

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss forestry journal = Journal forestier suisse

**Herausgeber:** Schweizerischer Forstverein

**Band:** 145 (1994)

**Heft:** 9

**Artikel:** Überlegungen zur Planung und Auswertung systematischer Stichproben

**Autor:** Kleinn, Christoph / Jost, Adelheid

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-766624>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen Journal forestier suisse

145. Jahrgang

September 1994

Nummer 9

## Überlegungen zur Planung und Auswertung systematischer Stichproben

Von *Christoph Kleinn* und *Adelheid Jost*

FDK 524.63: UDK 519.22

### Einführung und Fragestellungen

Systematische Stichproben besitzen eine sehr weite Verbreitung. Bei vielen Fragestellungen in der Forstwirtschaft und insbesondere im Bereich der Forstinventur sind sie Standardverfahren. Die Vorteile hinsichtlich Planung, Durchführung, Genauigkeit und Ergebnisdarstellung sind häufig genannt und sollen hier nicht wiederholt werden (zum Beispiel *Cochran 1977*, *Saborowski 1992*, *Jost 1993*). Da sich die Anwendung systematischer Stichproben insbesondere hinsichtlich der Fehlerrechnung nicht auf Standardverfahren der Statistik stützen kann, sind sie regelmässig Gegenstand wissenschaftlicher Studien. Die vorliegende Arbeit behandelt einige Einzelfragen aus dem Bereich räumlich systematischer Stichproben, welche zum Teil aus theoretischer, zum Teil aus praktischer Sicht für Planung und Auswertung interessierende Aspekte ansprechen.

Eine räumlich systematische Stichprobe ergibt sich, wenn die Stichprobenorte nach einem vordefinierten Muster (Raster) lokalisiert werden. Der erste Abschnitt der Studie befasst sich mit Varianten dieser Raster und einigen ihrer Eigenschaften. Um eine Stichprobe im eigentlichen Sinne handelt es sich nur, wenn das Raster zufällig positioniert wird. Es ergibt sich dann eine Stichprobe vom Umfang 1. Im zweiten Abschnitt wird beschrieben, welche Auswirkungen es auf den Stichprobenfehler haben kann, wenn die Festlegung des Rasters nicht zufällig erfolgt. Ein zentraler Punkt bei systematischen Stichproben ist die statistische Effizienz bzw. der Stichprobenfehler. Da er nicht exakt berechnet werden kann, behilft man sich häufig mit Näherungsformeln. Zu einer dieser Formeln, der Paardifferenzenformel, liefert der dritte Abschnitt einige Bemerkungen. Verhalten und Eignung der systematischen Stichprobe hängen von der räumlichen Struktur der untersuchten Population ab. Diese lässt sich über die Autokorrelation beschreiben, womit sich das vierte Kapitel befasst. Hinsichtlich der Genauigkeit systematischer Stichproben stellt sich die Frage nach der Tendenzfreiheit der Erwartungswertschätzung. Bisweilen sind – auch

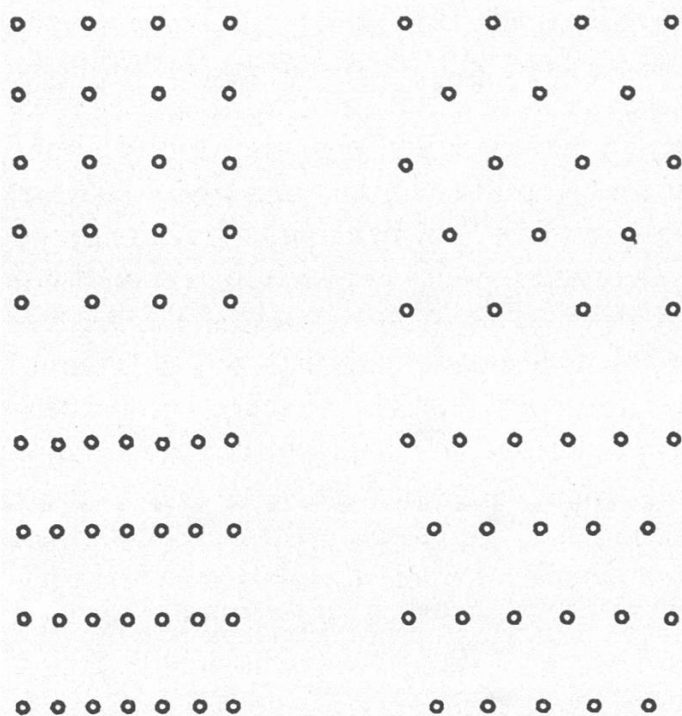
in Lehrbüchern – warnende Hinweise zu finden, dass systematische Stichproben zwar einen geringeren Stichprobenfehler aufweisen als Zufallsstichproben, dass aber die Tendenzfreiheit der resultierenden Erwartungswertschätzungen nicht immer garantiert sei. Überlegungen zu dieser Fragestellung finden sich im fünften Abschnitt.

## 1. Rasterformen

Systematische Stichproben lassen sich in unterschiedlichen Formen als Raster ausbringen. Die geläufigsten Rasterformen sind:

- Rechteckraster: Die Punktabstände sind in den beiden senkrecht zueinander stehenden Rasterrichtungen unterschiedlich gross.
- Quadratraster: Die Punktabstände in den senkrecht zueinander stehenden Rasterrichtungen sind gleich. Das Quadratraster ist ein Spezialfall der Rechteckraster.
- Dreieckraster: Die Punkte befinden sich jeweils an den Ecken gleichschenkliger Dreiecke.
- Gleichseitiges Dreieckraster: Die Punkte befinden sich an den Ecken gleichseitiger Dreiecke.

In *Abbildung 1* sind diese Rasterformen dargestellt. Es ist dabei zu erkennen, dass mit kürzer werdendem Abstand zwischen den Punkten Rechteck- und Dreieckraster immer mehr den Charakter einer Linienstichprobe annehmen. Diesen Übergang beschreibt *Matérn* (1989).



*Abbildung 1.* Verschiedene Rasterformen. Im Uhrzeigersinn von links oben: Quadratraster, gleichseitiges Dreieckraster, Dreieckraster und Rechteckraster.

Die verschiedenen Rasterformen besitzen unterschiedliche Eigenschaften hinsichtlich ihrer statistischen Effizienz und – falls Feldaufnahmen anstehen – hinsichtlich des Arbeitsaufwandes. Ein Vergleich der statistischen Effizienz verschiedener Rasterformen muss bei gleichem Stichprobenumfang erfolgen, das heisst, die Punktdichte pro Flächeneinheit muss gleich sein. Um dies zu gewährleisten, sei angenommen, dass sich pro Einheitsfläche ein Rasterpunkt befinde. Es ergeben sich dann folgende Punktabstände:

- Im Rechteckraster mit Seitenverhältnis  $1:b$  mit  $b > 1$  ist der Abstand zwischen den Reihen  $b$ , innerhalb der Reihen  $1/b$ .
- Im Quadratraster beträgt der Abstand in beide Richtungen 1.
- Ist im gleichschenkligen Dreieckraster der Punktabstand innerhalb der Reihe, also die Grundseite des gleichschenkligen Dreiecks,  $c$ , so ist der Abstand zwischen den Reihen  $1/c$  und der Punktabstand zwischen den Reihen, das heisst die Länge der Dreieckschenkel,

$$\sqrt{c^2 + 4/c^2}/2.$$

- Im gleichseitigen Dreieckraster schliesslich ist der Punktabstand einheitlich  $\sqrt[4]{4/3}$  und der Abstand zwischen den Reihen  $1/\sqrt[4]{4/3}$ .

