

| | |
|---------------------|---|
| Zeitschrift: | Bildungsforschung und Bildungspraxis : schweizerische Zeitschrift für Erziehungswissenschaft = Éducation et recherche : revue suisse des sciences de l'éducation = Educazione e ricerca : rivista svizzera di scienze dell'educazione |
| Herausgeber: | Schweizerische Gesellschaft für Bildungsforschung |
| Band: | 9 (1987) |
| Heft: | 3 |
| Artikel: | Un canard dans les mares |
| Autor: | Conne, François |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-786363 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Un canard dans les mares

François Conne

Comment la communication s'établit-elle entre maître et élèves? Que fait-on dans une leçon de mathématique? Un cas de figure surprenant.

Par la description d'un cas d'activité scolaire, je restitue un certain nombre d'analyses didactiques. Je montre combien il est difficile dans les conditions réelles d'une classe d'éviter que l'apprentissage d'outils scolaires (mathématiques) se fasse «pour lui-même», à la suite d'une adaptation exagérée de l'enseignement aux élèves. Dès lors il n'est pas vraiment possible d'assurer qu'un tel enseignement débouche sur une structuration cognitive effective chez les élèves. Dans l'exemple qui suit, l'outil scolaire mathématique, ce sont les fameux diagrammes de Venn et leur adaptation à l'enseignement des élèves des premières classes de l'école primaire. Je considère ici que ces diagrammes opèrent une traduction des relations logiques d'appartenance ou d'exclusion de classes sur le plan spatial des relations d'inclusion et d'exclusion à un ou des domaines plans. La structuration cognitive escomptée par un tel enseignement porte autant sur la connaissance de la logique que sur celle de l'espace.

Préambule

Le texte qui suit est la description d'une des modalités que peut prendre la leçon de mathématiques à l'école primaire. Mais l'histoire vaut ici plus qu'une anecdote. Son exposition dans un déroulement temporel permet de faire succéder différents cadrages constituant autant d'aspects d'analyse. La description en est alors la synthèse, la restitution des éléments dégagés précédemment dans leur jeu, sur les différents sites du travail didactique:

1° Le manuel scolaire et la méthodologie; 2° la préparation de son exercice par le maître chez lui; 3° la simulation de cet exercice par ses proches; 4° la réalisation en classe; 5° la copie de chacun des élèves; 6° l'ensemble de leurs réponses; 7° la confrontation enfin d'une tâche apparemment voisine mais finalement toute différente par ses résultats. A chacun de ces sites correspondent des analyses particulières qui nous dévoilent l'objet d'enseignement, la façon dont méthodologues, maîtres puis élèves y projettent leur conception, les réussites et les limites de leurs adaptations réciproques et progressives.

Sans que cela soit explicité autrement qu'ici même, je me réfère aux concepts de transposition didactique, de contrat didactique d'analyses (a priori et a posteriori) de la tâche proposée aux élèves ainsi que de celle des systèmes symboliques. Le lecteur averti n'aura aucune peine à faire cette lecture; quant au novice, j'espère susciter en lui quelques questions qui infailliblement et mieux que tout l'introduiront à ces concepts.

Introduction

Supposez qu'on vous demande de dessiner 3 mares (étangs) de sorte qu'un canard puisse nager en même temps dans chacun d'eux. Vous trouverez sans doute la question absurde: le canard ne saurait nager qu'en un seul endroit à la fois. Vous serez plus frappés encore par la tournure suivante: «Dessinez les 3 mares de façon que quand le canard nage n'importe où dans la rouge il nage aussi dans la verte et dans la bleue». Or, il m'est arrivé d'assister à une leçon où le maître tenait un tel langage et où, loin d'être perturbés, les élèves entraient en matière et répondaient exactement dans le sens attendu par le maître. J'ai pu obtenir des informations d'ordres divers sur les jeux et exercices antérieurs, sur la manière dont le maître s'est pris pour préparer son exercice, etc. Ainsi, pour une fois, une analyse globale d'un travail scolaire peut être entreprise et je pourrai tenter de caractériser le contenu réel du travail fourni sans m'arrêter aux seules productions des élèves.

Mais mener une telle entreprise suppose que l'on suspende pour un moment sa réaction première, que l'on ne s'arrête pas à l'absurdité apparente du thème, mais qu'on parte au contraire du constat que la leçon s'est tenue. Finalement, le non-sens n'a jamais empêché de travailler pas plus à l'école qu'à l'hôpital ou à l'usine (sans même parler de l'armée!). Il est légitime de se demander ce qui se passe dans une telle leçon. Sur quels critères va-t-on s'appuyer pour répondre à une telle question?

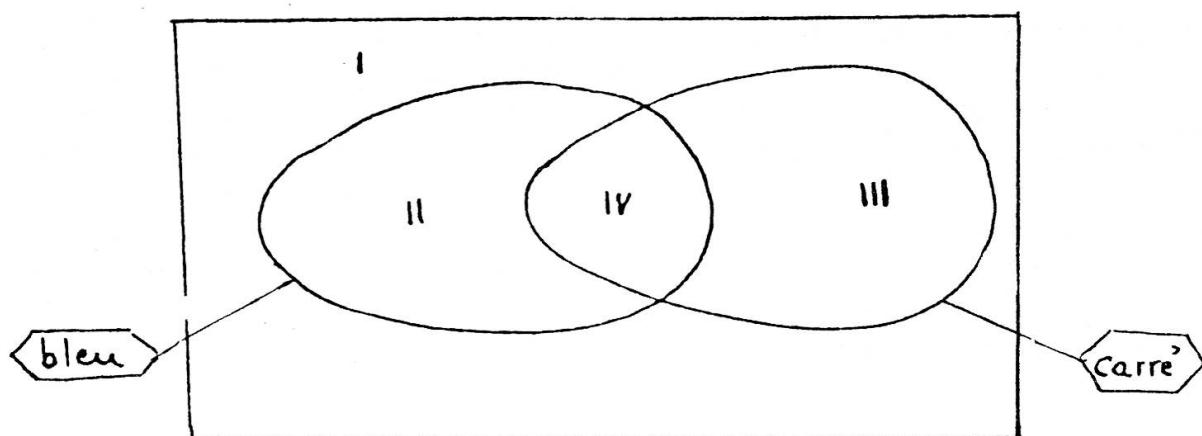
Activités relatives à la découverte de l'espace

La scène se passe en Suisse Romande, dans une classe de deuxième année primaire (7-8 ans).

La leçon observée se rattache à l'un des grands chapitres du programme romand, «l'avenue Découverte de l'Espace». En particulier, il s'agit de caractériser la position d'un élément relativement à plusieurs domaines, eux-mêmes disposés de manières diverses. Ce qui nous occupe ici n'est pas sans lien avec un autre chapitre, «l'avenue Ensembles et Relations», en particulier à cause des fameux diagrammes de Venn. La remarque suivante du livre du maître est d'ailleurs sur ce point éloquente:

Citation p. 193 Méthodologie 1ère année primaire:

Les plages d'un diagramme de Venn sont des domaines au sens où ce terme est utilisé dans le chapitre D.E. (découverte de l'espace):



Dans l'exemple ci-dessus on distingue 4 domaines (4 plages)

- I Le domaine où se situent des formes qui ne sont ni bleues ni carrées.
- II Le domaine où se situent des formes bleues qui ne sont pas carrées.
- III Le domaine où se situent des carrés qui ne sont pas bleus.
- IV Le domaine où se situent des carrés bleus.

