  $g''$  parallel sind und dann die zu ihnen in Bezug auf  $g''$  symmetrisch gelegenen Geraden aufsucht; die Berührungs punkte dieser 2 Tangenten mit  $\mathfrak{C}$  werden von  $A'$  aus unter rechtem Winkel gesehen. Die Kurventangente im Punkte  $M$  wird gefunden, indem man im zweiten Schnittpunkt von  $g''$  mit dem Kreis an diesen die Tangente legt, mit der Tangente in  $A'$  schneidet und den Schnittpunkt mit  $M$  verbindet. Die Kurventangente im zweiten Schnittpunkt von  $g''$  mit dem Kreis steht auf  $A'M$  senkrecht.

Wählt man eine Tangente  $x$  des Kreises mit dem Durchmesser  $MA'$  und konstruiert die Kurve, die zu ihr in derselben Beziehung steht, wie  $\mathfrak{C}$  zu dem Kreis, so erhält man eine Hyperbel, welche  $\mathfrak{C}$  berührt und zwar in dem Punkte, welcher dem Berührungs punkt der Kreistangente entspricht. Diese Hyperbel geht durch  $A'$  und den Schnittpunkt von  $x$  mit  $g''$ ; die eine Asymptote ist die Gerade  $g'$  ( $g'$  ist parallel

zu  $g''$  und  $g''$  halbirt das Lot  $A'$  auf  $g'$ ) und die andere Asymptote ist parallel zu  $x$  und liegt so, dass  $A'$  sich in der Mitte zwischen ihr und  $x$  befindet.\*). Diese Asymptote berührt einen Kreis, der mit dem Kreis  $MA'$  gleichen Durchmesser hat und ihn in  $A'$  berührt. Daraus folgt nun z. B. folgende Tangentenkonstruktion für  $\mathfrak{C}$ :

*Man verbindet den Punkt  $P$  auf  $C$ , in welchem die Tangente gefunden werden soll mit  $A'$ ; im zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreis legt man die Tangente  $x$  an diesen Kreis und schneidet sie mit  $g''$ . Den Schnittpunkt verbindet man mit  $A'$  und schneidet diese Linie mit der Parallelen zu  $x$  durch  $P$ . Legt man endlich durch den erhaltenen Punkt eine Parallel zu  $A'P$ , so schneidet sie  $g''$  in einem Punkt, durch welchen die gesuchte Tangente gehen muss. Schneller erhält man die Tangente durch Benützen der zwei Asymptoten.*

Ferner hat man den Satz: *Hält man von einer Hyperbel die eine Asymptote und einen Punkt fest und bewegt die andere Asymptote als Tangente eines Kreises, der durch den festen Punkt geht, so ist die Enveloppe der Hyperbel eine Kurve dritter Ordnung  $\mathfrak{C}$ , welche den festen Punkt zum Doppelpunkt und die feste Asymptote zur Asymptote hat.* Denkt man sich die zu  $\mathfrak{C}$  in Bezug auf  $A'$  centrisch-symmetrisch gelegene Kurve  $\mathfrak{C}'$ , so gestattet dieser Satz folgende Umkehrung: *Hält man von einer Hyperbel die eine Asymptote und einen Punkt fest und bewegt die andere Asymptote als Tangente der cyklischen Kurve dritter Ordnung  $\mathfrak{C}'$ , so ist die Enveloppe der Hyperbel ein Kreis, der durch den festen Punkt hindurch geht.*

Nunmehr ist man auch im Stande, die Inflexionsstellen von  $\mathfrak{C}$  zu finden. Denkt man sich nämlich zu einer Inflexions-tangente diejenige Hyperbel konstruiert, welche zu ihr in