Wenige Studien befassen sich mit Gegenüberstellungen dieser Art. Hinweise finden sich beispielsweise in der schon klassischen Abhandlung von Matérn (1986/1960), welcher die folgenden Ergebnisse entnommen sind. Er stellt verschiedene Rasterformen bei unterschiedlichen Populationsstrukturen – charakterisiert durch theoretische Kovarianzfunktionen (siehe auch Abschnitt 4) – gegenüber. Das Dreieckraster hat dabei durchweg den geringsten Stichprobenfehler. Die Unterschiede zum Quadratraster sind jedoch sehr klein; sie sind in der genannten Studie um etwa 1 % bis 4 % grösser als beim Dreieckraster. In empirischen Studien dürfte diese Überlegenheit des Dreieckrasters kaum erkennbar sein. Schon mässige Abweichungen von der Quadratform führen allerdings bei den untersuchten Populationen zu nennenswerten Einbussen an Genauigkeit: Beim Rechteckraster mit einem Seitenverhältnis von 2:1 liegt der Fehler bereits um 20 % bis 70 % über dem des Quadratrasters. Bei noch ungünstigeren Seitenverhältnissen verliert die systematische Stichprobe schliesslich ihre Überlegenheit über die Zufallsauswahl. Diesen Übergang stellte Matérn (a. a. O.) bereits beim Seitenverhältnis 1:8 für verschiedene Populationsstrukturen fest. In einem solchen Fall würde man allerdings weniger von einer systematischen Stichprobe mit einem Rechteckraster als vielmehr von einer Variante der Linienstichprobe («line-plot-survey») sprechen, bei welcher die Probeflächen relativ eng auf Linien aufgereiht sind.

Man kann sich die Überlegenheit von Dreieck- und Quadratraster anschaulich durch die Gleichmässigkeit der Abdeckung des Inventurgebietes

erklären, welche beim gleichseitigen Dreieckraster und dem Quadratraster deutlich besser ist als bei Rechteckrastern. Bezieht man allerdings ökonomische Aspekte in die Überlegungen mit ein, so erhalten – wenn es sich um terrestrische Aufnahmen handelt – die Wegezeiten eine herausragende Bedeutung, so dass eine kombinierte statistische/ökonomische Optimierung durchaus für Rechteckraster sprechen kann.

## 2. Auswirkung fester Rasterrichtung

Von Stichproben im Sinne der Stichprobentheorie spricht man, wenn die Auswahl der Elemente, seien es einzelne Probeflächen oder Klumpen von Probeflächen, in irgendeiner Form zufällig geschieht. Bei einer systematischen Stichprobe beträgt der Stichprobenumfang 1, das gesamte Raster wird als ein Klumpen (*Cluster*), bestehend aus einer bestimmten Anzahl von Punkten betrachtet. Eine statistische Auswahl ist dies jedoch nur dann, wenn das Raster zufällig plaziert wird (Cochran 1977, S. 207), was bei räumlichen Stichproben bedeutet, dass ein Punkt des Rasters («Einhängepunkt») und die Richtung des Rasters zufällig zu bestimmen sind. In der Praxis ist dies oft nicht so. In vielen Inventuren orientiert sich die Rasterrichtung – fest definiert von Anfang an – am geläufigen geodätischen Koordinatensystem. Die Koordinaten der Rasterpunkte sind im Falle der meistens zur Anwendung kommenden Rechteck- oder Quadratraster runde Werte wie zum Beispiel 100 m oder 2 km, was die Planung der Inventur und das Aufsuchen der Stichprobenorte im Gelände erleichtert.

Die Fragestellung, wie sich die Nicht-Zufälligkeit bei der Auswahl der Rasterrichtung auswirkt, wird in der Literatur kaum behandelt. Quantitative und generalisierende Aussagen darüber zu machen, ob und gegebenenfalls welche Auswirkungen eine willkürliche Festlegung des Rasters hat, ist sicherlich auch nicht möglich, da eine Abhängigkeit von der jeweils vorliegenden räumlichen Verteilung der untersuchten Variablen besteht.

Anhand von zwei einfachen Beispielen, der Flächenschätzung eines Quadrates und einer Waldverteilungskarte jeweils mit Punkterastern, lassen sich jedoch grundsätzliche Erkenntnisse ableiten, wie die Auswirkungen einer Fixierung der Rasterrichtung hinsichtlich des Stichprobenfehlers zu beurteilen sind:

Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge  $s$  soll mit einem quadratischen Einheitsraster geschätzt werden, was äquivalent ist zu Rastern unterschiedlicher Weite bei festgelegter Quadratdimension. In *Abbildung 2* ist das sich ergebende Stichprobenfehlerprozent als Funktion der Quadratseite  $s$  dargestellt, zum einen für eine zufällige Festlegung des Rasters (durchgezogene Linie), zum anderen für eine parallel zum Quadrat fixierte Rasterrichtung