Avec les élèves il n'est toutefois pas opportun de relever cette analogie car, dans les classements, on doit fréquemment envisager des régions formées de plusieurs domaines, ce qui constitue une difficulté pour les élèves de première année.

Deux objections me viennent à l'esprit:

- les élèves ne feront-ils pas d'eux-mêmes le rapprochement?
- quel poids cette «analogie» pèse-t-elle dans les propres représentations du maître?

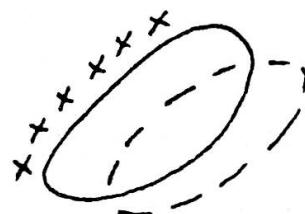
Car apparemment bien peu de choses distinguent les activités du chapitre «Découverte de l'Espace» de celui «Ensembles et Relations». Et pour bien voir la spécificité du travail à fournir dans chacun de ces domaines, il faut se poser au niveau conceptuel et bien comprendre, au delà des formes d'activité demandées, l'objet d'étude.

Convention des couleurs pour la suite du texte:

— rouge - - - bleu - - - - - vert

On pourrait insister sur la différence instrument/objet en se disant que les relations spatiales sont au service de la logique au travers des diagrammes divers dont le plus fameux est le diagramme de Venn. Cependant, nous allons voir que cette distinction est valable «dans les deux sens».

1. En effet les diagrammes utilisent en tant qu'outils les relations spatiales et leurs propriétés. Mais, en tant que tels, l'usage qu'ils font de l'espace est extrêmement réduit, caricatural même (ce qui permet les automatismes). Dès qu'on fait de l'espace l'objet de notre étude, on ne peut plus se contenter de relations si pauvres. Et ceci apparaît chez les élèves, déjà pour une tâche aussi formelle et schématique que la suivante: «Dessine 6 croix à l'extérieur du domaine délimité par la courbe rouge» lorsque, tout en répondant correctement ils alignent leurs croix le long de cette courbe.

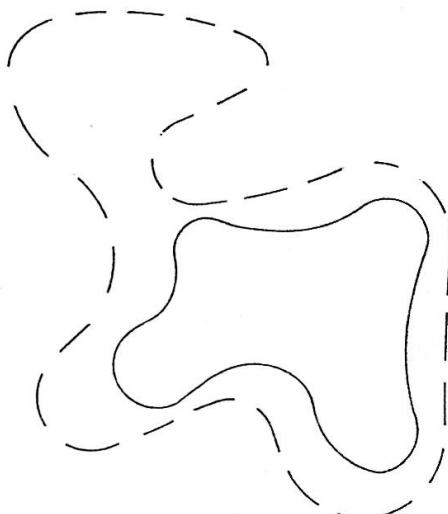
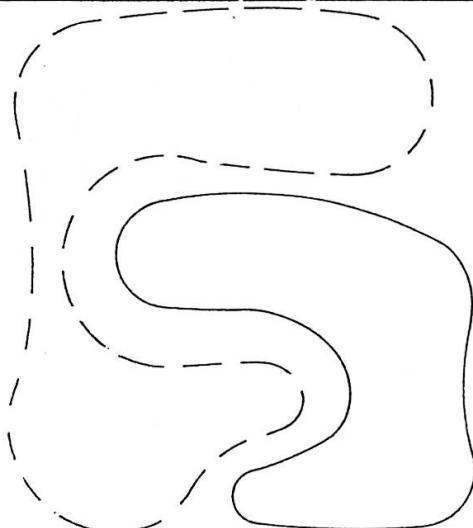
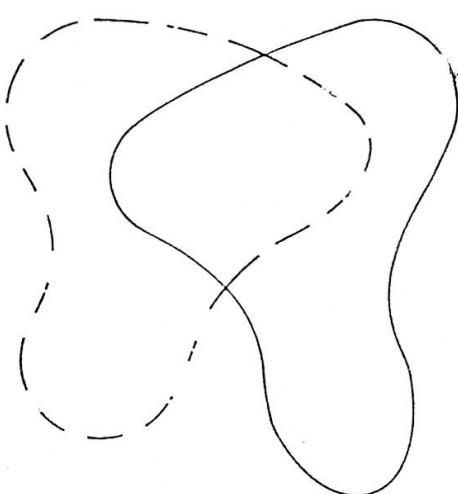
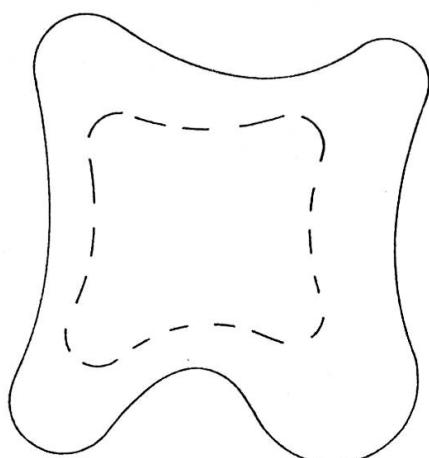


2. A l'inverse, nous voyons que pour les activités du chapitre: «Découverte de l'Espace» le manuel recourt massivement dans la rédaction des consignes à la combinatoire des attributs. Ainsi, à propos d'étude de propriétés particulières, la logique, au travers du langage, devient instrument pour l'étude de l'espace. Par exemple à l'exercice DE 5 de 2^e année primaire où on demande aux élèves de classer dans un tableau à double entrée divers dessins de courbes, fermées ou non, simples ou se recouvrant. Mais la confusion est à son comble pour les exercices de positionnement d'objet relativement à un ou plusieurs domaines. Par exemple, toujours en 2^e année, l'exercice DE 8 où on demande ceci: «Une maison est à la fois à l'intérieur de la ligne rouge et de la ligne bleue, dessine-la». (Suivent 4 items où les lignes sont dessinées selon des positions relatives diverses: inclusion, intersection, exclusion). Cet aspect formel est très surprenant dans un chapitre sur l'espace. Il semble répondre à une volonté d'enseigner des rudiments de notions et surtout de contrôler cet apprentissage. Comme si les méthodologies n'avaient pas trouvé autre chose comme activités susceptibles d'évaluation.

L'impression que laisse ce chapitre - pour les 3 premières années primaires du moins - est très fortement celle d'un formalisme réducteur ravageur. Mais ne soyons pas trop pessimiste et n'oubliions pas qu'une classe est composée d'individus vivants et sachons déjà voir ce qui s'y passe.

