

**Zeitschrift:** Bildungsforschung und Bildungspraxis : schweizerische Zeitschrift für Erziehungswissenschaft = Éducation et recherche : revue suisse des sciences de l'éducation = Educazione e ricerca : rivista svizzera di scienze dell'educazione

**Herausgeber:** Schweizerische Gesellschaft für Bildungsforschung

**Band:** 1 (1979)

**Heft:** 2-3

**Artikel:** Proposition d'un modèle simple de hiérarchie multilinéaire

**Autor:** Ketele, Jean-Marie de / Ketele, Roger de / Laubin-Deprez, Monique

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-786462>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Proposition d'un modèle simple de hiérarchie multilinéaire

Jean-Marie De Ketele, Roger De Ketele, Monique Laubin-Deprez

*Chercheurs et praticiens sont souvent confrontés à des problèmes où il s'agit de mettre en évidence des structures hiérarchiques unissant un certain type de «matériel». Exemples de problèmes de ce type: Tel objectif pédagogique est-il prérequis de tel autre? Tel comportement est-il en général antécédent à tel autre? etc.*

*Les auteurs exposent ici les étapes de résolution d'un modèle de hiérarchie multilinéaire facilitant cette mise en évidence. Ce modèle est non seulement logique, visualisant et facile à utiliser, mais également davantage isomorphe à la réalité observée que d'autres modèles, tels ceux du type de Gutman. Cette présentation est illustrée par l'application de la méthode à un problème d'ordre psychopédagogique.*

Matalon (1965) groupe en trois catégories les problèmes pour lesquels on a recours à l'analyse hiérarchique: vérifier l'hypothèse qu'un certain domaine est unidimensionnel; savoir si un certain nombre de comportements constituent une échelle; élaborer un instrument de mesure permettant d'ordonner les sujets d'une population donnée. On pourrait se demander si, ce faisant, Matalon ne néglige pas une préoccupation majeure du praticien ou du chercheur engagé dans la recherche-action, à savoir la mise en évidence des structures unissant des comportements observés, des items d'une épreuve, des critères d'évaluation.

C'est à cette préoccupation que tentent de répondre les pages qui suivent. Constatant que ces structures sont rarement atteintes par des modèles unilinéaires (car non isomorphes à la réalité), nous proposons un modèle multilinéaire dont nous donnons les étapes de résolution. Ce modèle a l'avantage d'être logique, simple et, moyennant certaines précautions, directement utilisable et interprétable par le praticien.

Afin de permettre une bonne lecture de ce qui va suivre, il nous faut insister sur le cadre problématique dans lequel un tel modèle s'inscrit. Une analogie avec le modèle d'analyse factorielle permet de le mettre en évidence.

De façon schématique, on peut dire qu'un bon usage du modèle d'analyse factorielle se déroule dans deux situations:

1. L'utilisateur a une hypothèse *a priori* des «facteurs» rendant compte des relations unissant des variables (voire même des personnes, des occasions, Cattell 1965) et il applique le modèle pour confirmer, infirmer ou modifier son hypothèse;
2. L'utilisateur n'a pas d'hypothèse(s) *a priori* concernant ces «facteurs» et il applique le modèle pour les faire surgir; mais, ce faisant, il sait qu'il ne peut s'arrêter là: il doit construire des «situations» aptes à vérifier ces hypothèses; dans cette optique, plusieurs analyses factorielles sont souvent nécessaires.

L'utilisation du modèle de *hiérarchie multilinéaire* appelle le même type de remarques:

1. L'utilisation du modèle est particulièrement intéressante pour vérifier ou modifier une hypothèse de hiérarchie multilinéaire;
2. Dans le cas où le modèle est appliqué pour faire surgir des hypothèses, il ne faut pas oublier d'entreprendre une phase de vérification: en effet, les dépendances hiérarchiques sorties du modèle doivent être conçues comme des dépendances *possibles* et non nécessairement comme des dépendances réelles.

De plus, il est capital de souligner combien, tant pour l'A.F. que pour le modèle de H.M., ce que l'on peut en tirer dépend essentiellement de ce que l'on a entré dans le modèle et surtout de ce que l'on n'y a pas entré.