\*) Also: *Zieht man durch einen Punkt einer Hyperbel zwei Parallele zu den Asymptoten, so besteht die Enveloppe einer Geraden von der Eigenschaft, dass ihr Abschnitt zwischen den gewählten Geraden gleich ist dem Abschnitt zwischen dem einen (oder andern) Schnittpunkt und dem einen (oder andern) Schnittpunkt mit der Hyperbel aus 2 Punkten. Diese 2 Punkte gehören der Hyperbel selber an und ihre Verbindungslinie wird von den 2 gewählten Geraden trisecirt. Dadurch erscheinen die Punkte einer Hyperbel paarweise gruppiert; die Verbindungsgeraden dieser Paare umhüllen eine Hyperbel, welche mit der ersten gleiche Asymptoten hat und deren Axen sich zu den Axen der ersten verhalten wie 5 : 4. Auf einer Hyperbel wähle man einen festen Punkt und ziehe eine Parallele  $x$  zu einer Asymptote, so dass der Punkt in der Mitte zwischen ihr und der Asymptote gelegen ist; zieht man nun durch den Punkt eine beliebige Gerade, so ist der geometrische Ort der Mitte der auf ihr von  $x$  und der Hyperbel begrenzten Strecke eine gerade Linie, welche zur andern Asymptote parallel ist und  $x$  auf der Hyperbel schneidet.*

in derselben Beziehung steht wie der Kreis zu  $\mathfrak{C}$ , so muss diese Hyperbel durch  $A'$  gehen, die Gerade  $g'$  zur Asymptote haben und den Kreis über  $MA'$  als Durchmesser oskulieren. *Also handelt es sich darum, die 3 Hyperbeln zu konstruiren, welche durch  $A'$  gehen,  $g'$  zur Asymptote haben und den Kreis oskuliren.* Wählt man auf dem Kreis ausser  $A'$  noch einen Punkt  $Z$ , so schneiden alle Kegelschnitte durch  $A', Z$ , welche  $g'$  zur Asymptote haben, den Kreis in Punktpaaren einer Involution; der Pol derselben wird erhalten, indem man durch  $A'$  und  $Z$  parallele Geraden zu  $g'$  legt, ihre 2 Schnittpunkte  $B', Z'$  mit dem Kreis mit einander verbindet und mit  $g'$  schneidet. Geht die Polare dieses Schnittpunktes in Bezug auf den Kreis durch den Punkt  $Z$ , so ist  $Z$  eine Oskulationsstelle; legt man den Kreisdurchmesser, der auf  $g'$  senkrecht steht, so muss die in Bezug auf ihn zu  $B'Z'$  symmetrisch gelegene Gerade durch  $A'$  und  $Z$  hindurch gehen, wonach sich folgende Konstruktion ergibt:

*Zu den Punkten von  $g'$  bestimmt man das Büschel der Polaren in Bezug auf den Kreis und nimmt zu den Punkten die symmetrischen in Bezug auf den zu  $g'$  senkrechten Durchmesser; verbindet man diese Punkte mit  $A'$ , so entsteht ein Strahlenbüschel, das zu dem Büschel der Polaren projektivisch ist und mit ihm einen Kegelschnitt erzeugt, der den Kreis in den gesuchten Punkten schneidet. Verbindet man einen solchen Punkt mit  $A'$  und verlängert die Strecke zwischen dem Punkte und  $g''$  über letztere Gerade hinaus um sich selbst, so entsteht ein Inflexionspunkt der Kurve  $\mathfrak{C}$ . — Der Kegelschnitt, welcher den Kreis in den gesuchten Punkten schneidet, ist eine gleichseitige Hyperbel. Nimmt man den zu  $MA'$  senkrechten Kreisdurchmesser und zieht durch seine Endpunkte die Parallelen zu  $g''$ , so schneiden sie den Kreis in 2 Punkten, deren Verbindungslinien mit dem Punkte  $A'$  die Asymptotenrichtungen geben. (Da die Inflexionspunkte von  $\mathfrak{C}$  auf einer Geraden liegen, so müssen die 3 Punkte  $Z$  auf dem Kreise so liegen, dass man durch sie und  $A'$  eine Hyperbel legen kann, welche  $g'$  zur Asymptote hat.)*

Man kann auch leicht das allgemeine Tangentenproblem lösen, d. h. die Aufgabe, von einem beliebigen Punkte  $P$  aus an  $\mathfrak{C}$  die möglichen 4 Tangenten zu konstruiren.