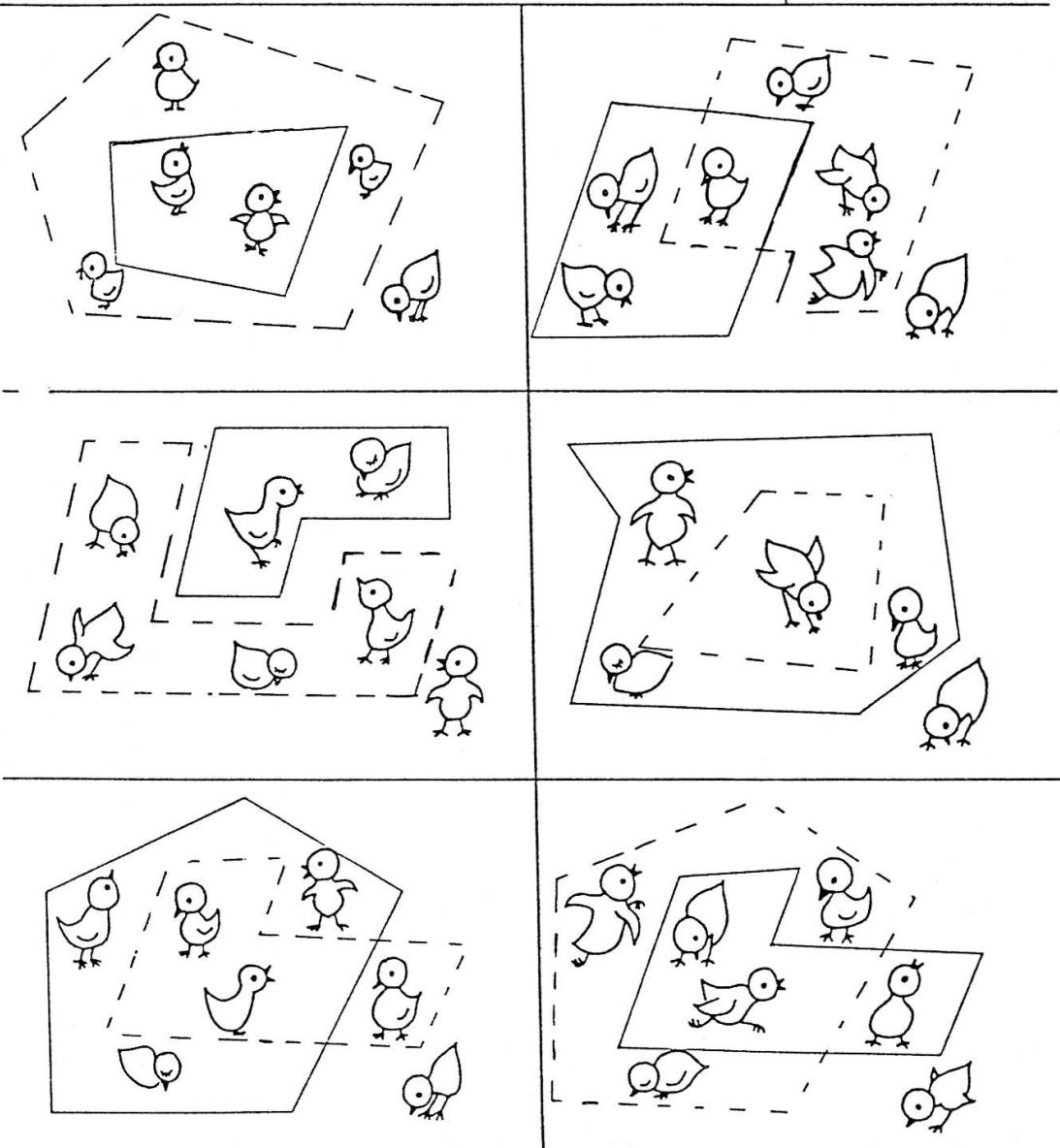
DE - 8

Une maison est à la fois à l'intérieur de la ligne rouge et de la ligne bleue; dessine-la.



Colorie les poussins qui se trouvent
à l'intérieur de la ligne bleue,
mais à l'extérieur de la ligne rouge.

DE - 11



Un coup d'oeil en amont

L'exercice que nous allons étudier se place dans une série de leçons consacrées au chapitre DE à la fin du 1er trimestre de 2^e année primaire. Outre quelques fiches du type de celle citée plus haut (DE 8), la maîtresse avait joué avec ses élèves, par petits groupes, au jeu suivant. Les élèves disposaient de deux cordes nouées ou encore de deux cerceaux qu'ils devaient tout d'abord combiner sur le tapis selon leur idée. Ceci fait, la maîtresse leur demandait: a) *de placer un élément selon une consigne donnée* ou b) *de décrire la position d'un élément déjà placé*. Par ex.: «A l'intérieur de la ligne verte mais à l'extérieur de la rouge» etc... Puis on changeait la disposition des domaines et le jeu reprenait.

Une difficulté à laquelle certains élèves achoppaient, et ce, malgré les tentatives réitérées d'explication, était de considérer que, dans le schéma suivant, un objet situé à l'intérieur de la courbe rouge est aussi à l'intérieur de la bleue. Par contre, les élèves n'éprouvaient aucune difficulté à comprendre que la courbe rouge se situe à l'intérieur de la bleue. Ainsi, à DE 8, citée plus haut, devant dessiner une maison à la fois à l'intérieur du domaine rouge et du domaine bleu, une élève déclarait: «Si une maison se trouve dans la rouge, elle ne peut pas passer par-dessus la barrière rouge, donc elle n'est pas à l'intérieur de la bleue». Ce à quoi un autre élève rétorquait: «Mais qui t'a parlé de barrière?». Nous retrouvons la question de la sélection des relations spatiales pertinentes pour l'exercice scolaire. Remarquons que la maîtresse n'aura sans doute pas pensé demander à cette élève si, dans le schéma suivant, les croix sont à l'extérieur de la courbe bleue! Cette difficulté à considérer que l'inclusion du domaine équivaut à l'inclusion de leur intérieur (ce qui est une définition) n'est pas nouvelle. Elle s'était déjà manifestée en 1^{ère} primaire; elle ne sera pas non plus réglée dans la suite des leçons. D'autres élèves avaient passablement de difficultés à coordonner les relations de repérage, se suffisant volontiers d'une caractérisation par rapport à un seul domaine.

Ceci se marquait chez ces élèves aussi au niveau de l'énonciation des conditions, la coordination «à l'intérieur de... mais à l'extérieur de...» n'étant pas aisée à formuler. Beaucoup de réponses témoignaient en outre d'une sorte d'exclusion mutuelle tacite des domaines, à moins qu'une information spécifique ne soit donnée. Ainsi, devant placer 6 croix à l'intérieur du domaine bleu et 4 ronds à l'extérieur de ce même domaine, les mêmes élèves plaçaient leurs éléments comme ci-contre: (les deux questions n'étaient pas posées ensemble, ni sur le même diagramme). Dans le même ordre d'idée, une difficulté bien connue est celle que ressentent les élèves à ne pas



tenir compte d'un domaine superflu, non mentionnée dans la consigne de placement, à considérer que, même dessiné, ce domaine n'importe pas.

Toutes ces difficultés sont sans doute la manifestation d'un seul et même obstacle. Une chose est certaine c'est que même correct, le traitement des relations spatiales par l'élève n'a pas la rigueur des définitions formelles. En ce sens ce sont toujours des réponses particulières que produisent les élèves, jusque très tard dans leur scolarité.

En fait il semble que si les élèves s'avèrent capables d'adapter leurs réponses aux figures (relations figurales) imposées par le cours, c'est au niveau des règles de production que se situe l'obstacle. Tel est le diagnostic général qu'on peut faire lorsque, comme ici, la difficulté persiste.