Dans le modèle de hiérarchie multilinéaire, les structures hiérarchiques qu'il permet de mettre en évidence (*sorties*) reposent sur un certain type de *relation* unissant un certain type de «matériel». Relations et matériels peuvent être multiples. En voici quelques exemples:

Tel item *est plus facile* que tel autre;

Tel comportement *est plus fréquent* que tel autre;  
 Tel objectif pédagogique *est le prérequis* de tel autre;  
 Tel événement *est antérieur* à tel autre<sup>1</sup>;  
 Tel individu *possède une propriété «x» à un degré plus élevé* que tel autre;  
 Tel critère d'évaluation *est davantage maîtrisé* que tel autre; etc . . .  
 Notre présentation s'appuiera sur le problème suivant:

*Problème étudié à titre d'exemple*

Un psychopédagogue a évalué 18 exposés oraux en fonction de 12 critères. Il constate que le critère no 1, par exemple, est réussi par 17 orateurs et que le seul orateur ayant échoué à ce critère échoue à tous les autres. A l'inverse, les deux seuls orateurs ayant réussi le critère no 6 ont simultanément accompli la meilleure performance sur l'ensemble des autres critères. Cette constatation nous amène à nous interroger sur l'existence d'une certaine hiérarchie, non nécessairement unilinéaire, entre les 12 critères.

Pour révéler si une hiérarchie est possible, nous proposons les étapes suivantes.

**A – RECHERCHE DES RELATIONS «X → Y»**

*Étape 1: Mettre les données sous forme matricielle comme dans le tableau 1.*

Orateurs (sujets)	Critères (items)											
	1	4	12	9	11	5	7	8	10	3	6	2
A	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
C	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
D	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
F	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
G	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
H	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
I	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
J	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
K	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
L	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
N	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
O	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nombre de réussites	17	12	10	8	7	7	6	6	5	5	2	2

1 Précédemment J. M. Ketele, (1976), nous avons proposé un modèle des antécédents, concomitants et conséquents pour traiter des données qualitatives se déroulant dans le temps. Le modèle hiérarchique multilinéaire présenté ici est un traitement complémentaire particulièrement utile.

- Légende: 1/ Les items doivent être présentés par ordre décroissant de réussite si l'on veut faciliter le travail ultérieur.  
 2/ 1 signifie ici la réussite totale au critère, 0 signifie ici la réussite partielle ou l'échec au critère.
- Source: de Villers G., De Ketele R., Laubin M., De Ketele J. M., Formative Evaluation of Student Lecturing: an Experiment (à paraître).

Étape 2: Établir la matrice des structures « $X = 0$  et  $Y = 1$ » infirmant la relation hiérarchique entre paires de critères.

Dans notre exemple, la relation hiérarchique est une relation en termes de prérequis qui peut s'exprimer comme suit:

« $X \rightarrow Y$ », c'est-à-dire «le critère X est prérequis du critère Y».

Le principe de la technique est le suivant: Pour qu'un critère X soit prérequis d'un critère Y, il faut que toute réussite au critère Y soit accompagnée d'une réussite au critère X (structure  $X = 1$  et  $Y = 1$ ), mais une réussite au critère X n'implique pas nécessairement une réussite au critère Y. Par contre, un échec au critère X ne peut être suivi d'une réussite au critère Y dans le cas où X est prérequis de Y (Bart & Krus), 1973). En résumé, nous avons:

Structure		Conséquence
X =	Y =	
1	1	confirme la relation possible «X prérequis de Y»
0	1	infirme la relation «X prérequis de Y»
1	0	n'infirme ni ne confirme la relation possible «X prérequis de Y»
0	0	n'infirme ni ne confirme la relation possible «X prérequis de Y»

En conséquence, si le critère X est prérequis du critère Y, le nombre de réussites au critère X ne sera jamais inférieur au nombre de réussites au critère Y (ce qui explique le rangement de la matrice de départ). Ainsi donc, dans notre problème, les critères 6 et 2 (les critères les moins fréquemment réussis) ne seront jamais des prérequis de tous les autres critères; les critères 10 et 3 (fréquence de réussite = 5) ne seront jamais prérequis de tous les autres sauf éventuellement des critères 6 et 2; ainsi de suite ...