*Man verbindet den Punkt  $P$  mit  $A'$ , verlängert die Strecke zwischen  $P$  und  $g''$  um sich selbst über  $g''$  hinaus bis nach  $P'$ .*

Dann legt man die 4 Kegelschnitte durch  $A'$ ,  $P'$ , welche den Kreis berühren und  $g'$  zur Asymptote haben. Die entsprechenden Punkte zu den Berührungs punkten sind die Berührungs punkte der Tangenten auf  $\mathfrak{C}$ . Zur Konstruktion der Berührungs punkte auf dem Kreis handelt es sich bekanntlich um die Ermittelung der gemeinsamen Tangenten des Kreises und eines leicht angebbaren Kegelschnittes  $\mathfrak{K}$ .  $\mathfrak{K}$  ist der Involutionsskegelschnitt des Kreises für die Kegelschnitte durch  $A'$ ,  $P'$ , welche  $g'$  zur Asymptote haben. Die zweite Asymptote dieser Kegelschnitte läuft durch einen festen Punkt, der gefunden wird, indem man  $A'P'$  mit  $g'$  schneidet und das Stück zwischen  $P'$  und  $g'$  von  $A'$  aus in derselben Richtung abträgt. Wird der feste Punkt zum Mittelpunkt des Kreises, so kann die eine oder andere Gerade durch ihn nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten als Asymptote betrachtet werden und der Kegelschnitt berührt dann den Kreis in einem imaginären Kreispunkt. Der Punkt  $P'$  liegt dann auf der Verlängerung von  $A'M$  über  $g'$  hinaus und zwar ist die Verlängerung gleich dem Radius des Kreises. Verlängert man daher  $MA'$  um die Hälfte über  $A'$  hinaus, so erhält man den Hauptbrennpunkt der Kurve  $\mathfrak{C}$  d. h. den Schnittpunkt der Kurventangenten in den imaginären Kreispunkten. Wenn der Mittelpunkt des Kreises für den vorhin erwähnten Kegelschnitt  $\mathfrak{K}$  Brennpunkt ist, so ist der Punkt  $P$ , der zu diesem Kegelschnitt gehört, der Hauptbrennpunkt von  $\mathfrak{C}$ .

### VIII.

In diesem Abschnitt soll von den negativen Fusspunkt kurven im allgemeinen noch kurz die Rede sein.

Die gegebene Kurve heisse  $C$ , der Pol sei  $A$  und die negative Fusspunkt kurve von  $C$  sei  $C'$ . Denkt man sich jetzt eine Tangente  $x$  von  $C$ , so ist die negative Fusspunkt kurve von  $x$  für den gleichen Pol  $A$  eine Parabel mit  $A$  als Brennpunkt und  $x$  als Scheiteltangente; diese Parabel muss die Kurve  $C'$  berühren, weil  $x$  die Kurve  $C$  berührt. Also: *Die negative Fusspunkt kurve einer Kurve  $C$  ist die Enveloppe aller Parabeln, welche den festen Pol  $A$  zum Brennpunkt und die Tangenten von  $C$  successive zu Scheiteltangenten haben; oder: Hält man von einer Parabel den Brennpunkt fest und bewegt*

die Scheiteltangente als Tangente einer Kurve  $C$ , so ist die Enveloppe der Parabel die negative Fusspunktkurve von  $C$ . Wenn  $P$  ein Punkt von  $C$  und somit das Perpendikel in  $P$  auf  $AP$  eine Tangente von  $C'$  ist, so ergibt sich also der Berührungs punkt derselben mit  $C'$  folgendermassen: Man verlängert  $AP$  über  $P$  hinaus um sich selbst bis nach  $A_1$  und fällt von  $A_1$  auf die Tangente der Kurve  $C$  im Punkte  $P$  das Lot; dasselbe schneidet die gewählte Tangente von  $C'$  im gesuchten Berührungs punkte  $Q$ . (Diese Konstruktion könnte gebraucht werden, um die unter II u. s. w. behandelten Aufgaben auf andere Art zu lösen.) Es ist eine bekannte Parabel-eigenschaft, dass der Kreis über  $QA$  als Durchmesser die Gerade  $x$  im Punkte  $P$  berührt. D. h.: Legt man durch einen festen Punkt alle möglichen Kreise, welche eine Kurve  $C$  berühren, so ist der geometrische Ort der zweiten Endpunkte der durch den festen Punkt gehenden Kreisdurchmesser die negative Fusspunktkurve  $C'$  von  $C$ . Legt man durch einen festen Punkt alle Kreise, die eine gegebene Kurve  $C$  berühren, so ist der Ort ihrer Mittelpunkte eine Kurve, welche zur negativen Fusspunktkurve von  $C$  ähnlich und ähnlich gelegen ist; das Ähnlichkeitszentrum ist der feste Punkt und das konstante Verhältnis der Radien vektoren  $1:2$ .