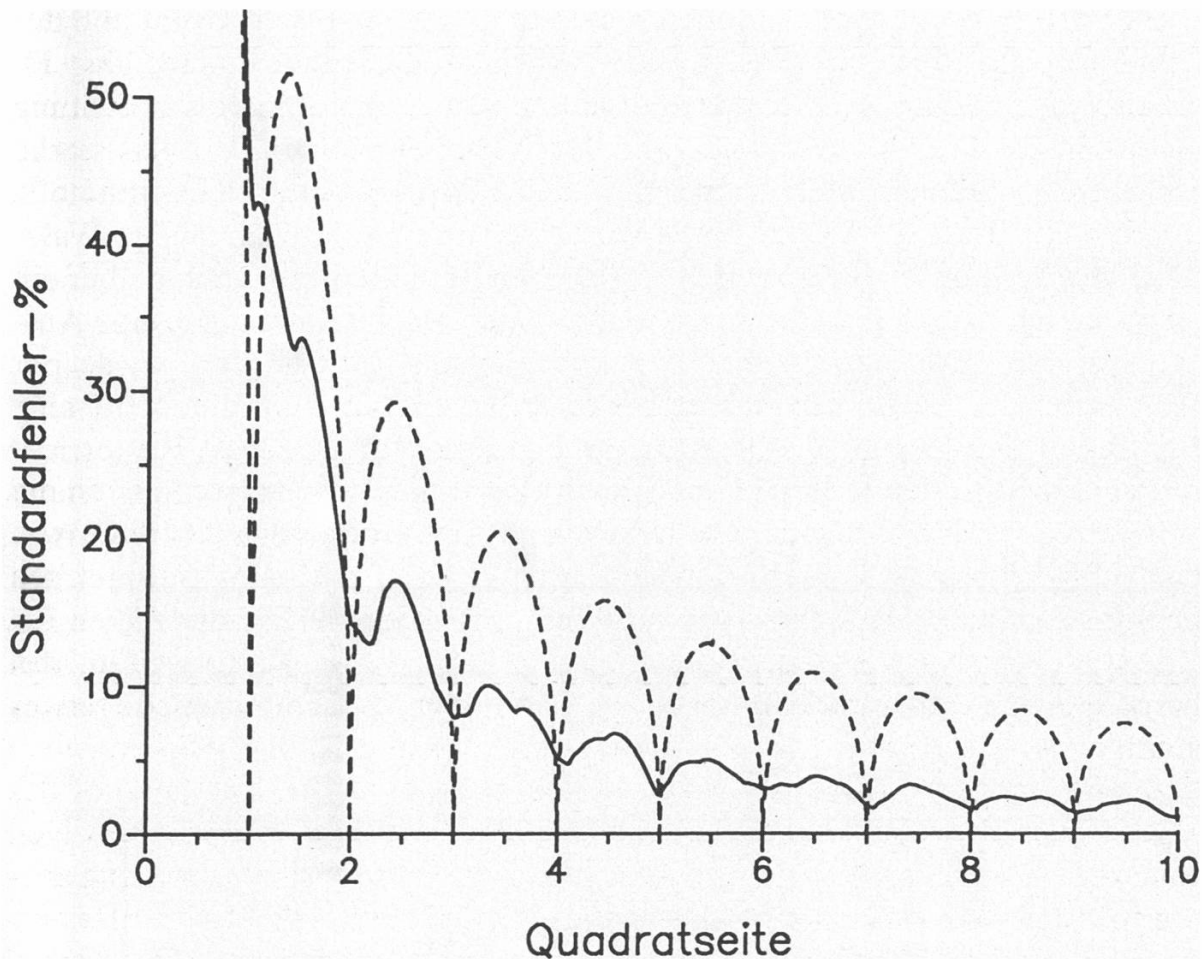


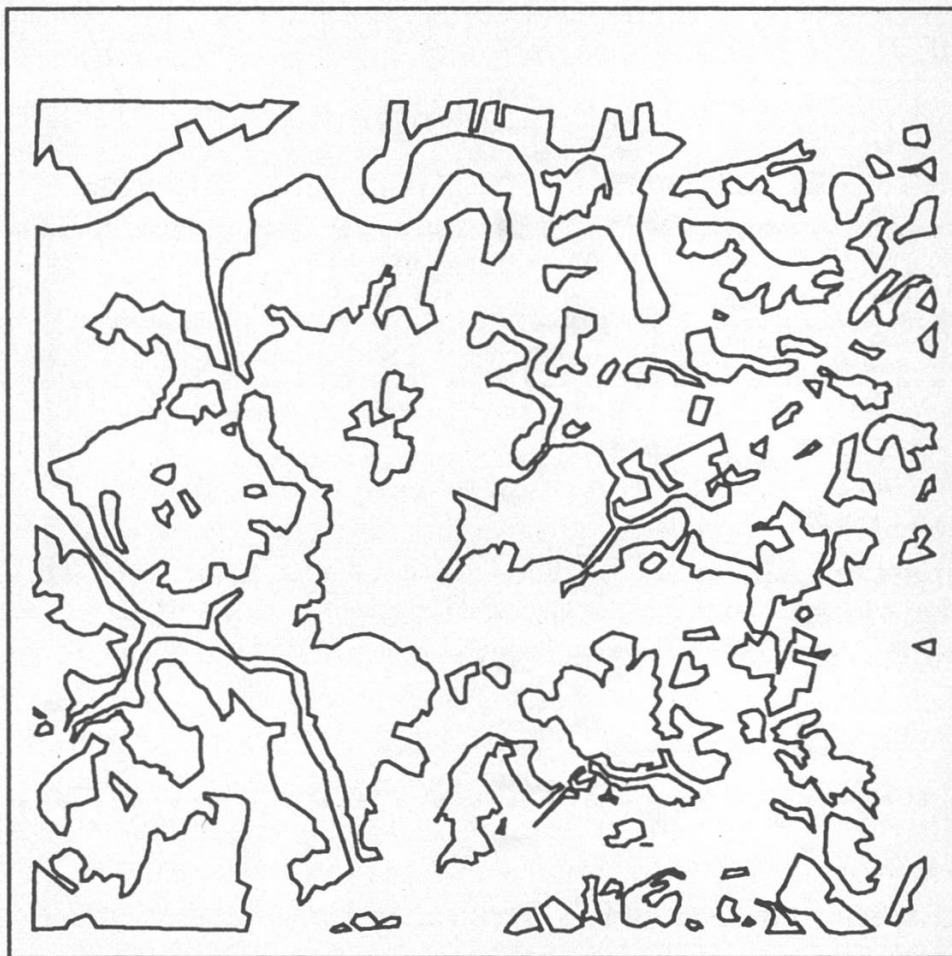
Abbildung 2. Vergleich der Flächenschätzgenauigkeit bei Quadraten unterschiedlicher Seitenlänge mit einem Einheitsraster (Rasterweite 1). Dargestellt ist die Beziehung zwischen Standardfehler-Prozent und Seitenlänge des Quadrates. Die durchgezogene Linie gibt den Verlauf für zufällig gewählte Rasterrichtungen, die gestrichelte Linie den Verlauf für eine den Quadratseiten parallel fixierte Rasterrichtung (aus Kleinn 1991).

(gestrichelte Linie), bei der lediglich der Einhängpunkt des Rasters zufällig festgelegt wurde. Die entsprechenden Berechnungsformeln finden sich zum Beispiel bei Matérn (1989) und Kendall und Moran (1963). Folgendes fällt auf:

- Die Schwankungen der Fehlerwerte sind für die fixierte Rasterrichtung deutlich höher als bei einer zufälligen Auswahl. Sie weisen zudem einen glatten Schwingungsverlauf auf, während man für die Zufallsauswahl anschaulich von einer «Zitterbewegung» spricht (Matérn 1989).
- Im Mittel ist der Fehler für die festgelegte Rasterrichtung grösser, wobei der relative Unterschied besonders ausgeprägt ist bei grossem  $s$  bzw., äquivalent ausgedrückt, bei engen Rastern. Wegen der geometrischen Übereinstimmung der Objektform und des Rasters kommt es bei geradzahligem  $s$  immer zu einem Stichprobenfehler von 0.

Natürlich ist ein solches Modell mit einer einfachen Flächenform und der Festlegung der Rasterrichtung parallel zu ihr nur beschränkt aussagefähig. Es würden sich zudem andere Werte ergeben, würde man die Rasterrichtung nicht parallel zu den Quadratseiten fixieren, wobei insbesondere das starke Abfallen des Standardfehlers auf 0 für geradzahlige Quadratseiten entfielen.

In einer weiteren Modellstudie wurde daher eine unregelmässige Waldflächenverteilung, die in *Abbildung 3* zu sehen ist, herangezogen und über ein Quadratraster geschätzt. Die Gesamtkarte hat in beiden Richtungen eine Ausdehnung von 10000 Einheiten. Für verschiedene Rasterweiten wurde per Simulation der Stichprobenfehler bestimmt, wiederum zum einen für eine zufällige Positionierung des Rasters, zum anderen für eine feste Rasterrichtung parallel zur Kartenseite. In doppelt logarithmischer Darstellung (siehe *Abbildung 4*) ergibt sich ein linearer Verlauf des asymptotischen Mittelwertes. Die Werte für eine feste Rasterrichtung sind wie auch beim Beispiel des Quadrates höher und weisen stärkere Schwankungen auf als diejenigen für eine zufällige Auswahl der Rasterrichtung. Für grosse Rasterweiten, das heisst geringe Stichprobenintensitäten, sind hier die Unterschiede etwas geringer.



*Abbildung 3.* Beispiel für eine Waldverteilungskarte.