Conversement, et en tant que manifestant leurs propres règles de représentations, les élèves font preuve d'astuces amusantes dans leurs productions. Ils savent toujours prendre un peu de marge, même pour la tâche la plus étriquée. Par exemple, les petits faits suivants qui, vu leur fréquence, ne sont pas aussi anodins qu'il paraît au premier abord, sont facilement observables. 1) Devant placer un objet en même temps à l'intérieur de deux domaines distincts ils proposent de le placer à cheval sur les frontières (quitte à faire un dessin assez gros). A l'exercice DE 11, devant colorier «les poussins qui sont à la fois dans l'enclos bleu et l'enclos rouge», des élèves ne dessinent qu'à moitié, ou bien encore ne dessinent qu'un élément sur deux. Etc... Ces astuces sont d'autant plus riches que la tâche proposée aux élèves est plus ouverte, et les amène à organiser eux-mêmes les éléments figuratifs. Elles dénotent l'assimilation et le sens qu'ils donnent aux activités proposées.

Construction de consignes pour un nouvel exercice

La maîtresse avait fait étudier le placement d'objets par rapport à deux domaines. L'analyse des exercices proposés montre qu'ils procédaient en deux temps bien distincts: arrangement des domaines, puis, sur le schéma ainsi constitué, description de certaines positions. Maintenant la maîtresse cherche à construire un exercice un peu plus compliqué, qu'elle prévoit de soumettre par écrit à ses élèves. L'idée de départ est de passer à la considération de trois domaines, et de soumettre leur arrangement à une condition de placement stipulée d'avance. C'est donc l'articulation entre la disposition des domaines et les positions potentielles des éléments qui sera travaillée. On observe alors que la confection d'un telle tâche par la maîtresse va requérir la donnée de conditions de placement très contraignantes. Telle est du moins la solution trouvée par la maîtresse, et cela complique encore plus l'exercice.

J'ai reçu de la part de la maîtresse les notes de sa préparation, et un entretien m'a permis de reconstituer cette étape.

1. Première rédaction des consignes

La tâche étant fixée, il s'agissait de formuler les conditions. Pour ce faire la maîtresse procède à rebours, à partir de configurations-réponses qu'elle aimerait obtenir. Ceci l'amène à une première rédaction de 4 questions:

disposition but:

première version de la condition

Q₁



le canard doit nager en même temps dans la mare verte, la rouge et la bleue.

Q₂



Le canard doit nager en même temps dans la mare verte et la rouge, mais pas dans la bleue.

Q₃



Quand le canard est dans la verte il n'est ni dans la rouge, ni dans la bleue.

Q₄



Le canard doit nager en même temps dans la rouge, la verte et la bleue.

Remarques:

- 1) Les questions 1 et 4 sont identiques, à l'ordre des couleurs près. Puis la maîtresse va tenter de les différencier (cf. plus loin).
- 2) A la faveur de l'exclusion exprimée à la question 3, la maîtresse propose une question plus générale.

- 3) La maîtresse a présentes à son esprit les tâches types du chapitre: «Découverte de l'Espace» à savoir:
- l'inclusion rendue par recouvrement (convention Q₁ et Q₄)
 - le jeu sur la position des domaines

Mais le travail langagier des consignes rappelle bien les tâches logiques du chapitre: «Ensembles et relations».

2. Test

La maîtresse demande alors à son mari et à sa soeur de faire ces exercices, histoire de vérifier les consignes. Il ressort des réponses inattendues aux questions suivantes:



Notons que les deux «cobayes» se prêtent volontiers à ce jeu de placement et passent outre à l'absurdité de cette histoire de canards. La maîtresse, elle, n'est pas satisfaite de ses consignes. Elle aimerait notamment que les questions 3 et 4 n'aient *qu'une seule réponse possible*. Elle voudrait aussi que la question 4 corresponde au schéma de l'inclusion des mares: son mari lui propose de formuler la condition suivante: «Dessine les 3 étangs de manière à ce que le canard nage au milieu des 3». Mais elle pense que formulée ainsi «c'était trop facile - parce que trop visuel». De là une nouvelle version de ses questions:



| | |
|---|---|
| Q ₁ inchangée: | Le canard doit nager en même temps dans la mare verte, la rouge et la bleue. |
| Q ₂ inchangée: | Le canard doit nager en même temps dans la mare verte et la rouge, mais pas dans la bleue. |
| Q ₃ modifiée: exclusion totale de la mare verte par rapport aux 2 autres. | Quand le canard est n'importe où dans la verte, il n'est ni dans la rouge ni dans la bleue. |

Q4 modifiée: Quand le canard est n'importe où dans la rouge, il est en même temps dans la verte et dans la bleue.
inclusion totale de la mare rouge dans l'intersection des 2 autres.

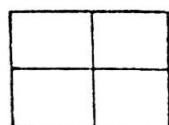
Remarque:

1. Par rapport à la description spatiale de son mari, la maîtresse préfère une rédaction formelle de la consigne.
2. La maîtresse se rend compte de la complexité de ces conditions. Mais faute de mieux elle décide d'essayer tout de même.

3. Passation en classe

La maîtresse avait explicité chez elle le but du jeu à proposer aux élèves. Mais elle n'avait pas préparé l'explication du jeu lui-même. Bien sûr c'est par là qu'elle doit commencer ses consignes. Elle improvise donc. Ceci l'amène à adapter les questions rédigées la veille et qu'elle a sous ses yeux sur une feuille de brouillon.

Avant la classe, elle a dessiné le cadre suivant au tableau noir:



elle explique que ceci représente la feuille d'exercice que l'on a préalablement pliée en 4 pour obtenir 4 zones distinctes où seront reportées les réponses graphiques des élèves.

Ceci étant fait, elle explique:

«Il y a 3 mares, 3 étangs, 1 bleu, 1 rouge, 1 vert». Ce disant, elle dessine les 3 mares disjointes les unes des autres au tableau noir:



Question 1° «Vous devez arranger les mares dans cette case...» la maîtresse coche sur son tableau une des 4 cases.

| | |
|---|--|
| X | |
| | |

«Vous devez arranger les mares de façon que le canard puisse nager dans toutes les mares, puis vous dessinez le canard».

Puis elle se reprend:

«Vous dessinez les mares de façon que le canard puisse nager dans la mare verte, la rouge et la bleue».

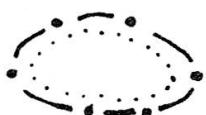
Les élèves dessinent dans le premier quart de leur feuille. Puis une fois que tous ont terminé, on passe à la 2^e question:

Question 2° «Maintenant vous devez arranger les mares de façon à ce que le canard puisse nager en même temps dans la verte et dans la rouge, mais pas dans la bleue».

Puis, à l'intention d'un élève particulier qui avait eu quelques difficultés pour les fiches d'exercice de ce type: «A l'intérieur de la verte et de la rouge et à l'extérieur de la bleue». (Indiquant ainsi le type d'exercice par l'usage des vocables intérieur-extérieur).