Um die Tangenten der negativen Fusspunktkurve zu bekommen, die durch einen beliebigen Punkt gehen, verbindet man ihn mit  $A$  und legt über dieser Linie als Durchmesser einen Kreis; die gesuchten Tangenten gehen von dem gewählten Punkt nach den Schnittpunkten des Kreises mit der gegebenen Kurve  $C$ . Die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der negativen Fusspunktkurve  $C'$  ergeben sich so: Von  $A$  zieht man auf die Gerade das Lot und bestimmt diejenigen Kreise durch  $A$  und den Fusspunkt des Lotes, welche die Kurve  $C$  berühren; die weiteren Schnittpunkte dieser Kreise mit der Geraden sind die gesuchten Schnittpunkte.

Aus diesen Konstruktionen oder durch direkte Betrachtung ergibt sich, dass wenn die gegebene Kurve  $C$  eine allgemeine Kurve  $n^{ter}$  Ordnung ist, die Klassenzahl der negativen Fusspunktkurve  $2n$  und die Ordnungszahl  $n(n+1)$  ist.

Die negative Fusspunktkurve hat drei  $n$ fache Tangenten, nämlich die unendlich ferne Gerade und die auf sich selbst senkrecht stehenden Geraden vom Pol nach den imaginären

Kreispunkten, so dass man nach der zweiten Plückerschen Gleichung für die Ordnungszahl in der Tat  $2n(2n-1) - 3n(n-1) = n(n+1)$  erhält. (Dass die Klassenzahl der negativen Fusspunktkurve eines Kreises bloss 2 ist, erklärt sich einfach daraus, dass der Kreis durch die imaginären Kreispunkte geht.) Indem die gegebene Kurve  $3n(n-3)$  Wendepunkte besitzt, wird die negative Fusspunktkurve von ebenso viel Parabeln oskulirt, die  $A$  zum Brennpunkt haben. Besitzt die Kurve  $C$  Doppel- resp. Rückkehrpunkte, so entsprechen ihnen bei der Fusspunktkurve Doppeltangenten, resp. Wendetangenten; die Berührungs punkte derselben ergeben sich ebenfalls nach dem auf pag. 115 angegebenen Verfahren. Es lassen sich daher die Charaktere der negativen Fusspunktkurve ohne weiteres finden.

Auf eine andere, ebenso einfache Weise finden sich die Charaktere der negativen Fusspunktkurve in Artikel 123 von Salmon-Fiedlers „Analytische Geometrie der höhern ebenen Kurven“ bestimmt; daselbst ist noch Rücksicht darauf genommen, ob die gegebene Kurve durch den Pol geht, die unendlich ferne Gerade, oder die Geraden nach den Kreispunkten berührt. In Artikel 122 desselben Buches ist gesagt, dass, wie Roberts bemerkte, die Bestimmung der negativen Fusspunktkurve und der Parallelkurve einer gegebenen Kurve auf dasselbe analytische Problem zurückkommen. *Die geometrische Erklärung dieses Umstandes liegt in der auf pag. 115 angegebenen Konstruktion des Berührungs punktes einer Tangente der negativen Fusspunktkurve.* Nämlich: Nach jener Konstruktion ist das Dreieck  $AA_1Q$  gleichschenklig,  $QA = QA_1$ ; verbindet man daher die Mitte  $R$  von  $QA$  mit  $P$  ( $P$  ist auf  $C$  und die Mitte von  $AA_1$ ), so ist  $RP = RA$ . Da  $RP$  parallel zu  $QA_1$ , so steht  $RP$  in  $P$  auf der Tangente von  $C$  senkrecht. Bezeichnet man also die Koordinaten von  $Q$  in Bezug auf ein durch  $A$  gelegtes rechtwinkliges Axensystem mit  $X, Y$ , so ist  $RP^2 = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4}$  ( $= k^2$ ) und die Koordinaten von  $R$  sind

$\frac{X}{2}$  u.  $\frac{Y}{2}$ . Man erhält somit in der Tat aus der Gleichung der Parallelkurve von  $C$  ( $RP = k$ ) die Gleichung der negativen Fusspunktkurve, indem man  $k^2 = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4}$  u.  $x = \frac{X}{2}, y = \frac{Y}{2}$  setzt.

