

Zeitschrift:	Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss forestry journal = Journal forestier suisse
Herausgeber:	Schweizerischer Forstverein
Band:	143 (1992)
Heft:	3
Artikel:	La loi de De Liocourt et la loi tronquée
Autor:	Chevrou, Robert B.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-765805

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La loi de De Liocourt et la loi tronquée

Par *Robert B. Chevrou*

FDK 568: UDK 57.01: 001.6

Présentation

Nous présentons une nouvelle loi de distribution des effectifs (nombres d'arbres) par catégories de diamètres, que nous avons nommée la loi tronquée, et nous montrons en quoi elle améliore la célèbre loi de De Liocourt.

La loi de De Liocourt, bien connue des forestiers de tous pays, est une loi de distribution des effectifs par catégories de diamètres. Elle dépend d'un paramètre sans dimension, que nous désignons ici par la lettre q , le « q -ratio» de nos collègues nord-américains; q doit être supérieur à 1. La loi de De Liocourt énonce que l'effectif d'une catégorie est égal à celui de la précédente divisé par q . Voir *Pardé et Bouchon*, 1988.

Il est apparu que cette loi de De Liocourt est inutilisable pour estimer, sur la base des résultats d'un inventaire, l'évolution des peuplements ou même seulement les coupes futures. Cela nous a conduits à rechercher, et à construire, une nouvelle loi de distribution des effectifs par catégories de diamètres, qui soit explicative et qui permette d'évaluer l'avenir des peuplements.

Cette nouvelle loi a été nommée la loi tronquée, au motif que l'âge des arbres et des peuplements est «tronqué sur la droite» par une valeur maximum, déterminée par l'aménagiste ou par l'environnement, qui dépend, bien entendu, des objectifs du forestier, de la nature de l'essence, du site, etc...

Cette loi tronquée dépend de deux paramètres sans dimension, que nous proposons de noter α et β , et d'un coefficient de proportionnalité M , directement lié à l'effectif total N .

La loi tronquée nous semble être très supérieure à la loi de De Liocourt: elle s'ajuste mieux aux observations; elle traduit bien les règles sylvicoles classiques; elle explique l'évolution passée du peuplement; et elle permet d'estimer son évolution future, notamment le rythme des coupes futures par catégories de diamètres.

Il semble utile de rappeler, dès l'introduction, que ni la loi de De Liocourt, ni la loi tronquée, ne sont des lois «parfaites», physiques ou biologiques, auxquelles seraient soumis les arbres et les peuplements forestiers. Ce ne sont que des modèles approximatifs, traduits par des formules mathéma-

tiques relativement simples, dépendant d'un faible nombre de paramètres.

Nous donnons, dans plusieurs annexes, les principales propriétés mathématiques de ces deux lois, propriétés dont le lecteur trouvera les démonstrations, ou parfois seulement les principes de base, dans l'article de *Chevrou*, 1990b.

En France, et dans quelques autres pays, il est d'usage d'adopter une largeur des catégories de diamètres de 5 cm, catégories que l'on désigne par leurs diamètres médians : on dit «les arbres de 20», pour désigner ceux de la catégorie numéro 4 ($4 = 20/5$), que nous appellerons, pour simplifier, la 4^{ème} catégorie, dont le diamètre médian est 20 cm. Nous généralisons l'exposé en notant u_i la largeur des catégories, le diamètre médian de la $i^{\text{ème}}$ catégorie étant égal au produit u_i , égal à 0 pour $i=0$.

La loi de De Liocourt (voir annexes 1 et 2)

La loi de De Liocourt est bien connue des statisticiens qui la présentent sous une forme différente et qu'ils nomment «loi géométrique». Il n'y a donc pas lieu d'insister sur les démonstrations de ses propriétés.

Considérons un peuplement forestier, couvrant une surface de 1 hectare, dont les effectifs par catégories de diamètres suivent une loi de De Liocourt de paramètre q .

Ce peuplement peut être décrit par diverses grandeurs globales: l'effectif total (toutes catégories de diamètres), noté N , le diamètre moyen de ces N arbres, noté \bar{d} , la surface terrière totale, notée G , et, bien sûr, entre autres choses, le paramètre q de De Liocourt. Nous avons montré que \bar{d} ne dépend que de q , et, réciproquement, q ne dépend que de \bar{d} . De même, le rapport G/N ne dépend que de q , et la valeur de q ne dépend que du rapport G/N .

Certains lecteurs se rappellent les normes adoptées autrefois, en France, pour les sapinières jardinées, la valeur de q étant de l'ordre de 1,3 pour les stations dites fertiles, de l'ordre de 1,5 pour les stations dites rudes; pour un diamètre de recensabilité égal à 18 cm, à ces deux valeurs (1,3 et 1,5) correspondent des diamètres moyens \bar{d} des arbres recensables: $\bar{d} = 20 + 5 / (q^{-1})$, soit respectivement 37 cm ($q = 1,3$) et 30 cm ($q = 1,5$). Voir annexe 1.

Si le paramètre q est considéré comme un indice représentatif du site ou de la sylviculture, alors le diamètre moyen \bar{d} , et le rapport G/N , doivent être considérés comme des indices tout aussi représentatifs du site ou de la sylviculture.

Pour q fixé, l'effectif total N , aussi bien que la surface terrière G , ne sont pas donnés par la loi de De Liocourt. Ils dépendent de facteurs non liés à cette loi. Aucune relation statistique intéressante ne semble avoir pu être établie entre le paramètre q et la valeur de N (ou celle de G). Si nous avons

montré que la valeur de q dépend fonctionnellement du rapport G/N (voir *annexe 1*), par contre, il peut ne pas exister de relation fonctionnelle, ni statistique, entre q et N , ni entre q et G . Les normes fixant N (ou G) selon la valeur de q , proposées et utilisées dans le passé, sont en fait basées sur la productivité du site, et ces normes ne résultent donc pas de la loi de De Liocourt. *Delord*, 1984, a d'ailleurs montré que, pour les sapinières et pessières de France, la valeur de q varie très peu du nord-est au sud, alors que l'on peut supposer qu'il y a quelque variation de la productivité.