Dans cette étape, il s'agit donc de relever, sur base du Tableau 1, le nombre de structures « $X = 0$  et  $Y = 1$ » qui infirment la relation  $X \rightarrow Y$ . Cette opération ne doit s'effectuer que pour les paires de critères où la réussite à X est supérieure à celle de Y.

Cette matrice est présentée dans le Tableau 2.

- Étape 3: En marge de la matrice établie dans la deuxième étape.
- indiquer pour chaque ligne le nombre d'échecs au critère X;
  - indiquer pour chaque colonne le nombre de réussites au critère Y.

Le résultat de cette opération est consigné dans le tableau 2 également.

- Étape 4: En marge de la matrice établie dans la deuxième étape,
- indiquer pour chaque ligne de seuil  $s_X$ ;
  - indiquer pour chaque colonne le seuil  $s_Y$ .

Dans l'absolu, c'est-à-dire si les critères étaient parfaitement valides et bien mesurés, on ne peut tolérer aucune structure  $X = 0$  et  $Y = 1$ . Dans la pratique, on doit cependant se fixer une certaine probabilité d'erreur ( $\alpha$ ), habituellement comprise entre 0 et 10%. L'établissement des seuils  $s_X$  et  $s_Y$  se fonde sur le principe déjà énoncé:  $X \rightarrow Y$  est vrai si tout critère  $Y$  réussi est accompagné (avec une tolérance  $\alpha$ ) d'une réussite au critère  $X$  et si, conjointement, tout critère  $X$  échoué ne s'accompagne pas d'une réussite à  $Y$  (avec une tolérance  $\alpha$ ).

D'où:  $s_X = (n_{0+} * \alpha)$  où  $n_{0+}$  = le nombre d'échecs au critère  $X$ ;  
 $s_Y = (n_{+1} * \alpha)$  où  $n_{+1}$  = le nombre de réussites au critère  $Y$ .

Le résultat de cette opération se trouve également consigné dans le tableau 2.<sup>1</sup>

Étape 5: Dans la matrice établie dans la deuxième étape, souligner les valeurs inférieures ou égales à la fois aux deux seuils  $s_X$  et  $s_Y$ .

L'ensemble des informations recherchées dans les étapes 2, 3, 4 et 5 sont consignées dans le Tableau 2 ci-dessous.