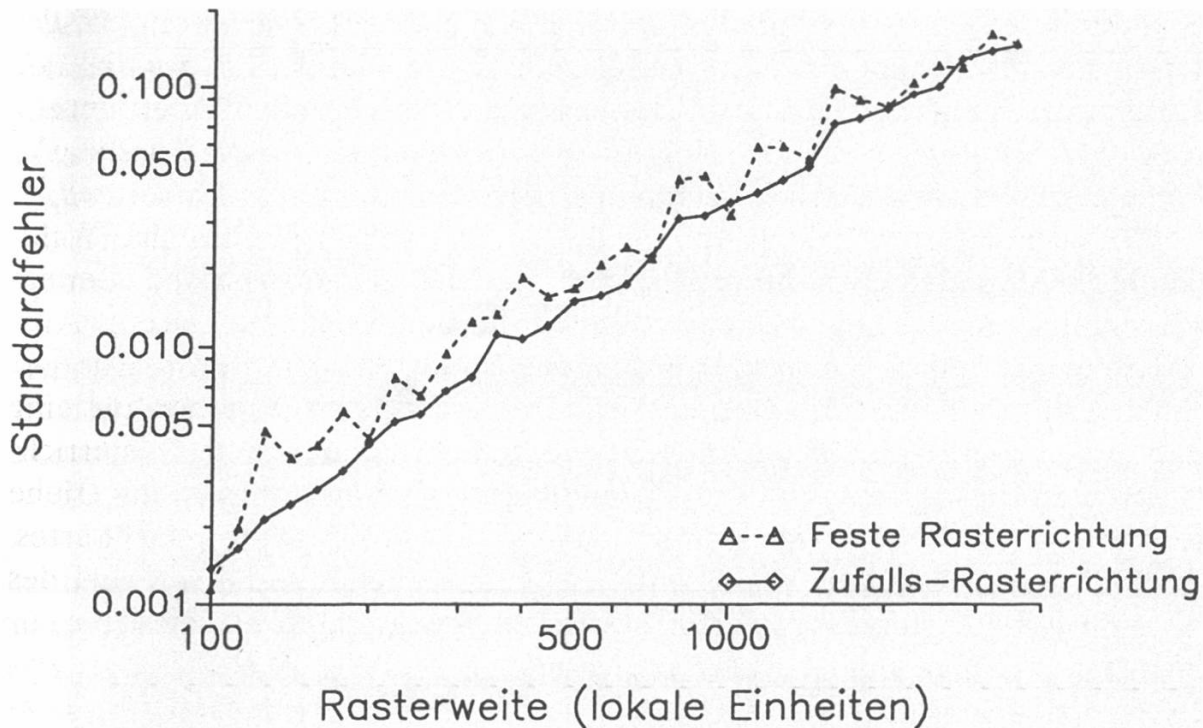


Abbildung 4. Vergleich der Stichprobenfehler bei fester (gestrichelte Linie) und zufällig gewählter (durchgezogene Linie) Ausrichtung von Punkterastern für die Waldkarte in Abbildung 3 (Kartenbreite 10 000 Einheiten). Die feste Ausrichtung erfolgte parallel zu den Seiten der Karte (aus Klein 1991).

Die beiden Studien zeigen, dass die Frage nach der Zufallsauswahl nicht ganz unberechtigt ist. Natürlich hängen die Unterschiede ganz wesentlich von der räumlichen Anordnung der untersuchten Variablen ab. Liegt strenge Isotropie vor, das heisst verhält sich die betrachtete Variable in alle Richtungen gleich, so hat der Modus der Auswahl der Rasterrichtung keinen Einfluss. Es kann aber durchaus sein, dass sich bei einer Fixierung der Rasterrichtung in unterschiedlichen Richtungen sehr unterschiedliche Standardfehler ergeben, insbesondere in kleineren Inventurregionen oder in Gebieten, in welchen aufgrund topographischer Gegebenheiten eine räumliche Ausrichtung von Landschaftselementen vorliegt, zum Beispiel Wasserflächen in Skandinavien, die sich bevorzugt in die Richtung der ehemaligen Gletscherbewegungen erstrecken (siehe auch Matérn 1986/1960).

### 3. Zur Fehlerapproximation

In der Literatur sind unter der Voraussetzung, dass die Population bekannt ist, einige Vorschläge zur Berechnung des Stichprobenfehlers bei systematischen Stichproben genannt (zum Beispiel Cochran 1977, S. 207ff). Verfahren, die den Fehler ausschliesslich aus den Daten einer einzigen Stichprobe berech-

nen, existieren nicht, wohl aber eine Reihe von Näherungsverfahren (Wolter 1984). Jost (1993) gibt einen komprimierten Überblick über die Vielfalt der Ansätze zur Fehlerschätzung bei systematischen Stichproben. Viele Näherungsverfahren haben in einer Reihe von verifizierenden Studien und praktischen Anwendungen ihre Berechtigung bewiesen. Sie führen korrekt angewendet zu einer deutlich besseren Annäherung des wahren Fehlers als dies die häufig angewendete Fehlerformel für die einfache Zufallsauswahl vermag. Wie gut die Annäherung ist, bleibt allerdings auch hier unklar.

Eines der ältesten dieser Näherungsverfahren, die Paardifferenzenmethode, soll hier betrachtet werden. Sie wurde in den 20er Jahren entwickelt und in den ersten forstlichen Nationalinventuren in Skandinavien eingesetzt (Lindeberg 1924, Langsæter 1926). Grundlage dieses Verfahrens ist die Differenz der Merkmalsausprägungen  $x_1$  und  $x_2$  von jeweils zwei benachbarten Punkten im Stichprobenraster. Werden  $n_{PD}$  dieser Paardifferenzen gebildet bei insgesamt  $N$  aufgenommenen Stichprobenpunkten, so ergibt sich eine Schätzung für die Fehlervarianz nach:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sum(x_1 - x_2)^2}{2 N n_{PD}} \quad (1)$$

Diese Formel ist kein Hexenwerk, sondern lässt sich sehr einfach über die Vorstellung herleiten, dass die Stichprobe in Straten eingeteilt ist, die jeweils zwei Punkte enthalten. Im Unterschied zur stratifizierten Stichprobe, bei welcher die Punkte innerhalb des Stratums zufällig zu nehmen wären, sind hier die Stichproben fest vorgegeben. Daher liefert diese Formel auch keine exakten Werte, sondern lediglich Approximationen.

Betrachtet man Variablen, welche nur zwei Werte annehmen können («0» und «1», «vorhanden» und «nicht vorhanden», «Wald» und «Nichtwald»), so lässt sich diese Formel vereinfachen: Geht man von  $n_{PD} = N/2$  sich nicht überlappenden Paaren benachbarter Rasterpunkte aus, so ergibt sich nach Logarithmierung:

$$\log SE\% = 2 + 0,5 \log n_{0-1} - \log n, \quad (2)$$

mit  $n$  = Anzahl Punkttreffer, das heisst Anzahl Stichprobenpunkte im Wald und

$n_{0-1}$  = Anzahl 0-1-Übergänge, das heisst Paare von benachbarten Punkten, bei denen ein Punkt innerhalb, der andere ausserhalb des Waldes liegt.

Da nur die Merkmalsausprägungen «0» und «1» möglich sind, ist der Zähler in (1) gleich der Anzahl 0-1-Übergänge.