Elle laisse les élèves répondre puis pose la question suivante:

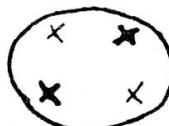
Question 3° «Dessinez le canard de façon que n'importe où dans la verte-elle pointe alors avec sa craie le domaine vert du tableau noir en suivant le pourtour - Si il nage n'importe où dans la verte, il ne



- Si il nage n'importe où dans la verte, il ne soit ni dans la rouge ni dans la bleue».

Un élève s'exclame: «Fascott» (facile). Ils dessinent.

Question 4° «Dessinez le canard de façon que quand il est n'importe où dans la rouge mais il est aussi dans la verte et dans la bleue». Ce n'est pas clair pour un élève, alors elle se reprend:



etc... «N'importe où dans la rouge mais il doit être aussi dans la verte et dans la bleue».

Les élèves dessinent puis rendent leur feuille.

Remarques:

1° On sera étonné du langage, et il s'agit de poursuivre l'analyse au-delà de cet étonnement, prenant cette complexité comme un fait et cherchant à comprendre ce qui amène la maîtresse à s'exprimer ainsi, puis quel impact cela produit sur les élèves.

Ma retranscription est celle d'un langage parlé, entrecoupé de gestes, dessins au tableau noir, ponctué et repris, donc un langage qui, au contraire de l'écrit, ne se déroule pas linéairement.

2° L'usage du vocable «mais» dans la consigne est frappant. Il structure la tâche en 2 temps, indique que les informations qui succèdent ont leur importance, et il me semble faire référence aux actions plus qu'aux relations.

4. Analyse de la passation des consignes

Une centration excessive, lors de la préparation de l'exercice, sur la rédaction des conditions de placement aura amené la maîtresse à négliger un peu la part des consignes concernant la description des actions à effectuer. Ceci constraint la maîtresse à improviser partiellement ses consignes et à tenir deux langages en un seul.

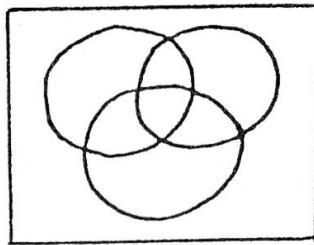
a) Tout d'abord il y a la formulation des conditions. La démarche adoptée par la maîtresse est de partir de la solution (arrangement des 3 étangs). Elle trouve une expression synthétique donnant des relations nécessaires - mais, comme le lecteur attentif l'aura déjà remarqué, pas suffisantes - à la reproduction des figures prévues. Il est instructif de traduire ces conditions en langage formalisé, du moins pour comprendre les difficultés que la maîtresse rencontre dans son travail de formulation:

Paraphrasons les conditions dans une écriture ensembliste en choisissant de désigner les mares par les lettres R, B, V, l'extérieur des mares par la notation du complémentaire, par ex. (B pour l'extérieur de l'étang bleu, et enfin une position du canard par ex. Il vient:

$$1/ \exists x \in R \cap V \cap B \quad 3/ \forall x \in V \quad x \notin B \cup R$$

$$2/ \exists x \in R \cap V \cap \complement B \quad 4/ \forall x \in R \quad x \in B \cap V$$

On peut dès lors traiter chacun de ces problèmes en s'appuyant sur le schéma général des relations entre domaines, puis en y reportant de cas en cas les éléments d'information donnés par les conditions. Ceci permet de déterminer le nombre de solutions formelles.



- Q₁: 64 réponses possibles
 Q₂: 60 réponses possibles
 Q₃: 5 réponses possibles
 Q₄: 8 réponses possibles.

Bien sûr, ces considérations ne sont pas du niveau des élèves de 2^e primaire, mais concernent cependant l'exercice dans la mesure où c'est dans ce cadre que s'inscrivent les conditions et leur formalisme. La question est alors de savoir qu'est-ce qui, de tout ceci, sera communiqué aux élèves. C'est ce que nous verrons à l'analyse des productions recueillies.

- b) Le langage des conditions, travaillées pour elles-mêmes, comme nous l'avons observé dans la préparation de la maîtresse, est un langage de relations. Nous l'avons ensuite prolongé par un traitement formel qui nous a permis ci-dessus la détermination du nombre de solutions possibles. La démarche consistait à examiner sur le schéma de toutes les relations potentielles, celles qui n'étaient pas prédéterminées par la condition requise. (Les personnes qui voudraient connaître ce calcul dans plus de détails peuvent me le demander par écrit). Ce n'est pas à un tel traitement que la maîtresse convie ses élèves. Dans sa consigne elle propose un programme d'action qui, tout en engageant le traitement de l'élève, procure à ce dernier un cadre d'interprétation des conditions requises. Ce programme procède de la combinaison des trois étangs, considérés, au départ, comme des entités indépendantes. La condition guide l'élève vers l'obtention d'une solution particulière adéquate, et le placement du canard attestera la réponse. Ainsi le problème sera résoluble. Nous examinerons par la suite ce que les élèves ont trouvé.

Il s'agit donc pour la maîtresse de construire une consigne qui présente à la fois le programme d'action et les conditions requises ainsi que la manière de référer ces deux éléments. Nous observons alors dans les paroles de la maîtresse des interférences qui témoignent de cette élaboration. Rien ne permet de préjuger de l'effet provoqué par ces interférences sur les élèves.

- Le dessin des trois étangs, au tableau noir, pourrait induire l'élève à un traitement réaliste et le détourner de la tâche proposée. Il s'agit donc de bien faire comprendre aux élèves que ce dessin n'est pas un arrangement des étangs mais la désignation des trois éléments du diagramme. Or une des réponses de la question 3 peut être la représentation de trois étangs disjoints...
- La maîtresse, pour expliquer le terme «n'importe où», passe au plan de l'action en montrant un ensemble de places possibles pour le canard. Elle

demande alors aux élèves de dessiner plusieurs canards pour bien s'assurer que la condition soit respectée.

- Un seul canard ne saurait être qu'à un seul endroit à la fois. Comment désigner la potentialité des positions du canard dans l'ensemble d'un domaine?
- De par la construction de la phrase, mais surtout par un jeu expressif d'intonation, les conditions sont scindées en 2 parties: ex.: «Quand il nage n'importe où dans la verte...
... il n'est ni dans la rouge ni dans la bleue».

La question qui se pose maintenant est de savoir par quel moyen les élèves ont pu déterminer la configuration des étangs. Un raisonnement formel est d'emblée exclu, et on ne peut pas s'appuyer sur des considérations réalistes pour traiter un tel problème. L'examen des productions recueillies va nous permettre de répondre, partiellement du moins, à cette question.

Analyse des productions d'élèves

Tout d'abord parlons classiquement de réussite. Toutes les questions ont été correctement traitées. Les seules erreurs proviennent de la question 4 pour laquelle 9 élèves ont proposé une relation d'intersection plutôt que d'inclusion.

Secondement, à part quelques réponses individuelles astucieuses que nous examinerons plus loin, les réponses se distribuent en deux grands types: intersection, inclusion. Voyons ceci de plus près:

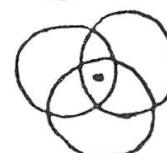
Q1. «Vous devez arranger les mares de façon à ce que le canard puisse nager à la fois dans la verte la rouge et la bleue».