On sait aujourd'hui que la productivité du site détermine l'accroissement du peuplement, par exemple l'accroissement de la surface terrière. Bien entendu, pour un accroissement donné, la valeur de N (comme celle de G), c'est-à-dire la densité du peuplement, influe sur l'accroissement diamétral moyen des arbres, mais pas obligatoirement sur la valeur de q .

La loi de De Liocourt n'apportant aucune information en ce qui concerne la valeur de l'effectif total N (ou la surface terrière G), nous considérons N comme un coefficient de proportionnalité et non comme un paramètre de la loi.

Quand on étudie un peuplement forestier donné, par exemple une futaie jardinée, on peut lui associer, de diverses façons, formule mathématique ou calcul statistique (voir *annexe 2*), une (ou plusieurs) valeur du paramètre q de De Liocourt; on peut ensuite constater que les effectifs observés des diverses catégories de diamètres s'ajustent bien à la loi de De Liocourt, ou, au contraire, s'en écartent notablement; si l'ajustement est convenable, on dira que ce peuplement est équilibré selon cette loi de De Liocourt. Il n'y a rien à ajouter, et la loi de De Liocourt est insuffisante pour juger l'évolution passée et l'avenir de ce peuplement.

Cette insuffisance a conduit divers auteurs à préconiser l'exécution d'un inventaire peu avant que le martelage ne soit effectué: ceci devait permettre de déterminer les effectifs à prélever dans les catégories de diamètres de façon à rapprocher, après la coupe des arbres marqués, le peuplement de la loi d'équilibre de De Liocourt. Il ne semble pas que les résultats ainsi obtenus aient été vraiment convaincants.

La loi tronquée (voir annexes 3 et 4)

La loi tronquée dépend de deux paramètres sans dimension, notés α et β , et d'un coefficient de proportionnalité M , directement lié à l'effectif total N , mais indépendant des paramètres α et β .

Il existe une relation fonctionnelle entre α , β et le diamètre moyen \bar{d} des N arbres du peuplement, et une autre entre α , β et le rapport G/N , où G est la surface terrière du peuplement (voir *annexe 3*).

Le paramètre α est lié au rythme du passage à la futaie.

Quand il prend des valeurs positives, alors le peuplement est présumé équilibré et:

- pour les plus petites catégories de diamètres, proches de 0, les valeurs relatives des effectifs des catégories se comportent approximativement selon une loi de De Liocourt de paramètre $q = 1+\alpha$; les effectifs des catégories supérieures décroissent beaucoup plus vite que ne le prévoit la loi de De Liocourt de paramètre égal à $1+\alpha$;
- quand la valeur du paramètre β devient très grande, la loi tronquée tend vers une loi de De Liocourt de paramètre $q = 1+\alpha$.

Quand α prend des valeurs négatives, en principe supérieures à -1 , on peut alors dire que le peuplement forestier concerné est déséquilibré (passage à la futaie insuffisant).

Le paramètre β de la loi tronquée est lié au diamètre moyen, βu , des arbres les plus âgés, d'âge connu ou inconnu.

Quand on étudie un peuplement forestier, par exemple une futaie jardinée, on peut lui associer, de diverses façons, en pratique par calcul statistique, une valeur du paramètre α , et une valeur du paramètre β . On constate, le plus souvent, au moins pour un massif (ensemble de parcelles), que les effectifs observés s'ajustent bien, ou assez bien, aux effectifs théoriques donnés par cette loi tronquée de paramètres α et β .

S'ils s'ajustent bien, et si α est positif, le peuplement est équilibré selon cette loi tronquée. S'ils ne s'ajustent pas, ou si α est négatif, le peuplement est considéré comme déséquilibré si l'on se réfère à la loi tronquée.

Si la valeur de α est négative, on peut présumer que la régénération n'a pas été suffisante dans un passé plus ou moins lointain, d'autant plus lointain que le diamètre de recensabilité est plus élevé; il serait donc souhaitable d'adopter un diamètre de recensabilité assez petit si l'on veut juger la sylviculture du passé proche; il se peut aussi que les aménagistes aient, dans le passé, modifié notablement les objectifs et réduit l'effort de régénération, par exemple en augmentant l'âge d'exploitabilité.

Si la valeur de α est positive ou nulle, on peut présumer que le peuplement se trouve dans un état d'équilibre dynamique, qui peut se maintenir si l'effort de régénération, et le passage à la futaie, sont poursuivis sur le même rythme.

Le produit βu est égal au diamètre moyen des arbres les plus âgés, ceux atteignant l'âge d'exploitabilité par exemple. Cette valeur βu serait le diamètre moyen des arbres d'un peuplement équienne atteignant l'âge maximum a_{\max} fixé par l'aménagiste.

Entre autres exemples, nous avons ajusté la loi tronquée aux résultats publiés par l'inventaire forestier national français pour l'épicéa et le sapin des pessières et sapinières du massif du Jura (France). Les 17 peuplements étu-

diés sont formés de mélanges de futaies régulières et irrégulières, et leurs volumes totaux vont de 400 000 m³ à plusieurs millions de m³. Il est apparu que:

- l'estimation β_u dépasse parfois 60 cm dans les forêts de l'Etat et des collectivités (forêts soumises), et l'on sait que nos ancêtres aimait y cultiver de très gros bois;
- l'estimation β_u est souvent très inférieure à 40 cm en forêt privée, ce qui semble correspondre à ce que nous savons de la gestion de ces forêts où les âges et les diamètres d'exploitabilité sont, en général, très inférieurs à ceux des forêts soumises;
- la valeur estimée de α est, le plus souvent, positive en forêt soumise, et elle semble traduire une sylviculture active avec des éclaircies relativement fortes;
- la valeur estimée de α est, le plus souvent, proche de 0 en forêt privée, voire négative ce qui laisserait à penser que la régénération aurait pu être quelque peu négligée dans un passé plus ou moins lointain.