Zwei Effekte sind an dieser Beziehung deutlich zu sehen: Der Stichprobenfehler nimmt ab, wenn die Anzahl Punkttreffer und damit der Stich-

probenumfang steigt. Der Stichprobenfehler nimmt zu – dies ist der zweite Effekt – mit zunehmender Anzahl 0–1-Übergänge. Je zergliederter also die Verteilung einer 0–1-Variablen einer Region ist, desto ungenauer ist ihre Schätzung bei vorgegebener Rasterweite. In empirischen Studien (Kleinn und Pelz 1992), bei denen der «wahre» Stichprobenfehler über Simulationen hergeleitet wurde, ergab sich in analoger Notation zu (2).

$$\log SE\% = 1,60894 + 0,55296 \log n_{0-1} - 1,10157 \log n. \quad (3)$$

Die Variablen  $n$  und  $n_{0-1}$  besitzen in den Gleichungen (2) und (3) einen etwa gleich grossen Einfluß, die Unterschiede in den zugehörigen Koeffizienten liegen in einer Grössenordnung von etwa 10%. Am y-Achsen-Abschnitt von 1,60894 in Gleichung (3) ist aber zu erkennen, dass der berechnete wahre Standardfehler in den untersuchten Karten deutlich geringer ist als er durch die Anwendung von Formel (2) angenähert würde. Dies stimmt überein mit einer Reihe weiterer Untersuchungen, in welchen festgestellt wird, dass die Paardifferenzenformel zu einer deutlichen Überschätzung des wahren Fehlers neigt (zum Beispiel Nyssönen *et al.* 1967, Kleinn 1991, Jost 1993).

Da der Stichprobenfehler bei systematischen Stichproben nur grob abgeschätzt werden kann, bereitet auch eine exakte Herleitung von Stichprobenumfängen Schwierigkeiten, ein Problem, auf das zum Beispiel auch Sabrowski (1992) hinweist. Der Stichprobenumfang ist bei systematischen Stichproben der betrachteten Art grundsätzlich eine Zufallsvariable. Es wird ein Raster fester Weite über ein Untersuchungsgebiet gelegt, wobei die genaue Anzahl der Rasterpunkte, die schliesslich in das Gebiet fallen, schwankt. Wie sehr sie schwankt, hängt ausschliesslich von der Form des Gebietes ab. Die Festlegung des Stichprobenumfanges erfolgt in der Praxis meist indirekt über die Festlegung der Rasterweite, welche zudem in den meisten Fällen runde Werte annimmt (zum Beispiel 100 m oder 4 km).

#### 4. Die systematische Stichprobe in autokorrelierten Populationen

Die oben beschriebene Fehlerschätzung über Paardifferenzen lässt sich als schematisierte Poststratifizierung betrachten. Auf diesem Wege kann die räumliche Strukturiertheit einer Population, die die Effizienz der systematischen Stichprobe entscheidend beeinflusst, bis zu einem gewissen Mass in die Fehlerrechnung miteinbezogen werden. Eine derartige Struktur lässt sich einfach am Beispiel einer Betriebsinventur mit systematisch über den ganzen Betrieb verteilten Probeflächen veranschaulichen: Der Holzvorrat auf den verschiedenen Probeflächen ist nicht räumlich zufällig verteilt. Vielmehr zeigen sich deutliche Muster. Eine Probefläche höheren Holzvorrates ist meist in

unmittelbarer Nachbarschaft von Probeflächen umgeben, die ebenfalls einen höheren Holzvorrat aufweisen. Dieser Effekt kommt im schlagweisen Wirtschaftswald vor allem dadurch zustande, dass benachbarte Probeflächen mit hoher Wahrscheinlichkeit demselben Bestand entstammen. Den Grad der Ähnlichkeit nahe beieinanderliegender Populationselemente kann man durch die sogenannte Autokorrelation beschreiben. Im Unterschied zur Korrelation, die den Zusammenhang zweier verschiedener Variablen betrachtet, zielt die Autokorrelation auf die Gesetzmässigkeiten bei der räumlichen Verteilung einer einzigen Variablen. Die meisten natürlichen Populationen weisen eine gewisse Autokorrelation in ihrer räumlichen Verteilung auf, und zwar in der Form, dass sich nahe beieinanderliegende Elemente im Mittel ähnlicher sind als weit voneinander entfernte.

Der Stichprobenfehler der systematischen Stichprobe hängt nun ganz entscheidend von der Autokorrelation der Population ab. Dabei ist der Fehler umso geringer, je stärker die räumlichen Strukturen ausgeprägt sind. Dieser wesentliche Zusammenhang wird bei der einfachen Fehlerrechnung mit der Zufallsfehlerformel völlig ignoriert, da bei der Berechnung der klassischen Standardabweichung alle Beobachtungen «in einen Topf geworfen» werden, ohne ihre räumliche Lage zueinander zu beachten. Wird die Fehlerschätzung über Paardifferenzen durchgeführt, kann die Autokorreliertheit der Population zumindest zu einem Teil berücksichtigt werden. Um aber mehr an räumlicher Information miteinzubeziehen, muss die Autokorrelation auf der Basis der jeweiligen Stichprobe beschrieben werden und unmittelbar in die Fehlerrechnung eingehen. Dies kann mit Hilfe des sogenannten Korrelogramms  $r(h)$  erfolgen. Es beschreibt die Autokorrelation zwischen zwei Populationselementen in Abhängigkeit von der Entfernung  $h$  zwischen ihnen. Der typische Verlauf eines Korrelogramms ist in *Abbildung 5* dargestellt.

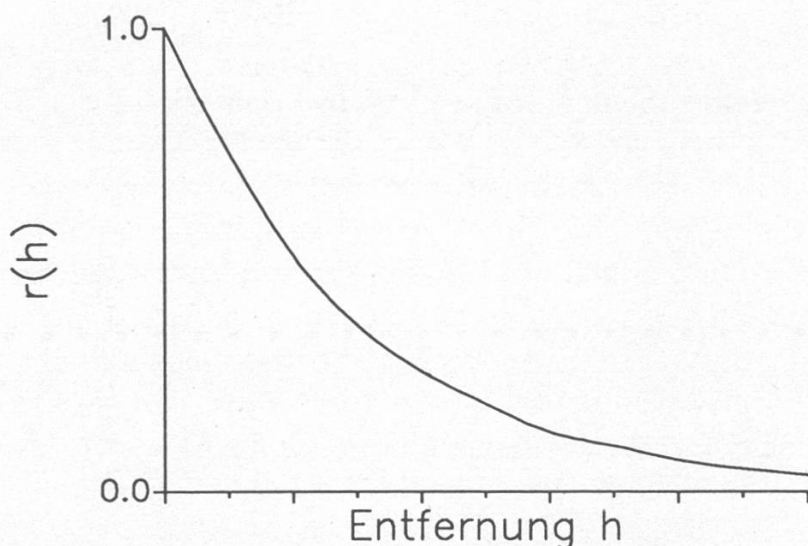
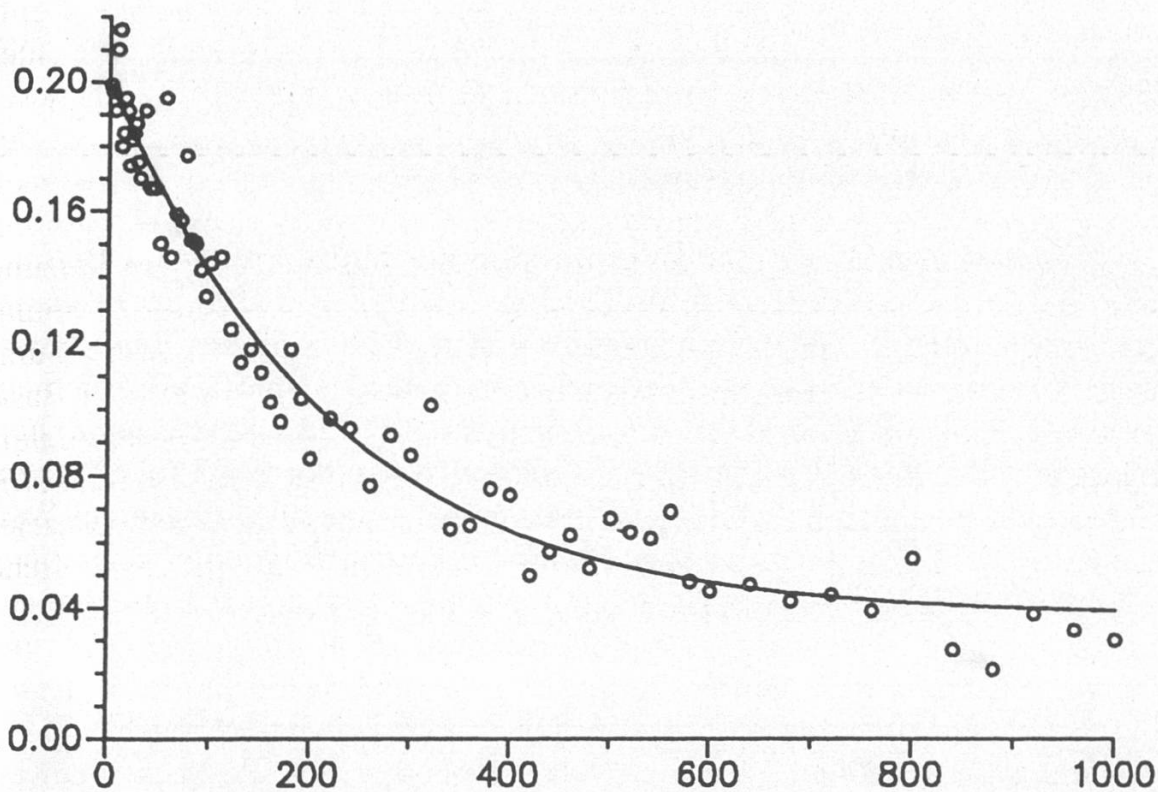