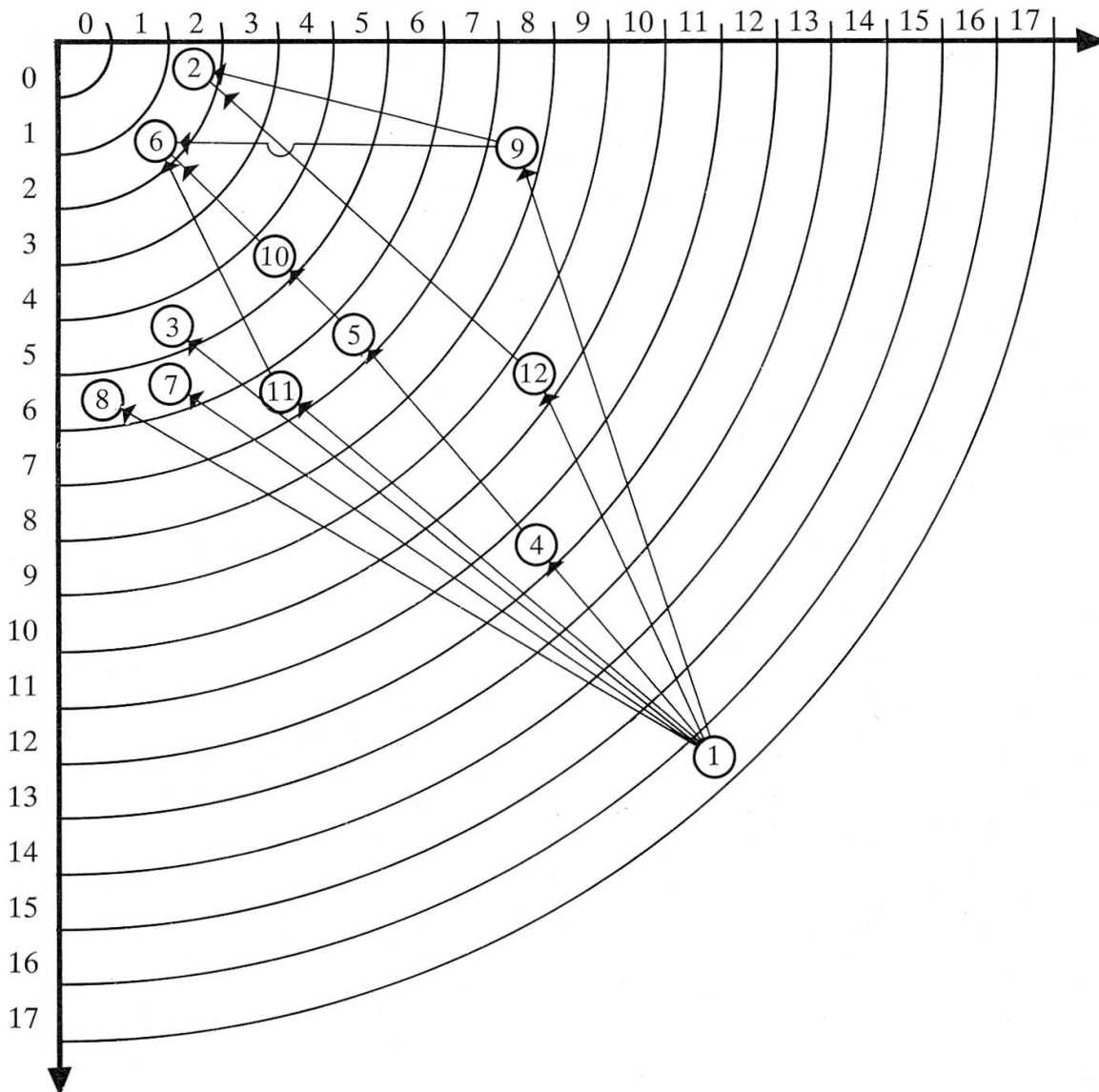
Tableau 2: Étapes 2 à 5 (recherche des relations «X → Y»)

Critères	Étape 2													Éta- pe 3 $n_{0+}$	Étape 4 $S_X$	
	1	4	12	9	11	5	7	8	10	3	6	2	$\alpha = 0$		$\alpha = .10$	
Étape 2	1	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.1
	4	–	–	3	3	2	0	2	2	0	2	0	0	6	0	0.6
	12	–	–	–	2	3	1	4	1	1	5	0	0	8	0	0.8
	9	–	–	–	–	1	3	2	2	2	3	0	0	10	0	1.0
	11	–	–	–	–	–	3	3	3	1	2	0	1	11	0	1.1
	5	–	–	–	–	–	–	5	2	0	4	0	0	11	0	1.1
	7	–	–	–	–	–	–	–	3	5	2	2	1	12	0	1.2
	8	–	–	–	–	–	–	–	–	3	4	2	1	12	0	1.2
	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	0	1	13	0	1.3
	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	2	13	0	1.3
	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	16	0	1.6
	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	16	0	1.6
Étape 3	$n_{+1}$	17	12	10	8	7	7	6	6	5	5	2	2			
Étape 4	$\alpha = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
	$s_Y \alpha = .10$	1.2	1.2	1.0	.8	.7	.7	.6	.6	.5	.5	.2	.2			

Légende: Les cases où se trouve une valeur soulignée indiquent les relations «X → Y» (5<sup>e</sup> étape). On constate ici que les relations «X → Y» sont les mêmes pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = .10$ , ce qui est assez normal vu la faible taille de l'échantillon.

<sup>1</sup> La détermination du seuil est empirique. D'autres formes plus rationnelles pourraient être envisagées.