Par décomposition de la formule exprimant la loi tronquée, il est possible de construire deux modèles, que nous avons notés H1 et H2 (*annexe 3*), et qui dépendent de l'âge. Ces modèles permettent d'ajouter à la loi tronquée un troisième paramètre, que nous proposons de noter c , qui représente une durée de temps, le temps nécessaire pour que le diamètre moyen des arbres de même âge augmente de u cm. Autrement dit, le rapport u/c est égal à l'accroissement diamétral annuel moyen des arbres de même âge.

La valeur du paramètre c peut être estimée sur la base de l'accroissement observé, par exemple l'accroissement total annuel en surface terrière.

Selon la loi tronquée, quand α est positif, l'accroissement diamétral annuel moyen des arbres appartenant à une même catégorie de diamètres augmente quand le diamètre augmente. Pour présenter cette propriété sous une autre forme, nous évoquerons, à titre de souvenir et en hommage à nos ancêtres, la notion quelque peu ambiguë de temps de passage, qui est «la durée de temps nécessaire pour que le diamètre moyen des arbres d'une même catégorie de diamètres augmente de u cm (5 cm en France)». Ce temps de passage décroît quand le diamètre augmente (voir un exemple en *annexe 6*), ce qui semble conforme à l'expérience séculaire.

Des modèles H1 et H2 on peut déduire l'âge moyen des arbres appartenant à une même catégorie de diamètres (voir *annexe 5*). La dispersion des âges des arbres d'une même catégorie est déterminée par les modèles H1 et H2; elle correspond, par exemple, aux «règles» suivantes en futaie jardinée:

- ne pas conserver les vieux petits bois, et maintenir leur proportion à un niveau très faible (quelques pourcents tout au plus);
- ne pas prélever trop tôt les jeunes gros bois, un prélèvement précoce ayant pour effets de régulariser et vieillir le peuplement, et de réduire la production moyenne annuelle par le jeu de ce vieillissement.

Le paramètre c permet en outre de déterminer la coupe annuelle par classe d'âges et par catégorie de diamètres qui permettra, quand α est positif et le peuplement équilibré, de conserver ce peuplement dans le même état d'équilibre, ou de le conduire vers un autre état d'équilibre en modifiant α ou β , ou α et β .

Pour α et β fixés, donc pour un âge d'exploitabilité a_{\max} fixé, égal à βc , la production totale en surface terrière est proportionnelle à M/c .

Si l'on considère cette production totale comme une constante caractéristique de l'essence sur le site considéré, on peut voir que c varie proportionnellement à M : Si l'on augmente M , donc l'effectif total N , la surface terrière G , et la densité du peuplement, la valeur de c augmente, ce qui a pour effet d'augmenter les temps de passage, et de réduire les accroissements diamétraux; inversement, si l'on réduit M , N , G , et la densité du peuplement, on réduit aussi c , et on augmente les accroissements diamétraux.

Rappelons que nous avons montré qu'il existe une relation fonctionnelle entre α , β et le rapport G/N (*annexe 3*), mais il n'en découle aucune relation fonctionnelle ou statistique entre α , β et N , ni entre α , β et G .

Enfin, si l'on cherche à rendre maximum la production annuelle moyenne, soit en surface terrière, soit en volume, soit en revenu financier, il peut en découler une relation, mathématique ou statistique selon le cadre concerné, entre les paramètres α et β .

Loi tronquée versus loi de De Liocourt

La loi tronquée nous paraît être de beaucoup supérieure à celle de De Liocourt pour de nombreuses raisons, dont les propriétés suivantes:

La loi tronquée s'ajuste bien aux données observées, tant pour les peuplements réguliers équiennes (tous âges regroupés) que pour les autres peuplements, et beaucoup mieux que ne le fait la loi de De Liocourt. Il est vrai que la première contient deux paramètres (α et β) et la seconde un seul (q), ceci n'expliquant cela que partiellement, car l'amélioration est très supérieure à ce que l'on pourrait attendre de l'ajout d'un paramètre.

La loi tronquée décrit globalement le passage à la futaie passé, donc l'effort de régénération d'un passé plus ou moins lointain selon le diamètre de recensabilité adopté.

Elle permet d'estimer les prélèvements futurs par le jeu du paramètre supplémentaire c relié à l'accroissement des arbres et du peuplement.

Pour une production totale donnée ou observée, la densité du peuplement (effectif total N et surface terrière G) détermine la valeur de c , c'est-à-dire les valeurs des accroissements diamétraux.

La loi tronquée décrit certaines des caractéristiques des peuplements de manière assez proche de ce que les forestiers peuvent déduire de leur expérience multi-séculaire et des travaux de la recherche forestière.

Elle se conforme bien aux règles sylvicoles établies dans le passé pour conserver l'équilibre des futaies jardinées, règles qui n'ont pas toujours été convenablement appliquées et qui ne s'adaptent peut-être pas bien à la loi de De Liocourt.