Abbildung 5.  
Beispiel für ein Korrelogramm.

Bei einer Entfernung  $h=0$  wird jedes Element mit sich selbst verglichen. Die Autokorrelation nimmt hier ihren Maximalwert 1 an. Mit zunehmender Entfernung sinken die Werte, da sich die Elemente immer unähnlicher werden. Die zugehörige Kovarianz  $c(h)$  ergibt sich, wenn das Korrelogramm  $r(h)$  mit der Populationsvarianz multipliziert wird. Derartige Kovarianzfunktionen sind in der Forstinventur vor allem im Zusammenhang mit Punktstichproben zur Waldflächenschätzung bekannt (Matérn 1986, Kleinn 1991). Je näher zwei Stichprobenpunkte beieinanderliegen, umso grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie derselben Kategorie («Wald» oder «Nicht-Wald») angehören, was sich in einem hohen Kovarianzwert  $c(h)$  äussert. *Abbildung 6* zeigt beispielhaft eine Kovarianzfunktion für die in *Abbildung 3* dargestellte Waldverteilungskarte.



*Abbildung 6.* Kovarianzfunktion  $c(h)$  für die Variable «Wald» für die in *Abbildung 3* gegebene Waldverteilungskarte. Die Punkte markieren die Ergebnisse von Simulationen, die durchgezogene Linie beschreibt beispielhaft den Verlauf einer nichtlinearen Ausgleichskurve.

Die räumliche Information, die in der Kovarianzfunktion enthalten ist, lässt sich völlig gleichwertig über das sogenannte Semi-Variogramm  $\gamma(h)$  ausdrücken:

$$\gamma(h) = c(0) - c(h) \tag{4}$$

mit  $c(0) =$  Populationsvarianz, ein Spezialfall der Kovarianz für  $h=0$ .

Das Semi-Variogramm ist Kernstück der Geostatistik, die in den 60er und 70er Jahren von Bergbau-Mathematikern zur Auswertung räumlich verteilter Daten entwickelt wurde (Matherón 1970, Journel und Huijbregts 1978) und derzeit auch in der Forstinventur zunehmendes Interesse findet (Ramirez-Maldonado 1988, Mandallaz 1992, Jost 1993). Das Semi-Variogramm stellt eine Differenzierung der Populationsvarianz nach der Entfernung zwischen den Populationselementen dar. Damit trägt es der Beobachtung Rechnung, dass die Gesamtvariation in autokorrelierten Populationen auf Grund von lokalen Ähnlichkeiten erst ab bestimmten Entfernungen erreicht wird. Unter solchen Bedingungen hat die klassische Varianz nur sehr beschränkten, lediglich summarischen Aussagewert. Aus den Daten einer Stichprobe wird das Semi-Variogramm über folgende Beziehung geschätzt:

$$\gamma(h) = \frac{E[z(x) - z(x+h)]^2}{2} \quad (5)$$

mit  $z(x)$ : Merkmalsausprägung am Punkt  $x$

$z(x+h)$ : Merkmalsausprägung am Punkt  $x+h$

Abbildung 7 zeigt das Semi-Variogramm des Holzvorrates am Beispiel einer Betriebsinventur. Bei dieser Inventur wurden Probekreise in einem Raster von 100 m x 200 m aufgenommen. Zur Schätzung des Semi-Variogramms wurden sukzessive die verschiedenen in der Stichprobe vorkommenden Entfernungen  $h$  (zum Beispiel  $h=100$  m,  $h=200$  m,  $h=223,6$  m usw.) herangezogen. Zu jeder Entfernung  $h$  wurden alle zugehörigen Probeflächenpaare in der Stichprobe gebildet und der jeweilige Semi-Variogramm-Wert über Formel (5) berechnet. Das Semi-Variogramm in *Abbildung 7* zeigt einen typischen Verlauf (Jost 1993): Es steigt bis zu einer bestimmten Entfernung  $a$ , der sogenannten Reichweite der Autokorrelation an (in *Abbildung 7* bei rund 1000 m). Stichprobenelemente, die weiter als  $a$  voneinander entfernt liegen, sind nicht mehr miteinander korreliert. Die oberhalb von  $a$  erreichte Maximalvarianz (in *Abbildung 7* bei rund 50 000 Einheiten) wird als Schwellenwert  $c$  bezeichnet.

Im nächsten Schritt der geostatistischen Auswertung wird der empirische Verlauf des Semi-Variogramms modelliert. Auf der Basis dieses Modells können Varianzen als mittlere Semi-Variogramm-Werte geschätzt werden. So entspricht zum Beispiel die klassische Stichprobenvarianz  $s^2$  dem mittleren Semi-Variogramm-Wert  $\bar{\gamma}(v, v)$  der Stichprobe  $v$  mit  $n$  Stichprobenelementen.

Der Wert  $\bar{\gamma}(v, v)$  wird hergeleitet, indem alle möglichen  $n^2$  Paare aus den Stichprobenelementen gebildet und die Semi-Variogramm-Werte der zugehörigen  $n^2$  Entfernungen gemittelt werden. Die Berechnung mittlerer Semi-Variogramm-Werte leitet also Varianzen her, indem sie das Semi-Variogramm mit den jeweiligen geometrischen Verhältnissen kombiniert.