Fréquence  
brute de  
réussite



Fréquence  
brute de  
réussite

Fig. 2: Représentation de la hiérarchie multilinéaire sur la base des tableaux 1 et 2

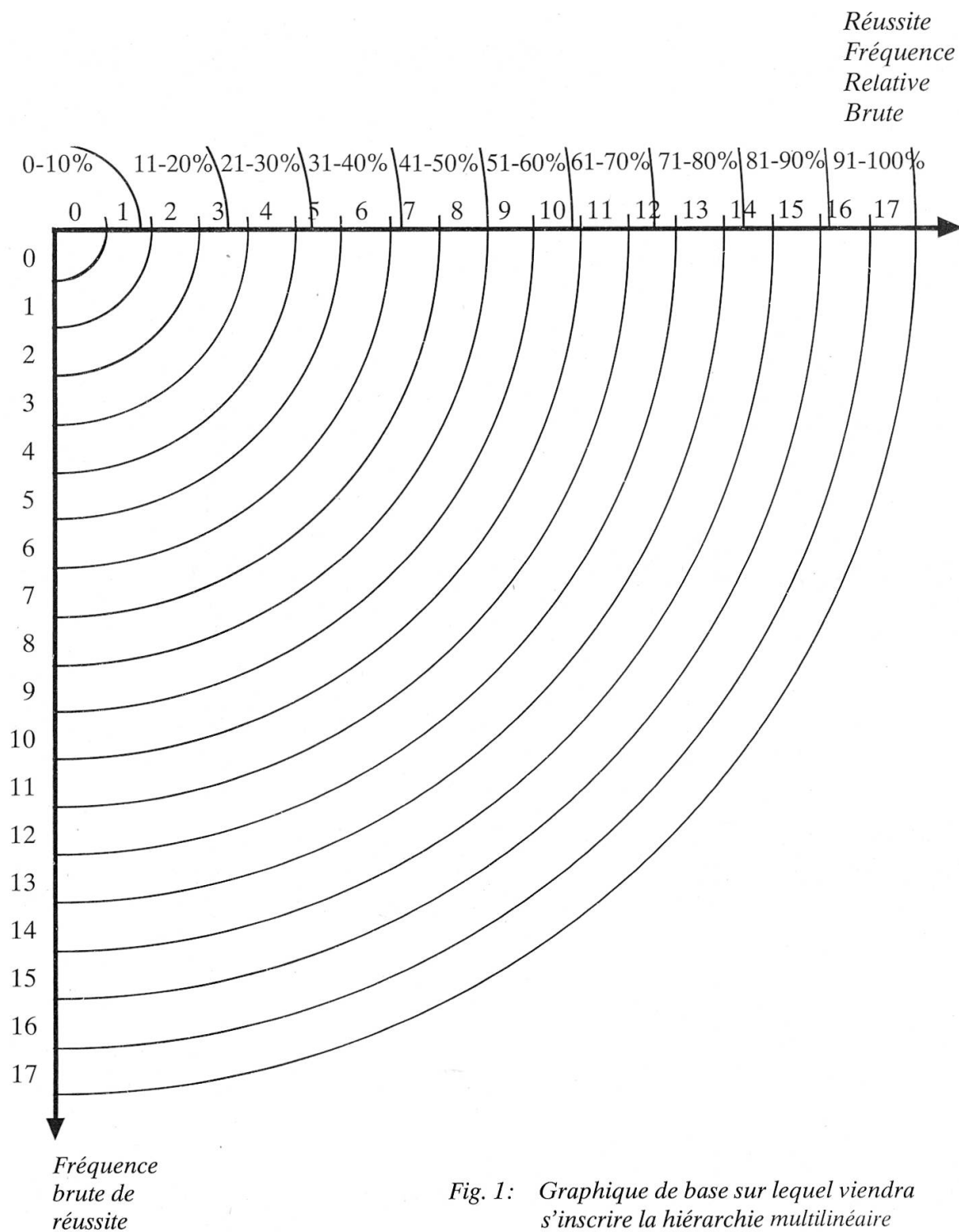
### REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA HIÉRARCHIE MULTILINÉAIRE

Jusqu'à présent (voir *Tableau 2*), nous avons extrait les relations  $X \rightarrow Y$  (pour un  $\alpha$  donné) par paires de critères. Nous savons par exemple que le critère 1 est un prérequis possible de chacun des autres, que le critère 4 est un prérequis possible des critères 5, 10, 6 et 2, etc...

Il nous reste à établir comment se structurent ces relations possibles  $X \rightarrow Y$ . L'expérience nous a montré que la méthode la plus commode et qui donne le résultat le plus parlant consiste à suivre les étapes suivantes:

*Étape 6:* Dresser le graphique de base comme dans la figure 1 ci-dessous.