La loi tronquée établit un lien entre les peuplements réguliers équiennes et les peuplements irréguliers, notamment la futaie jardinée (*annexe 6*). Nous espérons que ce lien aidera à réduire quelque peu les divergences s'exprimant aujourd'hui entre partisans et adversaires des traitements de futaie régulière et de futaie jardinée (*De Turckheim, 1990, Dubourdieu, 1990, Houllier et Peyron, 1991*). Un tel lien n'existe évidemment pas avec la loi de De Liocourt.

Ce lien nous a conduit à préconiser l'emploi d'un nouveau critère, qui pourrait remplacer celui, simpliste et ambigu, de «diamètre d'exploitabilité» en futaie jardinée, utilisé en France en relation avec la loi de De Liocourt. Ce nouveau critère est la valeur de β_u , qui est égale au diamètre moyen des arbres les plus âgés, par exemple ceux atteignant l'âge d'exploitabilité a_{max} , égal à βc .

Perspectives d'avenir et conclusion

A l'origine, c'est-à-dire en 1984, la loi tronquée a été conçue en vue de l'utilisation des données de l'inventaire forestier national français, et de l'estimation des coupes potentielles futures dans les peuplements forestiers.

Les propriétés de la loi tronquée ont permis de construire de nouveaux modèles d'évolution des futaies régulières équiennes, un modèle de sylviculture (taux d'éclaircie), et de simuler l'évolution globale des peuplements comme montré par Chevrou, 1991.

On peut espérer que ces résultats permettront de valoriser un peu plus les données récoltées par les inventaires forestiers nationaux, et, plus généralement, celles de tout inventaire, notamment celles des inventaires d'aménagement.

On pourrait essayer d'établir des «normes» pour les paramètres α et β , de même qu'on a essayé de le faire pour le paramètre q de De Liocourt. Nous n'y croyons pas trop, car les valeurs données à α et β traduisent, en forêt aménagée, tout autant les intentions de l'aménagiste que les conditions de site.

Nos travaux conduisent à suggérer, sous toutes réserves, les «normes» provisoires suivantes, compte tenu de ce que $u = 5$ cm:

- Sylviculture dynamique avec éclaircies fortes: $\alpha = 0,15$; $\beta = 7$ à 9.

- Peuplements relativement clairs sans éclaircies: α positif proche de 0; $\beta = 5$ à 7.

Ces «normes» nous semblent d'ailleurs traduire, peu ou prou, les deux grandes tendances actuelles de la sylviculture française, mais il ne faut pas oublier que les paramètres α et β ne déterminent pas la densité du peuplement.

Il n'est pas douteux que la loi tronquée simplifie exagérément l'évolution d'un peuplement. Il s'agit d'un outil d'aménagiste pour travailler globalement au niveau d'une région, d'un massif, ou d'une forêt (Chevrou, 1990a et 1990b, donne 2 exemples pour des forêts ne couvrant qu'une centaine d'hectares). Au niveau de la parcelle forestière, ou de la placette d'inventaire, la loi tronquée semble inadaptée, mais on peut utiliser les modèles dérivés de cette loi en association avec d'autres modèles spécifiques (Chevrou, 1986) comme nous l'avons montré (Chevrou *et al.*, 1988).

Dans cette optique d'aménagement, la loi tronquée pourrait s'avérer être un outil plus général d'usage et plus performant que les outils existants, notamment ceux qui utilisent les classes d'âges et qui ne concernent que les peuplements équiennes. D'ailleurs, nos travaux nous conduisent à mettre en doute la pertinence de cette variable à priori sans mystère: l'âge d'un peuplement. Ainsi rejoignons-nous d'autres auteurs, comme Maugé, 1987.

Cependant, après le rejet de la loi de De Liocourt par certains de nos collègues, on peut craindre que cette nouvelle distribution des effectifs par catégories de diamètres puisse avoir quelque mal à se voir adopter, même après qu'elle ait été vérifiée, contrôlée et testée comme nous l'avons fait sur une multitude de données, et comme d'autres devront le faire pour en confirmer la validité.

Zusammenfassung

Das Gesetz von De Liocourt und das «loi tronquée»

Das Gesetz von De Liocourt, ein Stammzahl-Verteilungsgesetz nach Durchmesserstufen, hängt von einem dimensionslosen Parameter ab, der mit q bezeichnet wird und grösser als 1 sein muss. Es besagt, dass die Stammzahl einer Durchmesserstufe gleich der Stammzahl der vorherigen Durchmesserstufe dividiert durch q ist.

Das Gesetz von De Liocourt ist unbrauchbar, um auf Grund von Inventurresultaten die Bestandesentwicklung oder nur schon die zukünftigen Nutzungen zu schätzen. Wir haben deshalb ein neues Stammzahl-Verteilungsgesetz nach Durchmesserstufen gesucht und entworfen, das interpretierbar ist und die vergangene und zukünftige Bestandesentwicklung schätzbar macht. Dieses Gesetz wird «loi tronquée» (etwa «gestutztes Gesetz») genannt.

Dieses «loi tronquée» hängt von 2 dimensionslosen Parametern, die wir vorschlagen α und β zu nennen, und von einem Proportionalitätsfaktor M, der direkt von der totalen Stammzahl N abgeleitet wird, ab (vgl. *annexe 3*, formule 6).

Das «loi tronquée» scheint uns dem Gesetz von De Liocourt weit überlegen: es passt sich besser den Inventurdaten an; es deckt sich mit den klassischen waldbaulichen Gesetzmässigkeiten; es erklärt die Vergangenheit des Bestandes, und es erlaubt die zukünftige Bestandesentwicklung – insbesondere den Durchforstungsrhythmus in jeder Durchmesserstufe – abzuschätzen.