Die Konsequenz dieses Vorgehens wird an einem einfachen, in *Abbil-*

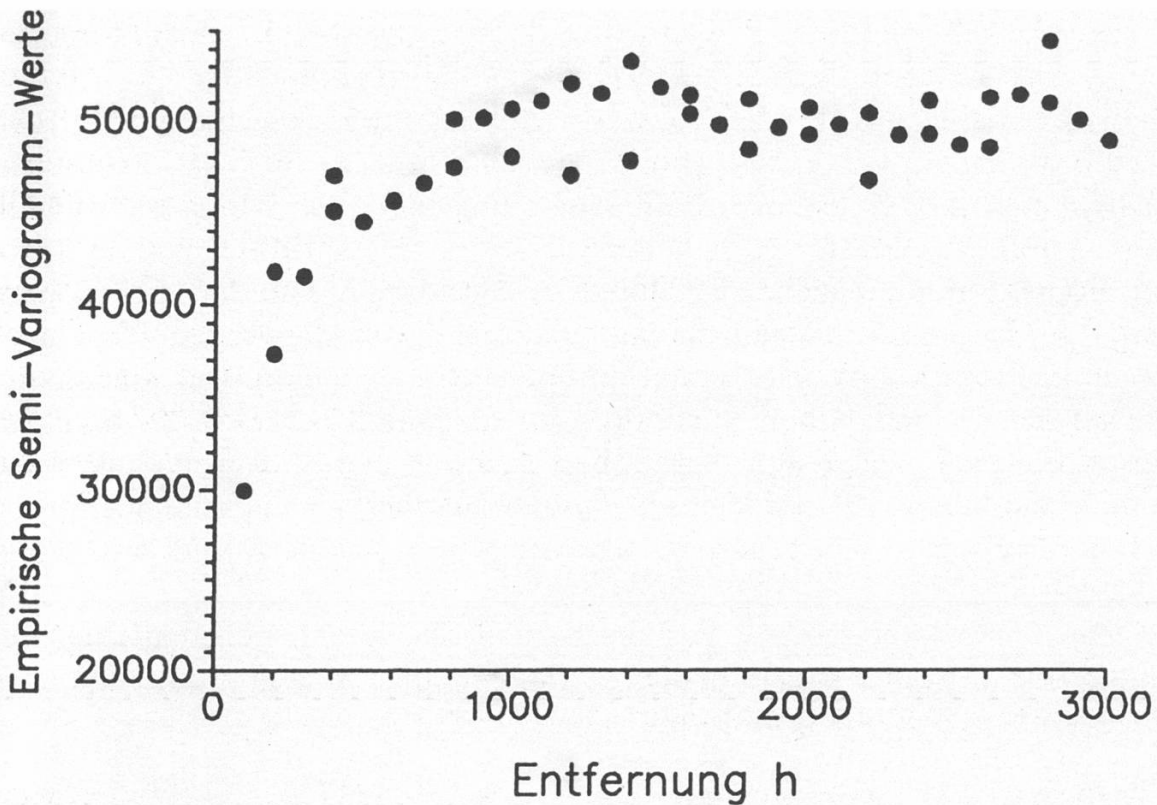


Abbildung 7. Empirisches Semi-Variogramm des Holzvorrates bei einer Betriebsinventur.

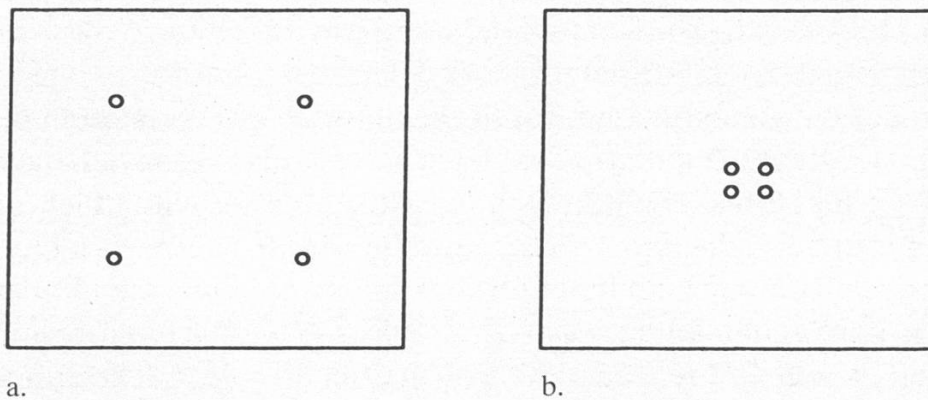


Abbildung 8. Anordnung systematisch verteilter Stichprobenelemente.  
*a.*: Gleichmässige Abdeckung, *b.*: Klumpung.

Abbildung 8 illustrierten Beispiel deutlich. In einer autokorrelierten Population soll eine Inventur mit einem Stichprobenumfang  $n=4$  durchgeführt werden. Verteilt man die Stichprobenelemente möglichst gleichmässig (Abbildung 8a), spielen die Ähnlichkeiten benachbarter Bereiche in der Population für die Stichprobe keine Rolle. Hier ist eine hohe Stichprobenvarianz zu erwarten. Diese Feststellung deckt sich damit, dass bei der Berechnung von  $\bar{\gamma}(v, v)$  nur relativ grosse Entfernungen, also grosse Semi-Variogramm-Werte eingehen. Anders ist dies im Fall aus Abbildung 8b. Die – zum Beispiel aus Kosten-

gründen – nahe beieinanderliegenden Stichprobenelemente sind stärker autokorreliert, die Stichprobenvarianz  $\bar{\gamma}(v, v)$  ist folglich gering.

Auf Grundlage dieser theoretischen Überlegung lässt sich die hohe Effizienz der systematischen Stichprobe in autokorrelierten Populationen leicht nachvollziehen. Durch die gleichmässige Abdeckung mit Mindestabständen werden hohe Varianzen innerhalb der Stichprobe erreicht, das heisst die Streuung zwischen den möglichen Stichprobenrealisationen, also der Stichprobenfehler, wird gering. Führt man die Fehlerschätzung auf klassischem Wege über die einfache Standardfehlerformel durch, wird der beschriebene statistische Vorteil der systematischen Stichprobe ins Gegenteil verkehrt, da man mit dieser Methode aus grossen Variationen innerhalb der Stichprobe auf grosse Stichprobenfehler schliesst. Gerade dann, wenn die systematische Stichprobe besonders effizient ist, eignet sich also die Standardfehlerformel am wenigsten, den «wahren» Fehler zu approximieren.

Mit den geostatistischen Verfahren lässt sich der Stichprobenfehler der Stichprobe  $v$  in der Population  $V$  für jedes beliebige Stichprobendesign nach der folgenden Beziehung schätzen:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 2 \bar{\gamma}(V, v) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (6)$$

Die geostatistischen Methoden führen – theoretisch betrachtet – zu erwartungstreuen Varianz- und Fehlerschätzungen. Praktisch gesehen gibt es jedoch Einschränkungen. Diese liegen vor allem darin begründet, dass das Semi-Variogramm nur aus einer Stichprobe abgeleitet werden kann. Auch mit den Verfahren der Geostatistik kann somit die unbekannte Population nicht vollständig beschrieben werden. Im Vergleich zu vielen anderen Schätzverfahren nutzt die geostatistische Fehlerrechnung jedoch einen wesentlich grösseren Teil der Information, die durch die Stichprobe bereitgestellt wird. Die Geostatistik orientiert sich stark an den Gegebenheiten des einzelnen Falles und ist damit den klassischen Methoden (zum Beispiel Zufallsfehlerformel, Paardifferenzen, Kreuzdifferenzen), die von pauschalen Voraussetzungen (zum Beispiel *random forest* bei der Zufallsfehlerformel) ausgehen, überlegen.