- Réponses identité:
(1 mare tricolore)



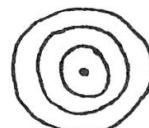
2 réponses

- Réponses intersection:
(canard au centre)



6 réponses

- Emboîtement des 3 mares



9 réponses

dans ce cas la séquence des couleurs est, de l'intérieur vers l'extérieur:

| | | |
|----------------------|----|--------------------------|
| V - R - B | 6 | (correspond à la donnée) |
| V - B - R | 1 | |
| B - R - V | 1 | (correspond à la donnée) |
| B - V - R | 1 | |
| (R - V - B effacé | 1) | |

Les réponses de type intersection montrent que l'élève a été sensible, dans la consigne, à la conjonction des conditions. Les réponses de type inclusion montrent que l'élève a assimilé cette tâche aux exercices précédents, en particulier à la relation «à l'intérieur».

- Q2. «Maintenant vous devez arranger les mares de façon à ce que le canard puisse nager en même temps dans la verte et dans la rouge mais pas dans la bleue».

- Réponses identité/exclusion
(mare bicolore)



2 réponses

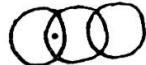
- Réponses intersection

intersection/exclusion



7 réponses

intersection/chaîne



1 réponse

intersection/absence



1 réponse

- Réponses inclusion

inclusion/exclusion

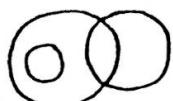


6 réponses

Séquence des couleurs (de l'intérieur vers l'extérieur)

| | |
|----|---|
| VR | 5 |
| RV | 1 |

Remarques: On aurait pu par exemple s'attendre à trouver:



ou encore



En fait la forme des réponses montre que les relations perçues par les élèves suivent la linéarité de la consigne: d'une part une relation entre les mares Verte et Rouge, de l'autre la mare Bleue en exclusion. Pour la première de ces relations, 8 élèves optent pour l'intersection et 6 pour l'inclusion. Pour la seconde relation, elle est comprise de manière «absolue» comme une exclusion du Bleu (16 contre 1).

Q3. «Dessinez le canard (sic) de façon que s'il nage n'importe où dans la verte il ne soit ni dans la rouge ni dans la bleue».

- Réponses exclusion:  15 réponses

dont:



7



3



5

- Réponse exclusion/inclusion



2 réponses.

Remarque:

On aurait pu s'attendre encore à la réponse



ou

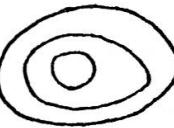


mais aucune conjonction n'est explicitement désignée

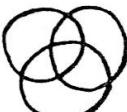
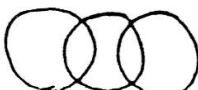
bicolore

dans la consigne. Dès lors les deux réponses exclusion/inclusion sont très surprenantes. Un examen plus détaillé montre que les deux élèves en question ont choisi un schéma inclusion pour chacune de leurs réponses. Et que, d'autre part, ce sont deux élèves qui ont manifesté antérieurement le plus de peine pour ce type d'exercice. Ils avaient eu droit à des explications individuelles de la part de la maîtresse. Il semble donc qu'ils se raccrochent à un schéma identifié comme pertinent pour ce type de tâche. (La maîtresse a beaucoup insisté sur l'inclusion, et, nous le voyons encore, elle y attache de l'importance puisque les questions 1 et 4 lui sont consacrées).

Q4. «Dessinez le canard de façon que quand il est n'importe où dans la rouge mais (sic) il est aussi dans la verte et dans la bleue».

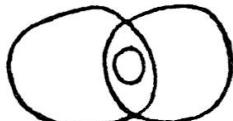
- Réponses inclusives  5 réponses

| | | |
|----------|-------|---|
| Séquence | R V B | 3 |
| | R B V | 2 |

- Réponse identité
(mare tricolore)  3 réponses
- Réponse intersection
intersection des 3 mares  7 réponses
- intersection/exclusion  1 réponse
- intersection/chaîne
avec un grand canard
central pataugeant en
même temps dans les 3 étangs  1 réponse

Remarques:

1. On aurait pu avoir d'autres réponses dont:



2. 9 réponses fausses, comme remarqué précédemment.

3. La réponse  montre que cet élève a traité l'information sur le modèle des autres questions:
«rouge d'un côté et conjonction vert-bleu de l'autre».

4. De même les élèves qui ont opté pour le schéma d'intersection n'ont pas «entendu» les clauses exclusives de la question. Le «n'importe où» n'a pas été entendu.

Séquences de réponses.

Les élèves ont donc répondu selon 2 cas de figure: intersection/inclusion. Ecartons pour l'instant les réponses «identité» fournies toujours par les 2 mêmes élèves. Nous avons:

1° Réponses intersection: 5 élèves

| | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| 4 élèves | | | | |
| 1 élève | | | | |

2° Réponses inclusion: 3 élèves

| | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| 2 élèves | | | | |
| 1 élève | | | | |

3° Réponses mixtes: 6 élèves

a) 1 réponse générale (logiquement)

| | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
|--|-------|-------|-------|-------|
| | | | | |

b) 5 réponses plutôt inclusives

| | | | | |
|-------|---|-------|---|-----------------------|
| b_1 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
| | | | | |
| | 3 canards un dans chaque plage du diagramme | | | idem que Q_1 |
| b_2 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
| | | | | |
| | un canard trico- lore | | | Canard $\in B \cap V$ |
| b_3 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
| | | | | |
| | 3 canards, 1 de chaque couleur, entourés. | | frontière | (mais, efface':) |
| b_4 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
| | | | | |
| | (mais, efface':) | | en pointilles, une "frontière", empêchant l'accès à la mare. un grand canard dans la mare rouge empêtant sur les deux intersections | |
| b_5 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | Q_4 |
| | | | | |
| | 2 canards dessinés dont un chevauchant (efface':) | | 1 canard cheva- uchant deux domaines. | |
| | 1 mare fait le pont entre les deux autres) | | | |

4° Un élève enfin part sur une représentation dissociée des trois étangs puis il se corrige pour la question Q1.

| Q ₁ | Q ₂ | Q ₃ | Q ₄ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | | |
| Correction | | | |
| | | | |

En ayant dû expliciter certaines réponses, j'ai été amené à indiquer la position du canard ou encore d'autres *marques* auxquelles les élèves ont eu recours pour souligner, voire plus, intégrer les divers types d'information de la consigne. Voyons cela de plus près.

Agencement des marques.

Les réponses des élèves ne se limitent donc pas à la détermination d'une figure pour les étangs, mais l'élève aura encore surajouté des éléments qui représentent les informations des consignes et intègrent celles-ci avec le cadre du prétexte champêtre. Les marques sont d'ordres divers, nous pouvons les classer en fonction des «problèmes» auxquels ils répondent:

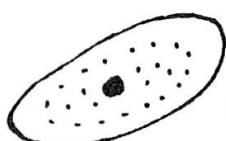
- a) *Le dessin du canard* est demandé, lors de la consigne, pour vérifier l'exactitude de la figure trouvée. La maîtresse demande en outre de dessiner plusieurs canards pour les questions 3 et 4 afin de bien vérifier que la clause «n'importe où» soit remplie. Tous les élèves ont représenté un canard au moins. Mais certains n'ont pas représenté plusieurs canards pour les questions 3 et 4, d'autres ont représenté plusieurs canards pour l'une ou l'autre des questions 1 et 2.
1. Le dessin de plusieurs canards peut donc répondre à la consigne.