Übersetzung: *Adrian Lanz*

Bibliographie

- Chevrou, R.B.*, 1986: Modélisation de l'évolution des peuplements forestiers à partir des données de l'IFN. 18ème Congrès mondial IUFRO. Ljubljana, Yougoslavie.
- Chevrou, R.B.*, 1990a: La loi tronquée de De Liocourt, Ann Sci For (1990) 47, 229–239.
- Chevrou, R.B.*, 1990b: De Liocourt's law and the truncated law, Can. J. For. Res. 20: 1933–1946.
- Chevrou, R.B.*, 1991: Utilisation de la loi tronquée: calcul de l'évolution globale des peuplements forestiers, Rev. For. Fr., accepté en avril 1991.
- Chevrou, R.B., Guéro, M.-C., Houllier, F.*, 1988: Utilisation des résultats et des données brutes de l'inventaire forestier national, Inventaire Forestier National.
- Delord, J.-M.*, 1984: Sapinières et pessières de France, Inventaire Forestier National, Lyon, étude non publiée disponible, 34 p.
- De Turckheim, B.*, 1990: L'intensité en sylviculture; quelques réflexions sur l'orientation de la gestion de nos forêts, Rev. For. Fr., XLII – 5.
- Dubourdieu, J.*, 1990: Futaie régulière et futaie jardinée, Rev. For. Fr., XLII – 6.
- Houllier, F., Peyron J.-L.*, 1991: A propos de l'article de B. de Turckheim, Rev. For. Fr. XLIII – 1.
- Maugé, J.-P.*, 1987: Le pin maritime premier résineux de France, Institut pour le développement forestier, Paris.
- Pardé, J., Bouchon, J.*, 1988: Dendrométrie, 2e édition, ENGREF, Nancy.

Auteur: Robert B. Chevrou, 21 rue Clair Soleil, F-34 430 Saint-Jean-de-Védas.

Annexe 1: Quelques propriétés de la loi de De Liocourt

Soit un peuplement couvrant 1 ha, équilibré selon la loi de De Liocourt. Soit u la largeur des catégories de diamètres, q le paramètre de De Liocourt qui doit être supérieur à 1, d_i le diamètre médian de la $i^{\text{ème}}$ catégorie, égal au produit u_i , et NL_i le nombre d'arbres (ou effectif) de cette catégorie; la loi de De Liocourt s'exprime par:

$$(1) \quad NL_i = NL_{i-1} / q \quad (\text{loi de De Liocourt})$$

Il en résulte la relation suivante:

$$(2) \quad NL_i = NL_k / q^{i-k}$$

Nous supposons maintenant que le diamètre de recensabilité est égal à $k u$, et que la première catégorie prise en compte est la $k^{\text{ème}}$.

N est l'effectif total, égal à la somme des NL_i :

$$(3) \quad N = NL_k q / (q - 1)$$

Soit \bar{d}_k le diamètre moyen de ces N arbres:

$$(4) \quad \bar{d}_k = ku + u / (q - 1)$$

et:

$$(4a) \quad q = 1 + u / (\bar{d}_k - ku)$$

G est la surface terrière totale, pour un diamètre de recensabilité égal à 0:

$$(5) \quad G = (\pi/4) u^2 N (q + 1) / (q - 1)^2 \quad (\text{pour } k = 0)$$

NB 1: Si la dernière catégorie de diamètres, notée m , regroupe les effectifs des arbres de très grands diamètres (l'inventoriste écrit «diamètre mu et +»), il faut modifier les formules (2) à (5).

NB 2: Si l'on néglige les effectifs des catégories de diamètres au-delà de la $m^{\text{ème}}$, sans les regrouper dans cette dernière catégorie, il faut modifier les formules (3) à (5): voir Chevrou, 1990b.

Annexe 2: Ajustement de la loi de De Liocourt aux observations

Soit un peuplement forestier observé: l'effectif observé dans la $i^{\text{ème}}$ catégorie de diamètres est No_i ; le volume moyen observé des arbres de cette catégorie est v_i et le volume total y est $Vo_i = No_i v_i$; l'effectif total observé est N , somme des No_i .

Pour ajuster une loi de De Liocourt à ce peuplement, il faut estimer le paramètre q de De Liocourt et diverses méthodes peuvent être utilisées pour obtenir:

Une première valeur q_0 , d'après la formule (4a); ou la valeur q_1 , obtenue à partir de q_0 par itération selon la méthode décrite par Chevrou, 1990b; une autre valeur q_2 , qui rend minimum la somme des carrés des écarts entre les effectifs observés No_i et les effectifs théoriques NL_i ; ou encore la valeur q_3 , qui rend minimum la somme des carrés des écarts entre les volumes observés $Vo_i = No_i v_i$ et les volumes théoriques $NL_i v_i$; et d'autres valeurs encore.

Le tableau I et la figure 1 en donnent un exemple.

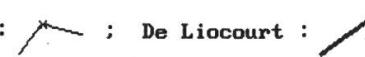
Les données du tableau I donnent les estimations suivantes:

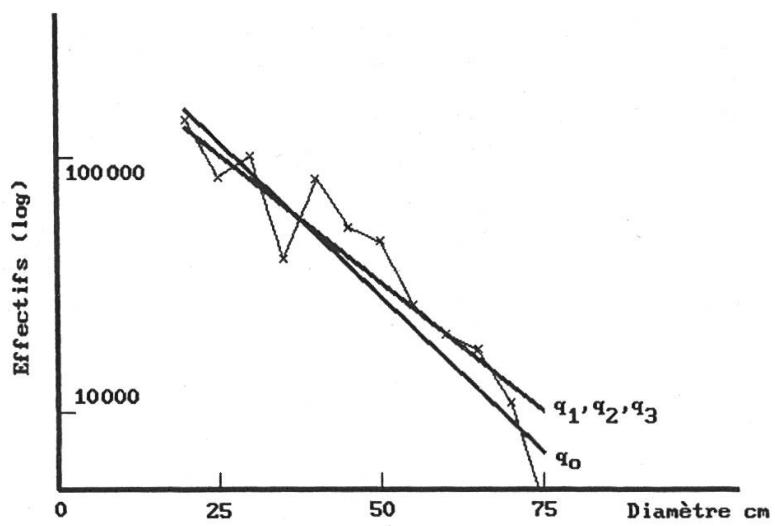
$$q_0 = 1,323; q_1 = 1,253; q_2 = 1,261; q_3 = 1,265: \quad \text{voir figure 1.}$$

Tableau I: France – Doubs – forêts communales – Pessières région Haut Jura – épicéa et sapin; 1982 – Source IFN.