On remarque qu'en abscisse et en ordonnée on place la fréquence brute ou relative de réussite au critère (selon la taille de l'échantillon). D'autre part, les cercles concentriques délimitent des zones de réussite possibles dans lesquelles viendront s'inscrire les différents critères.



*Étape 7: Établir les chaînes de prérequis.*

Au préalable, il faut rappeler que si A est prérequis de B ( $A \rightarrow B$ ) et que B est prérequis de C ( $B \rightarrow C$ ), les trois critères forment une chaîne de prérequis qui s'exprime comme suit:  
 $A \rightarrow B \rightarrow C$ .

Pour établir les chaînes possibles, on part du critère le plus prérequis (ici critère 1). Dans notre exemple, les chaînes possibles non redondantes sont les suivantes:

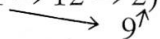
$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 6$   
 $1 \rightarrow 12 \rightarrow 6$   
 $1 \rightarrow 12 \rightarrow 2$   
 $1 \rightarrow 9 \rightarrow 6$   
 $1 \rightarrow 9 \rightarrow 2$   
 $1 \rightarrow 11 \rightarrow 6$   
 $1 \rightarrow 7$   
 $1 \rightarrow 8$   
 $1 \rightarrow 3$

*Étape 8: Placer les chaînes hiérarchiques sur le graphique de base*

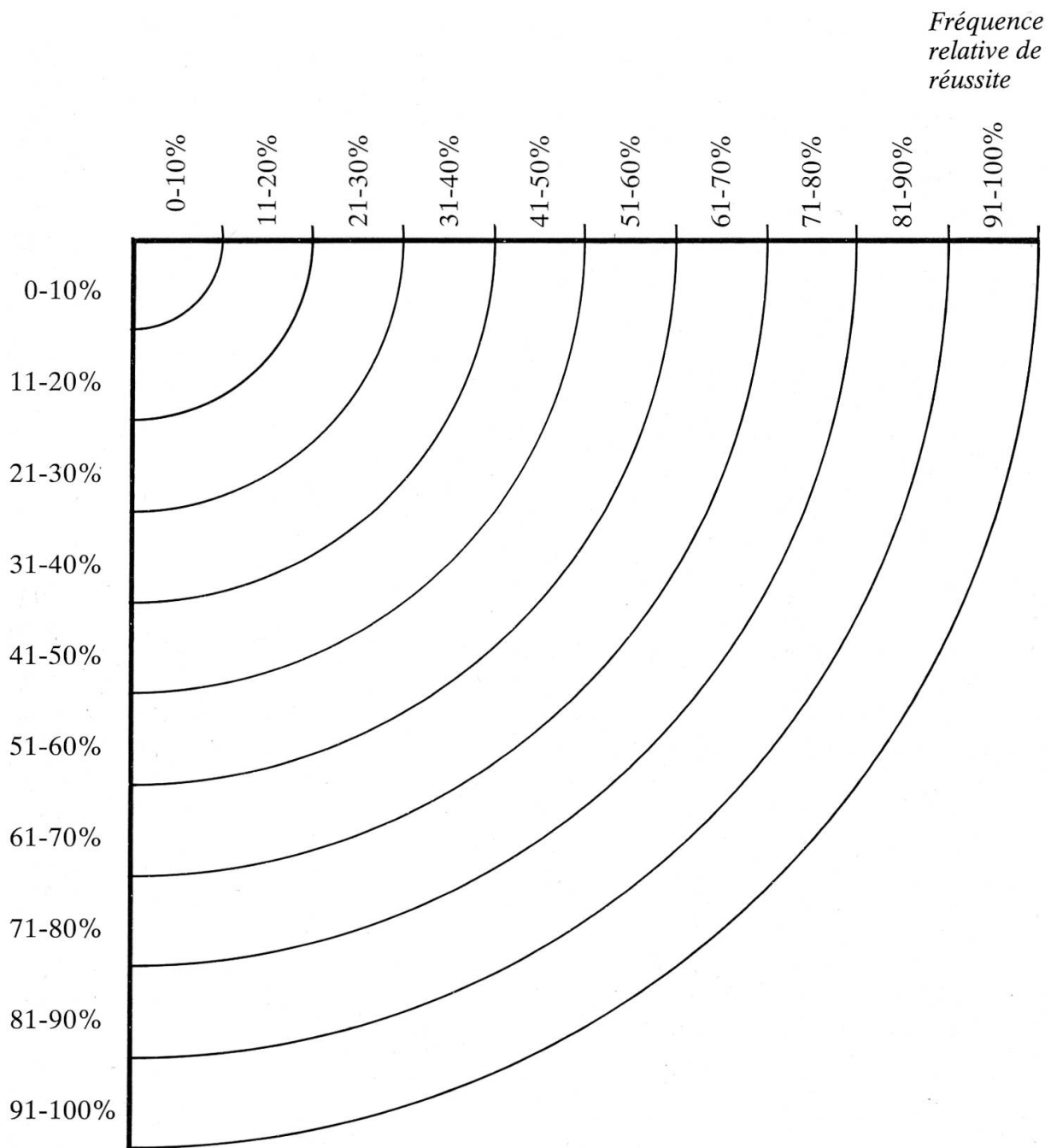
Pour établir la structure hiérarchique de la façon la plus claire possible, nous avons intérêt à chercher la plus longue chaîne et à la placer le plus centralement possible (ici, la chaîne  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 6$ ). On procède de la même façon pour les autres chaînes restantes en les plaçant par rapport aux chaînes déjà situées. (voir fig. 2)