Mais d'autres moyens peuvent être mis en oeuvre. Par exemple, pour dire «n'importe où», l'élève dessine un schéma en rayons (1), un pointillé

comme la maîtresse a fait au tableau (2), ou encore le dessin d'un parcours du canard (3).



(1)

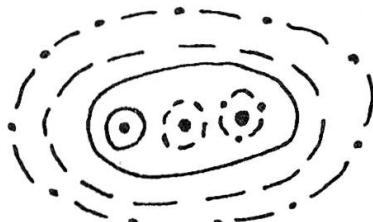


(2)



(3)

2. Le dessin de plusieurs canards peut remplir une autre fonction, par exemple celle de souligner la triple appartenance comme dans le cas suivant où en outre il y avait un canard rouge, un vert et un bleu.



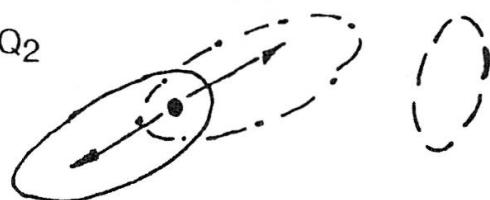
Dans ce même ordre d'idées, une séquence de réponses particulièrement intéressante est la suivante:

Q₁



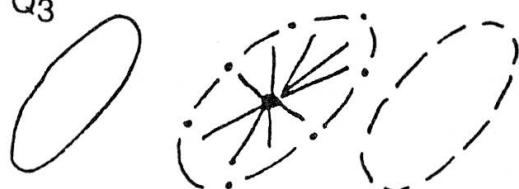
trois dessins de canard
liés par un trait ou
trois dessins du même
canard.

Q₂



les traits soulignent
la double appartenance
de la position du canard

Q₃



le canard nage partout
dans l'étang vert

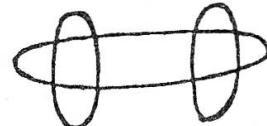
Q₄



même type de réponse qu'en Q₁

- b) *La question réaliste*, nous l'avons vu, a dicté à un élève l'option de départ suivante. Pour toutes ses réponses (Q₄ excepté), il représente

trois étangs reliés par des ponts, avec un canard extérieur - c'est plus les endroits où peut aller le canard que l'endroit où celui-ci se trouve. Mais notons qu'à un moment donné d'autres élèves ont envisagé la représentation de trois mares distinctes. La question de la position simultanée du canard étant réglée soit au niveau de la taille (soulignée par un coloriage) soit par le chevauchement des étangs (le canard peut alors passer, en nageant, d'une mare à l'autre).

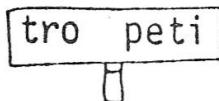


Mais la solution la plus subtile aura sans conteste été celle de ces deux élèves recourant au dessin d'étangs tricolores (bicolores pour la question Q₂). Dans un des cas même, la forme de l'étang soulignait l'idée de 3 étangs en un seul:

tricolore, soit, dans chaque anse de son dessin, un canard de la couleur correspondante.



- c) *L'exclusion* est souvent traitée comme une impossibilité, et, en tant que telle, soulignée par le dessin de «frontières» (outre le dessin du bord des étangs bien sûr). L'interdit étant encore souligné, dans un cas, par un écritau explicatif:



En conclusion, il est assez surprenant de voir combien les élèves ont «couvert» tous les éléments des données par leurs marquages (la diversité permettant dans certains cas de résoudre des contradictions apparentes). Les élèves ont donc tout d'abord identifié la forme convenable, et ils ont trouvé les réponses attendues par la maîtresse, malgré la non-suffisance logique de la consigne. Puis ils ont ajouté, par le biais du recours à divers marquages, les éléments constitutifs de l'histoire-prétexte (canard qui nage dans les mares). C'est une reconstitution. Certains, par leur astuce, ont même réussi à concilier le réalisme avec cet exercice: jeu sur les couleurs, formes et tailles des étangs ou des canards. Mais même si la reconstitution est complète, il est primordial de noter que les élèves procèdent par «touches successives», répétées, réglant divers aspects sans que cela soit nécessairement «logiquement coordonné».

Conclusions

1. Je conclus que la tâche n'aura donc pas consisté, comme on pourrait le croire, en un arrangement des trois domaines, ce qui supposerait leur

prise en compte simultanée (emboîtée comme dirait Piaget), mais qu'elle s'est structurée suivant deux moments-clés: a) Déterminer (deviner) la figure correspondante, en se basant sur des indices globaux comme par exemple l'identification du thème de l'exercice (à l'intérieur → problème d'inclusion, ou présence de coordinations → schéma d'intersection) et sur des indices particuliers verbaux de la consigne (ordre des couleurs, redondances, articulation par «mais»). b) Reconstituer, c'est-à-dire intégrer par le dessin et au moyen de marquages, les différents éléments de la donnée en un tout cohérent. Et ceci, au-delà de l'irréalisme du prétexte. C'est à ce niveau d'ailleurs que les élèves ont dû vraiment produire quelque chose de leur cru. C'est ici que l'on peut repérer les problèmes qu'ils ont pu résoudre.

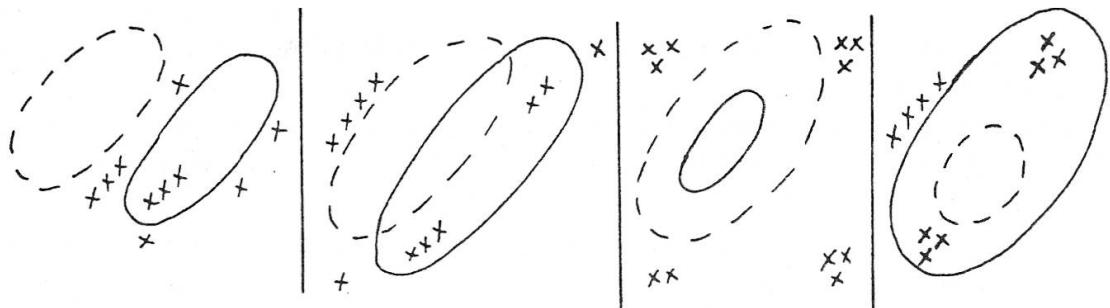
S'il en est ainsi, on comprend mieux que le symbolisme des domaines («ensembles», «patates») n'ait pas valeur d'instrument dans les traitements logiques de l'élève et que ce dernier ne les utilise pas plus tard. C'est le phénomène bien connu de parcellisation des savoirs scolaires et du non recours à des outils dont on croit avoir enseigné l'usage. Le travail scolaire effectué ici est donc plus une *reconstruction d'une signification* préexistante, accessible au maître seulement, qu'une *construction de connaissance*. J'ai pu observer que ce mécanisme jouait dans maintes situations dans l'enseignement en classes primaires élémentaires, que ce soit dans l'enseignement de la logique ou du nombre. Rien n'indique qu'il n'en soit pas de même au secondaire et même à l'université. Voilà ce qui me permet de penser que la leçon décrite représente bien une modalité de l'enseignement des mathématiques et vaut plus qu'une anecdote.