Diamètres cm	Effectifs	Volumes Totaux m^3
20	141 383	31 549
25	84 097	33 791
30	100 995	76 111
35	40 201	41 289
40	82 378	128 630
45	52 953	108 135
50	47 350	120 459
55	26 497	84 476
60	20 315	82 812
65	17 656	90 399
70	10 907	59 834
75	4 074	22 018
Totaux :	628 806	879 503

Figure 1 : France - Doubs - forêts communales - Pessières -
région Haut Jura - épicéa et sapin - IFN 1982

Effectifs observés :  ; De Liocourt : 



Annexe 3 : Quelques propriétés de la loi tronquée (selon Chevrou, 1990 b)

Soit un peuplement couvrant 1 ha, équilibré selon la loi tronquée. Soit u la largeur des catégories de diamètres, α et β les paramètres de la loi tronquée, d_i le diamètre médian de la $i^{\text{ème}}$ catégorie, égal au produit u_i , et Nt_i le nombre d'arbres (ou effectif) de cette catégorie; la loi tronquée s'exprime comme suit:

$$(6) \quad Nt_i = \frac{1}{1+\alpha} [Nt_{i-1} - \alpha M e^{-(1+\alpha)\beta} \beta^i / i!] \text{ pour } i > 0$$

$$Nt_0 = \frac{\alpha M}{1+\alpha} [1 - e^{-(1+\alpha)\beta}] \quad \text{pour } i = 0$$

M est un coefficient de proportionnalité, chacun des Nt_i étant proportionnel à M .

Pour simplifier les formules qui suivent, nous supposons que le diamètre de recensabilité est 0.

L'effectif total, N , égal à la somme des Nt_i , est:

$$(7) \quad N = M (1 - e^{-\alpha\beta})$$

Le diamètre moyen de ces N arbres est \bar{d} :

$$(8) \quad \bar{d} = \frac{u}{\alpha} [1 - \alpha \beta \frac{e^{-\alpha\beta}}{1 - e^{-\alpha\beta}}]$$

La surface terrière totale est G:

$$(9) \quad G = \frac{\pi}{4} u^2 N \left[\frac{2+\alpha}{\alpha^2} - \beta \left(\frac{2+\alpha}{\alpha} + \beta \right) \frac{e^{-\alpha\beta}}{1-e^{-\alpha\beta}} \right]$$

La loi tronquée peut être dérivée des deux modèles H1 et H2 suivants qui peuvent décrire aussi bien l'évolution dans le temps d'un peuplement régulier équienne, que la structure des âges des arbres d'un peuplement irrégulier:

$$(10) \quad H1 : N(a, *) = \frac{\alpha M}{c} e^{-\alpha a/c} \quad : \text{Nombre des arbres d'âge } a;$$

$$(11) \quad H2 : N(a, i) = N(a, *) e^{-a/c} \frac{(a/c)^i}{i!} \quad : \text{Nombre des arbres d'âge } a \text{ dans la } i^{\text{ème}} \text{ catégorie de diamètres}$$

où le paramètre c représente une durée de temps.

La variable a, représentant l'âge, est limitée par une valeur maximum $a_{\max} = \beta c$.

De ces deux modèles H1 et H2, on déduit la loi tronquée, formules (6), et les propriétés supplémentaires suivantes:

L'accroissement diamétral annuel moyen des arbres de même âge a est $\Delta d(a)$:

$$(12) \quad \Delta d(a) = u/c$$

Le diamètre moyen des arbres de même âge a est $\bar{d}(a)$:

$$(13) \quad \bar{d}(a) = u a/c \quad \text{et : } \bar{d}(a_{\max}) = \bar{d}(\beta c) = \beta u$$

La surface terrière des arbres de même âge a est $G(a)$:

$$(14) \quad G(a) = \frac{\pi}{4} u^2 N(a, *) (a/c) (1 + a/c)$$

L'accroissement annuel moyen des arbres de la $i^{\text{ème}}$ catégorie de diamètres est $\Delta d(i)$:

$$(15) \quad \Delta d(i) = (u/c) Nt_{i-1}/Nt_i \quad \text{et : } \Delta d(0) = (1 + \alpha) u/c$$

et le temps de passage tp_i pris ici égal à $u / \Delta d(i)$:

$$(16) \quad tp_i = c Nt_i/Nt_{i-1} \quad \text{et : } tp_0 = c/(1 + \alpha)$$

La production totale en surface terrière à l'âge $a_{\max} = \beta c$ est $F(\beta c)$:

$$(17) \quad F(\beta c) = \frac{\pi}{2} u^2 \frac{M}{c} \frac{1 + \alpha/2}{\alpha} [1 - (1 + \frac{\alpha \beta}{1 + \alpha/2}) e^{-\alpha \beta}]$$

Les prélevements annuels sont les suivants, quand α est supérieur ou égal à 0.