## 5. Ist der Erwartungswert verzerrt?

Bei der kritischen Würdigung von systematischen Stichproben und deren Gegenüberstellung mit anderen Stichprobenkonzepten taucht häufig die Argumentation auf, dass im Vergleich zu randomisierten Verfahren zwar geringere Stichprobenfehler erreicht werden könnten, dass jedoch die Tendenzfreiheit der Mittelwertschätzung nicht immer gewährleistet sei. Tendenzfreiheit ist aber eine der wesentlichen Eigenschaften, die bei Schätzungen aus

Stichproben vorausgesetzt werden: Ein Verfahren ist dann tendenzfrei, wenn der Erwartungswert des Schätzers mit dem Populationswert übereinstimmt, oder aber: Würde man die Stichprobennahme mit demselben Konzept oft wiederholen, so würden die jeweiligen Ergebnisse exakt um den *wahren* Wert streuen. Hierbei sind Mittelwert- und Varianzschätzung zu unterscheiden. Aus dem Vorangegangenen wird klar, dass eine tendenzfreie *Varianzschätzung* tatsächlich nicht möglich ist. Entscheidender jedoch ist die Tendenzfreiheit der Mittelwertschätzung, denn diese stellt das zentrale Element aller Ergebnisdarstellungen von Stichprobenerhebungen dar. In vielen Publikationen finden sich warnende Hinweise auf eine mögliche Verletzung der Tendenzfreiheit des Mittelwertes durch systematische Stichproben. Zum einen ist es dann aber verwunderlich, daß systematische Stichproben sich trotzdem zum Standardverfahren entwickelt haben, zum anderen sind den Verfassern keine publizierten Beispiele bekannt, in welchen tatsächlich die Tendenzfreiheit durch systematische Stichproben verletzt worden wäre. Häufig werden als Beispiel Grossrauminventuren in Regionen mit parallel verlaufenden Gebirgszügen genannt: Hier kann bei entsprechender Lage und Weite des Rasters ein überproportional hoher Anteil der Rasterpunkte beispielsweise in Tallagen fallen, dagegen nur sehr wenige in höhere Lagen (oder umgekehrt); die Schätzwerte aus der Inventur werden dann tatsächlich stark vom wahren Populationswert abweichen. Dies kann jedoch nicht als Verzerrung gewertet werden, sondern ist lediglich Ausdruck des Stichprobenfehlers, welcher in Regionen der genannten Art höher ist als in homogeneren Regionen.

Die Verfasser sehen keine Hinweise darauf, daß das Problem der Mittelwertverzerrung der Erwartungswertschätzung bei systematischen Stichproben gegeben ist. Das Problem scheint eher begrifflicher Natur zu sein: Bei den meisten angewendeten systematischen Stichproben handelt es sich nämlich im eigentlichen Sinne nicht um Stichproben vom Umfang 1, da Rasteranfangspunkt und -richtung nicht zufällig ausgewählt werden. Man sollte daher eher von systematischen *Aufnahmen* als von systematischen Stichproben sprechen. Es handelt sich dann nicht um ein Stichprobenverfahren im statistischen Sinne, sondern eher um eine *Messvorschrift*, deren Ergebnisse zwar eine Abweichung vom wahren Wert haben, aber keinen Stichprobenfehler. Die Grösse der Abweichung (Messfehler) bleibt aber bei einmaligen Beobachtungen unbekannt – wie grundsätzlich auch Verzerrung und Abweichung zwischen Stichprobenstatistik und Populationsparameter bei Stichprobenverfahren.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt haben sich im wesentlichen mit begrifflichen Fragen befasst und sich teilweise im Bereich der Stichprobenphilosophie bewegt. Wie stark die Ergebnisse systematischer Erhebungen dadurch beeinflusst werden, dass die Festlegung des Rasters nicht zufällig ist, kann nicht allgemein beantwortet werden, da auch hier eine starke Abhängigkeit von der Populationsstruktur bzw. auch von der Grösse des Untersuchungsgebietes besteht.

## Résumé

### Réflexions sur la planification et l'interprétation de relevés par échantillonnage systématique

Dans la pratique des inventaires forestiers, les relevés par échantillonnage systématique ont une importance considérable. Ce document traite certaines questions particulières qui se posent en relation avec la planification et l'interprétation de ce genre de relevés:

1. Propriétés statistiques de certaines formes de grilles (grilles triangulaires, carrées ou rectangulaires).
2. Les conséquences possibles sur l'erreur lors d'une définition non-aléatoire de l'orientation de la grille.
3. La méthode de différence par paires comme approche possible de l'approximation de l'erreur.
4. Les propriétés d'échantillons systématiques dans des populations autocorrélées.
5. La question du biais possible de l'espérance des estimateurs.

Traduction: *Christina Giesch*

## Literatur

- Cochran, W. G.* (1977): Sampling techniques. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 428 S.
- Jost, A.* (1993): Geostatistische Analyse des Stichprobenfehlers systematischer Stichproben. Mitteilungen der Abteilung für Forstliche Biometrie 93-1, 113 S.
- Journel, A. G., Huijbregts, Ch. J.* (1978): Mining Geostatistics. London: Academic Press. 600 S.
- Kendall, M. G., Moran, P. A. P.* (1963): Geometrical Probability. Griffin, London. 125 S.
- Kleinn, Ch.* (1991): Der Fehler von Flächenschätzungen mit Punkterastern und linienförmigen Stichprobenelementen. Mitteilungen der Abteilung für Forstliche Biometrie 91-1, Universität Freiburg, 128 S.
- Kleinn, Ch., Pelz, D. R.* (1992): Forest Area Estimates – Sampling Error and Classification Problems. Proceedings of the IUFRO S.4.02.05 International Workshop *Remote Sensing and World Forest Monitoring*, Pattaya, Thailand, 13–17 January 1992.
- Langsæter, A.* (1926): Om beregning av middelfeilen ved regelmessige linjetakseringer. (Über die Berechnung des Mittelfehlers des Resultates einer regelmässigen Linientaxierung). Meddr norske Skogfors Ves. 2(7): pp. 47.
- Lindeberg, J. W.* (1924): Über die Berechnung des Mittelfehlers des Resultates einer Linientaxierung. Acta Forestalia Fennica, Helsinki 1924(25) S. 1–22.
- Mandallaz, D.* (1992): Geostatistical Methods for Combined Forest Inventories. Proceedings of the IUFRO Centennial Meetings. Berlin/Eberswalde, 31.8.–6.9.1992.
- Matérn, B.* (1986, 1. Auflage 1960): Spatial Variation. 2nd. ed., Lecture Notes in Statistics No 36, Springer-Verlag, Berlin. 151 S.
- Matérn, B.* (1989): Precision of area estimation: a numerical study. Journal of Microscopy, Bd. 153, S. 269–284.
- Matherón, G.* (1970): La théorie des variables régionalisées et ses applications. Les cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fasc. 5. 212 S.
- Nyssönen, A., Kilkki, P., Mikkola, E.* (1967): On the precision of some methods of forest inventory. Acta Forestalia Fennica. 81: 1–60.
- Ramirez-Maldonado, H.* (1988): On the relevance of the geostatistical theory and methods to forest inventory problems. PhD thesis. Athens. University of Georgia. 163 S.

*Saborowski, J.* (1992): Ein Diskussionsbeitrag zum Thema: Systematische Stichproben in der Waldinventur. Allg. Forst- u. J.-Ztg., 163. Jg., 6: 107: 110.

*Wolter, M.* (1984): An Investigation of Some Estimators of Variance for Systematic Sampling. Journal of the American Statistical Association, Vol. 79, pp. 781–790.

*Verfasser:* Dr. Christoph Kleinn, Wissenschaftlicher Assistent, und Dr. Adelheid Jost, Freie Mitarbeiterin, Abteilung für Forstliche Biometrie, Universität Freiburg, Werderring 6, D-79085 Freiburg i. Br.