Mais la classe a pu avoir lieu. Il y a eu communication effective dans cette leçon. Ceci est à noter, même si, dans le cas présent, le prix payé est excessif en regard du projet didactique - en particulier, *la tâche ne pose pas de problème aux élèves*.

2. Sur la base de ce dernier constat, j'ai présenté quelque temps plus tard, dans la même classe, un exercice à mes yeux un peu plus intéressant. Il n'y a malheureusement pas eu de communication entre les élèves et moi. Ce fait est à relever et mérite un examen rapide.

Je montre quatre cas de figures au tableau noir et demande aux élèves de bien les recopier sur leur cahier.

La consigne est la suivante: 1° décrire où sont les croix
 2° dire où elles ne sont pas.



La seconde consigne n'a pas de signification immédiate pour les élèves, ils se montrent réticents. J'examine avec eux le 1er cas de figures. A ce moment, et très vite, un élève constate: «elles ne sont jamais dans le bleu». Personne ne relève cette remarque, son auteur n'insiste pas, et il ne la reprendra pas dans ses réponses écrites. Je résous le premier cas, puis demande aux élèves de répondre par écrit aux trois autres cas, et de me présenter individuellement leur travail. Nouvelles réticences, deux élèves trouvent la relation générale et ne répondent alors plus à la 1ère consigne; les autres font des descriptions détaillées utilisant des flèches indicatrices, les termes «à l'intérieur/à l'extérieur», voire des caractérisations «groupés/isolés», mais ils ne répondent pas à la deuxième consigne. Quand enfin je donne ma solution en collectif, les élèves sont surpris en voyant qu'il en est bien ainsi dans les quatre cas (les croix ne sont pas dans le domaine bleu), puis en comprenant que cette réponse m'aurait suffi. Il y a eu donc échec de ma part, non transmission dans cet exercice. Non seulement les élèves n'ont pas produit la réponse attendue, mais ils ne sont pas entrés en matière, car ils n'ont pas su identifier ma consigne. Plusieurs raisons peuvent être invoquées pour cela. Tout d'abord le symbolisme emprunté aux exercices antérieurs correspond à une logique «affirmative». On localise les éléments, on fait dire leur position, on les fait placer. Cela n'est plus du tout adapté à la négation (ceci montre qu'en tant que supports didactiques ces dessins et jeux ne sont pas à même d'enseigner la logique). Secondelement, j'ai préparé cet exercice de la même manière que la maîtresse, en procédant à partir d'une réponse attendue. Cette caractéristique, «ne pas être dans le bleu», que j'ai cachée dans l'exercice, et à la découverte de laquelle je convie l'élève, reste vague et peu précise pour celui qui ne s'apercevrait pas de son application générale aux quatre cas considérés. Ceci suppose la recherche d'un traitement commun, voire simultané des figures et non pas quatre résolutions successives. L'astuce tentée ici tient à ce que la réponse donne à la question posée sa signification.

3. Revenons enfin sur la question générale de la description. A mes yeux celle-ci peut être utilisée comme un instrument de recherche à part entière. Sa méthodologie commence par définir les critères auxquels la description s'arrêtera. Ici, la confrontation des productions respectives du professeur ou des élèves à différents moments de la leçon ou de sa préparation atteste qu'une communication a eu lieu sur un objet bien précis. On a vu l'analogie qu'il y a dans la manière dont chaque acteur de notre histoire se trouve engagé face à l'objet d'enseignement. Cette «rencontre» permet d'affirmer qu'une transmission a bel et bien eu lieu. Mais son explication ne réside pas dans la signification mathématique des tâches proposées, ni dans leur habillage, ni dans les formes verbales des consignes. J'ai voulu montrer ici que le symbolisme ou l'image joue le rôle de «clé de reconstitution» et que l'élève retrouve là, régressivement, des activités entraînées précédemment, et se base pour cela sur des indices qui y font référence. Cette médiation peut se trouver bloquée lorsqu'on sort du cadre pour lequel le symbolisme se trouve adapté même si, mathématiquement parlant, la tâche a plus de sens.

Des recherches expérimentales nombreuses ont mis en évidence le cloisonnement des savoirs scolaires ou encore ce que les psychologues ont qualifié de non-généralisation des savoirs appris en classe. Ici, la description met en évidence une situation scolaire de «reconstitution» où les élèves font référence à diverses tâches. Cette référence n'est pas unique. Ainsi les élèves ne font peut-être pas les liens espérés entre les éléments qu'on leur enseigne mais font des liens quand même. Le problème du cloisonnement des savoirs scolaires se trouve ainsi renouvelé. La description de situation «in vivo» nous permet souvent de nous déprendre de certaines «illusions expérimentales».

Bibliographie

A propos de la didactique et de ses concepts:

Brousseau, G., Quelques phénomènes qui ont causé des échecs de la réforme des mathématiques modernes. *Actes du congrès international des mathématiciens*, Varsovie, 1983.

Brun, J., A propos de la didactique des mathématiques. *Math Ecole*, Genève, 1982, n° 100-101.

Chevallard, Y., *La Transposition Didactique*: du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.

A propos de l'étude de l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande, ainsi que de l'étude des objets d'enseignement utilisés:

Conne, F., *La Transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'Ecole primaire*. Thèse de doctorat, Couturier-Noverraz, Lausanne, 1986.

A propos des contenus d'enseignement:

Méthodologie et commentaires I^{ère} et II^e
Fiches d'exercices I^{ère} et II^e

Edités par l'Office Romand des Services Cantonaux des éditions et du matériel scolaire.

1^{ère} édition 1972 et 1973
2^e édition 1979 et 1980

La comparaison fine de ces deux éditions est très instructive.

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Ente in Teichen

Anhand einer spezifischen Mathematikübung versuche ich, einige didaktische Analysen darzulegen. Eine zu grosse Anpassung an die Fähigkeiten der Schüler verändert oft die Ziele, die sich der Unterricht setzt. So wird oft das in der Schule eingesetzte mathematische «Werkzeug» selbst - und nicht die kognitive Strukturierung - zum eigentlichen Ziel. Ich zeige, wie schwierig es ist, diesen Vorgang in der Klasse zu vermeiden. In dem hier aufgezeichneten Beispiel besteht das mathematische «Werkzeug» in dem sogenannten Venn-Diagramm, das den Bedürfnissen jüngerer Schüler angepasst worden ist. Für mich vollziehen diese Diagramme den Übergang von logischen zu räumlichen Verbindungen. Das angestrebte Unterrichtsziel liegt in der Strukturierung der Kenntnisse sowohl im logischen, als auch im räumlichen Bereich.

SUMMARY

A duck in the pools

Through the description of one specific case of mathematical classroom activity, I try to restitute some didactical analysis. I demonstrate the difficulty to avoid that learning of scholar-mathematical tools runs for its

own purpose as an effect of too much adaptation of the teaching - instead of providing real cognitive structuring of pupils' minds. In the following example, the scholar tools are Venn-diagrams, as adapted for younger children (first and second primary classes). I consider these diagrams as the translation of logical relations into spatial ones. The aim of such a teaching process lies in the structuring of pupils' spatial as well as logical knowledge.