Le prélevement annuel dans la $i^{\text{ème}}$ catégorie de diamètres est noté T_i :

$$(18) \quad T_i = (Nt_{i-1} - Nt_i)/c \quad \text{pour } i > 0$$

$$(18a) \quad T_0 = \frac{\alpha M}{c(1+\alpha)} [\alpha + e^{-(1+\alpha)\beta}] \quad \text{pour } i = 0$$

L'effectif total prélevé annuellement est T , somme des T_i , égal à $\alpha M / c$.

Le diamètre moyen de ces T arbres est \bar{d}_r :

$$(19) \quad \bar{d}_r = (u/\alpha) (1 - e^{-\alpha \beta})$$

Le taux de prélevement en nombre parmi les arbres de même âge a est approximativement égal à α/c :

$$(20) \quad [N(a, *) - N(a+1, *)] / N(a, *) \cong \alpha/c$$

Le taux d'éclaircie annuel moyen à l'âge a est $e(a)$; c'est le rapport de la surface terrière prélevée sur l'accroissement en surface terrière à cet âge:

$$(21) \quad e(a) = \frac{\alpha a}{2 c} \left[\frac{(a/c) + 1}{(a/c) + (1/2)} \right]$$

$e(a)$ est approximativement proportionnel à l'âge a.

Toutes les démonstrations et d'autres propriétés sont données par Chevrou, 1990b.

Annexe 4: Ajustement de la loi tronquée aux observations

Soit un peuplement forestier observé: l'effectif observé dans la $i^{\text{ème}}$ catégorie de diamètres est No_i ; le volume moyen observé des arbres de cette catégorie est v_i et le volume total y est $Vo_i = No_i v_i$; l'effectif total observé est N , somme des No_i .

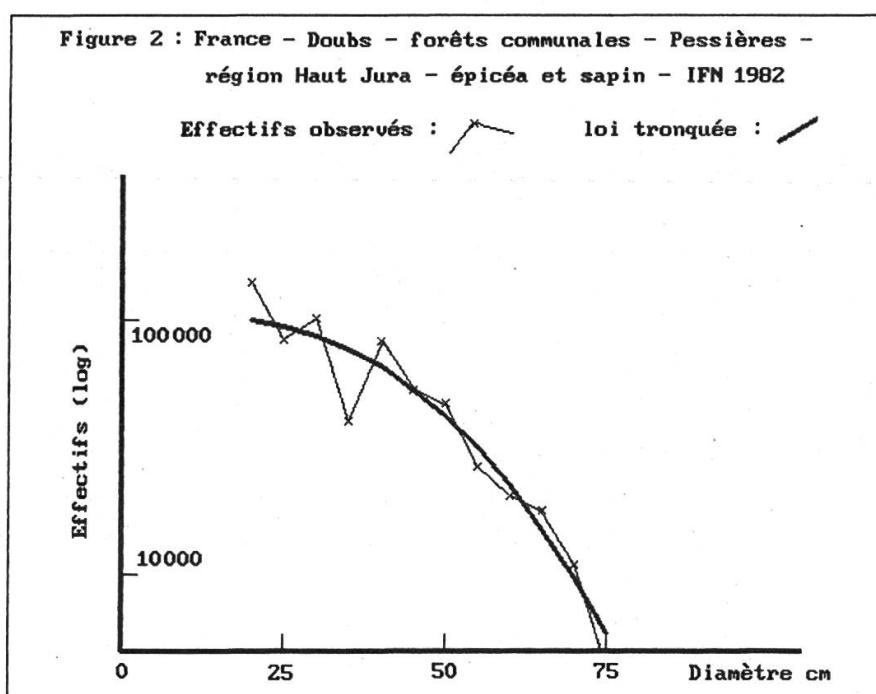
Pour ajuster une loi tronquée à ce peuplement, il faut estimer les paramètres α et β , et diverses méthodes peuvent être utilisées. Chevrou, 1990a et 1990b, suggère d'adopter les estimations α et β qui rendent minimum la

somme des carrés des écarts entre les volumes observés V_{O_i} et les volumes théoriques égaux à $Nt_i v_i$. La qualité de l'ajustement dépend aussi du diamètre de recensabilité retenu; en voir des exemples dans Chevrou, 1990b.

Le paramètre c est estimé par l'égalité entre l'accroissement annuel total en surface terrière observé et la valeur théorique $F(\beta c)$ donnée par la formule (17).

La figure 2, construite d'après le tableau I de l'annexe 2, donne un exemple d'ajustement des paramètres α et β de la loi tronquée.

Les estimations suivantes de α et β rendent minimum la somme des carrés des écarts entre les volumes observés V_{O_i} et les volumes théoriques $Nt_i v_i$. Nous avons trouvé: $\alpha = 0,0445$ et $\beta = 10,546$.



Annexe 5: Les âges par catégories de diamètres selon la loi tronquée

L'âge moyen des arbres de la $i^{\text{ème}}$ catégorie de diamètres est noté $\bar{a}(i)$:

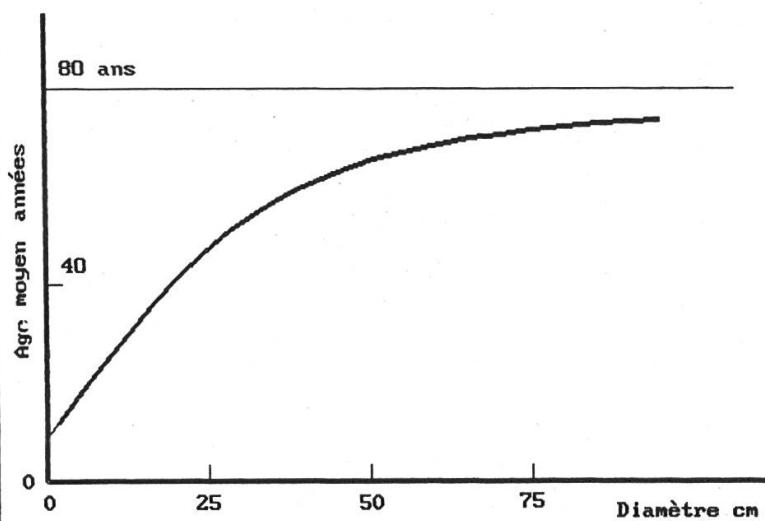
$$(22) \quad \bar{a}(i) = c(i+1) Nt_{i+1} / Nt_i$$

La figure 3 montre comment l'âge moyen des arbres de même diamètre évolue en fonction du diamètre.