*Étape 9: Interpréter la hiérarchie multilinéaire mise en évidence.*

Si les critères et la situation d'évaluation sont valides et si le choix de l'échantillon est adéquat aux généralisations attendues, la figure 2 nous permet de tenir le type de raisonnement suivant (ici, pour la structure  $1 \rightarrow 12 \rightarrow 2$ ):



«Réussir le critère 1 est une condition possible préalable de la réussite aux critères 12 et 9 qui sont eux-mêmes des conditions possibles de réussite au critère 2; mais la réussite au critère 12 n'est pas prérequis à la maîtrise du critère 9. Ces relations possibles devraient être vérifiées sur d'autres échantillons et d'autres situations afin de voir si effectivement il faut initier un orateur au critère 1 et à l'un au moins des critères 9 et 12 pour qu'il maîtrise le critère 2». Faisons toutefois remarquer que lorsque l'échantillon est petit (comme dans le problème ici présenté à titre d'exemple), il convient d'être prudent lorsqu'on interprète les relations portant sur les critères dont le taux de réussite est très faible (ici, critères 6 et 2).



*Fréquence relative de réussite*

Fig. 4: Graphique de base sur lequel viendra s'inscrire la hiérarchie multilinéaire

## Conclusion

Le modèle multilinéaire dont nous venons d'exposer les étapes de résolution nous paraît avantageux à divers titres. La méthode est *logique* (basée sur des structures logiques de réponses qui confirment ou infirment la relation étudiée), *facile* (elle requiert simplement de l'utilisateur un rangement des critères par ordre décroissant et un dénombrement des structures «0 – 1» qui infirment la relation étudiée) et *visualisante* (la représentation graphique permet de visualiser la structure dégagée et facilite donc l'interprétation). De plus, elle nous paraît *davantage isomorphe à la réalité* que les modèles du type Guttman (1950) comme nous le montre la comparaison entre la figure 3 établie suivant le modèle unilinéaire de Guttman et la figure 2 que nous proposons plus haut.

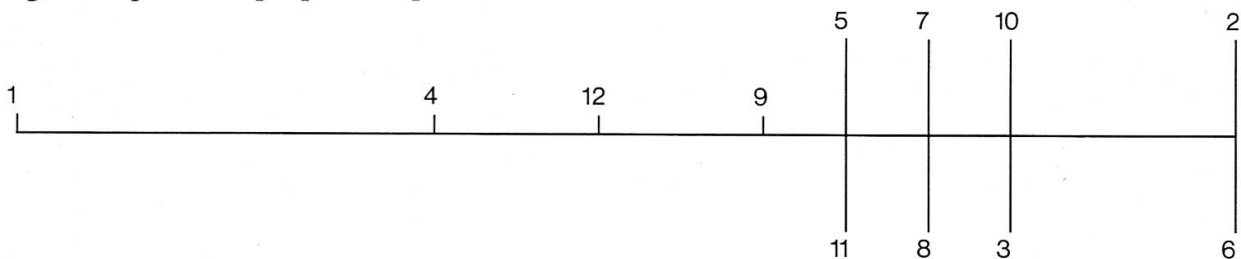


Fig. 3. Hiérarchie linéaire dégagée par la méthode de Guttman sur base des données du tableau 2 (à comparer à la figure 2).