In irgend einem Punkte  $P$  von  $C$  denke man sich den Krümmungskreis mit dem Mittelpunkte  $M$  konstruiert. Die negative Fusspunktkurve dieses Kreises ist dann ein Kegelschnitt, der mit der negativen Fusspunktkurve  $C'$  von  $C$  3 unendlich benachbarte Tangenten gemein hat, d. h. dieselbe oskuliren muss und zwar in demjenigen Punkte  $Q$ , der dem Punkte  $P$  entspricht ( $Q$  ist der Berührungs punkt des Perpendikels  $PQ$  auf  $AP$ ). *Der Krümmungsmittelpunkt der negativen Fusspunktkurve im Punkte  $Q$  kann also als Krümmungsmittelpunkt eines gewissen Kegelschnittes gefunden werden.* Dieser Kegelschnitt hat  $A$  zum Brennpunkt,  $M$  zum Mittelpunkt und  $QP$  zur Tangente in  $Q$ . Errichtet man noch im Punkte  $M$  das Perpendikel auf  $AM$ , so hat man z. B. folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes im Punkte  $Q$  der negativen Fusspunktkurve: *Durch  $Q$  zieht man die Parallele zu  $AP$ ; diese Parallele und die Gerade  $QP$  bestimmen mit der Geraden  $AP$  und ihrem Lot in  $M$  zwei rechtwinklige Dreiecke, die man zu Rechtecken ergänzen kann. Die Verbindungsgerade der zwei freien Ecken dieser Rechtecke schneidet die zuerst gezogene Parallele zu  $AP$  durch  $Q$  im gesuchten Krümmungsmittelpunkt.* Hiernach stellt sich für einen Punkt eines Kegelschnittes der Krümmungsmittelpunkt als *der innere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise dar, deren Mittelpunkte die Schnittpunkte der Normalen mit den Axen und deren Radien die Abschnitte der Tangente zwischen dem Berührungs punkte und den Axen des Kegelschnittes sind.*

Aus der angegebenen Konstruktion folgt von neuem, dass einer Spalte von  $C$  eine Wendetangente der negativen Fusspunktkurve entspricht. Ferner folgt, dass die negative Fusspunktkurve Spitzen haben muss und dass dieselben so gefunden werden: *Man legt durch  $A$  diejenigen Kreise, welche die gegebene Kurve  $C$  oskuliren; die zweiten Endpunkte ihrer durch  $A$  gehenden Durchmesser sind Spitzen der negativen Fusspunktkurve  $C'$ .* (Man vergleiche einen Satz auf pag. 115, der ebenfalls zu diesem Resultate führt.) Die negative Fusspunktkurve einer allgemeinen Kurve  $n^{ter}$  Ordnung hat also  $3n(n-1)$  Spitzen.

### Schlussbemerkung.

In VII und VIII sind Kurven  $C'$  betrachtet worden, die sich punkt- oder tangentenweise aus den Punkten einer gegebenen Kurve  $C$  ergeben; in beiden Fällen ist von dem Umstände Gebrauch gemacht worden, dass die, in gleicher Weise wie  $C'$  zu  $C$ , zu einer Tangente von  $C$  gehörige Kurve die Kurve  $C'$  berühren muss. Dieses Prinzip lässt sich in allen derartigen Fällen mit Vorteil verwenden, z. B. auch bei der Steinerschen Hypocycloide. Diese ist bekanntlich die Enveloppe der Geraden, auf der die Fusspunkte der Lote liegen, die von irgend einem Punkte des einem Dreieck umschriebenen Kreises auf seine Seiten gezogen werden können. Wählt man nämlich eine Tangente des Kreises und zieht von allen Punkten derselben auf 2 Seiten des Dreiecks Perpendikel, so ist die Enveloppe der Verbindungsline ihrer Fusspunkte eine Parabel, welche die 2 Seiten des Dreiecks berührt, den Fusspunkt des von ihrem Schnitt auf die Tangente gefällten Lotes zum Brennpunkt hat und welche die Hypocycloide berührt. Darnach ergibt sich die Kurve als Enveloppe von Parabeln, ferner eine einfache Konstruktion der Berührungsstrecken ihrer Tangenten; dann kann man andere Erzeugungsarten der Kurve und die von Steiner ohne Beweis über die Kurve gegebenen Sätze ableiten, wie der Verfasser vor längerer Zeit bei einem andern Anlass gefunden hat.

Frauenfeld, im Mai 1888.