Un autre exemple (sapinière particulière du Pays-de-Sault) est donné par Chevrou, 1990a.

Figure 3 : Age moyen par catégorie de diamètres
selon la loi tronquée

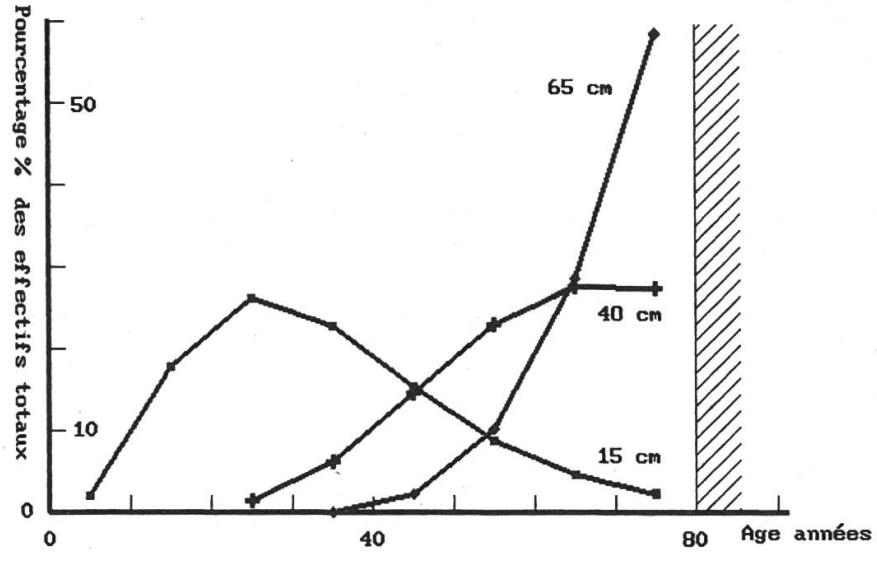
$$u = 5 \text{ cm} ; c = 10 \text{ ans} ; \alpha = 0,15 ; \beta = 8 ; \beta c = 80 \text{ ans}$$



La figure 4 montre, pour plusieurs catégories de diamètres, les proportions des arbres des différents âges par rapport à l'effectif total de la catégorie, selon les modèles H1 et H2 de l'annexe 3.

Figure 4 : Effectifs relatifs par âge
dans une même catégorie de diamètres

$$u = 5 \text{ cm} ; c = 10 \text{ ans} ; \alpha = 0,15 ; \beta = 8 ; \beta c = 80 \text{ ans}$$



On y voit que les vieux petits bois existent, mais en très faible proportion, de même que les jeunes gros bois existent en proportion notable.

Annexe 6 : Lien entre futaie régulière équienne et futaie jardinée selon la loi tronquée

Valeurs des paramètres: $u = 5 \text{ cm}$; $c = 10 \text{ ans}$; $\alpha = 0,15$; $\beta = 8$. L'accroissement diamétral moyen des arbres de même âge est $u/c = 5 \text{ mm/an}$.

Le tableau II est construit à partir des formules (10) à (14), le tableau III à partir des formules (6), (16) et (18) de l'annexe 3.

Noter que $N(a,*) = N(0,*) e^{-\alpha a/c}$.

Pour nous référer à l'hectare, nous avons pris :

- en futaie régulière équienne: $\alpha M/c = N(0,*) = 1000/\text{ha}$;
- en futaie jardinée: $\alpha M/c = 12,5 / \text{ha} = 1000/\beta c$.

Tableau II: Futaie régulière équienne de 1 ha. Age d'exploitabilité = $\beta c = 80 \text{ ans}$, $N = \text{effectifs/ha}$, $\bar{d}(a) = \text{diamètre moyen à l'âge } a$, $G(a) = \text{surface terrière à l'âge } a$

âge	N	$\bar{d}(a) \text{ cm}$	$G(a) m^2$
0	1000	0	0
10	861	5	3,38
20	741	10	8,73
30	638	15	15,02
40	549	20	21,55
50	472	25	27,82
60	407	30	33,53
70	350	35	38,48
80	301	40	42,58

NB: diamètre de recensabilité égal à 0.

Tableau III: Futaie jardinée de 1 ha $\beta_u = 40$ cm; N = effectifs/ha; T = effectifs coupés en 10 ans; tp = temps de passage

D cm	N	T	tp ans
0	108,68	16,32	8,70
5	94,42	14,26	8,69
10	81,75	12,67	8,66
15	70,15	11,60	8,58
20	59,13	11,02	8,43
25	48,42	10,71	8,19
30	38,10	10,32	7,87
35	28,56	9,54	7,50
40	20,27	8,29	7,10
45	13,56	6,71	6,69
50	8,54	5,02	6,30
55	5,07	3,47	5,93
60	2,83	2,24	5,59
65	1,49	1,34	5,27
70	0,74	0,75	4,98
75	0,35	0,39	4,71
80	0,16	0,19	4,47
85	0,07	0,09	4,25
90	0,03	0,04	4,05
95	0,01	0,02	3,87
100	0,00	0,01	3,69
total par ha	582,33	125,00 en 10 ans	