Le coefficient de reproductibilité (calculé par l'approximation de Green, 1954) est de .87, ce qui tendrait à dire que nos critères s'inscrivent sur une quasi-échelle linéaire (quasi-scale). De tels modèles aplatissent donc la réalité au même titre qu'une moyenne arithmétique qui noie une série d'informations souvent capitales. Ainsi, par exemple, le critère 4 serait un prérequis possible du critère 12 (selon le modèle de Guttman), alors que la réalité est toute différente. De plus, à l'intérieur de notre modèle, chaque chaîne indépendante a un coefficient de reproductibilité de 1.0, ce qui montre le bien-fondé de notre technique.

Il nous faut cependant insister sur le fait que notre modèle est et doit rester un *outil* et n'a donc de valeur que relative à l'objectif poursuivi, à l'échantillon observé, à la pertinence et la validité des situations et des items, critères ou comportements étudiés. C'est pourquoi nous jugeons important de contrôler les hiérarchies dégagées, soit par répétition, soit par une expérience spécialement prévue pour les contrôler (variation de l'échantillonnage, des observateurs ou évaluateurs, de l'opérationnalisation des variables, etc.).

## Ein Modell der multilinearen Hierarchie

*Forscher und Lehrer sind häufig mit dem Problem konfrontiert, in einem gegebenen «Material» Hierarchien herzustellen. Beispiele dafür sind: Welche pädagogischen Ziele sind Voraussetzung für welche anderen? Welche Verhaltensweisen gehen im allgemeinen welchen anderen voraus? Hier werden Lösungsschritte in Form eines Modells der multilinearen Hierarchie aufgezeigt, das solche Hierarchiebildungen erleichtert. Das Modell ist nicht nur logisch, anschaulich und leicht anzuwenden, es ist zugleich in höherem Masse isomorph zur beobachteten Realität als andere Modelle wie z. B. dasjenige von Guttman. Die Anwendung des vorgeschlagenen Modells wird am Beispiel eines pädagogisch-psychologischen Problems illustriert.*

## A model of multilinear hierarchy

*Research workers and teachers are often faced with problems where one has to bring out hierarchical structures appearing in the data. For instance which educational objective comes before another? Which kind of behaviour precedes another? etc. The authors explain the steps towards*

*a solution of this problem with the help of a hierarchical multilinear model. This is not only logical, visual and easy to use but more isomorph the reality than other models such as Guttman's. The presentation is illustrated by the application of this method to a psychopedagogical problem.*

#### **BIBLIOGRAPHIE**

*Bart W. & Krus D.:* An ordering-theoretic method to determine hierarchies among items. *Educational and Psychological Measurement*, 1973, 33, 291 – 300.

*Cattel B. C.:* *Handbook of multivariate experimental Psychology*. Chicago: Rand Mac Nally, 1965.

*De Ketele J. M.:* Vers de nouveaux desseins expérimentaux: la méthode des antécédents, concomitants et conséquents. *Revue internationale des Sciences de l'Education*, 1976, 8 (1), 7 – 51.

*De Villers G., De Ketele R., Laubin M. et de Ketele J. M.:* Formative evaluation of student lecturing: an experiment. (A paraître)

*Green B. F.:* Attitude Measurement. In: Lindzey G. (Ed.): *Handbook of Social Psychology*. Cambridge: Addison-Wesley, 1954, 335 – 369.

*Guttman L.:* The basis for Scalogram Analysis. In: Stouffer S. A., Guttman L., Suchman E. A., Lazarsfeld P. F., Star S.A. and Clausen J. H. (Eds.): *Measurement and prediction*. Princeton: Princeton Un. Press, 1950.

*Matalon B.:* *L'analyse hiérarchique*. Paris-Lahaye: Gauthier-Villars, Mouton, 1965.