

Zeitschrift: Schweizer Erziehungs-Rundschau : Organ für das öffentliche und private Bildungswesen der Schweiz = Revue suisse d'éducation : organe de l'enseignement et de l'éducation publics et privés en Suisse

Herausgeber: Verband Schweizerischer Privatschulen

Band: 48 (1975-1976)

Heft: 1

Artikel: Die Erforschung der kognitiven Entwicklung als Hilfe für die Didaktik des Mathematik-Unterrichts

Autor: Fischer, Hardi

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-851931>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

zen für die geistige Entwicklung sei unbestreitbar, und selbst wenn es ihn nicht gäbe, sei dies der einzige Weg, um das Wiedererstehen bürgerlichen Klassendenkens zu verhindern.

Eine dritte Frage in diesem Zusammenhang, ob es denn auch für besonders Hochbegabte keinerlei Ausnahmen gäbe, wurde dahingehend beantwortet, daß beispielsweise besonders künstlerisch oder sportlich Begabte zwar in Spezialschulen aufgenommen würden (neuerdings auch für Fremdsprachen und Mathematik, aber nur in sehr geringer Zahl), dennoch müßte aber auch von diesen Hochbegabten in gleicher Weise praktischer Arbeitseinsatz geleistet werden.

Unserem Einwand schließlich, ob es zu verantworten sei, weder persönliche Studien- noch Berufs- und Lebenswünsche zu berücksichtigen, wurde beinahe mit Unverständnis begegnet – sogar von den betroffenen jungen Menschen selber. Die «Massen» wüßten doch sehr viel besser, wofür der einzelne geeignet sei, war die beinahe stereotype Antwort, und nach den Worten Maos käme es doch ausschließlich darauf an, die eigenen persönlichen Wünsche zurückzustellen und bedingungslos dem Volke zu dienen...

Zusammenfassend ist zu sagen, daß das chinesische Bildungssystem im Stadium der Entwicklung ist. Immerhin hat es seinem unausgebauten Schulsystem mit wenigen, hochqualifizierten Bildungsangeboten binnen weniger Jahre ein breites Fundament allgemeiner Volksbildung gegeben. Mit der konsequenten Verbindung von Theorie und Praxis, wie sie bisher noch in keinem anderen kommunistischen Land als Mittel der Gesellschaftspolitik verwirklicht wurde, setzt es auch für die bildungspolitische Entwicklung anderer Länder wichtige Akzente. China ist ein Entwicklungsland, das seine Zukunft noch vor sich hat. Im Vergleich dazu scheinen die westlichen Industriestaaten wie Ueberentwicklungsländer, die ihre Zukunft bereits hinter sich haben.

Die Erforschung der kognitiven Entwicklung als Hilfe für die Didaktik des Mathematik-Unterrichts

Hardi Fischer

Mathematische Erkenntnisse sind nicht angeboren, sie müssen individuell erarbeitet werden. Ob die kognitiven, insbesondere die Wahrnehmungsstrukturen zu den kortikalen Strukturen isomorph sind, wie das die Gestaltpsychologen glaubten nachgewiesen zu haben, ist zumindest fragwürdig. Dagegen besteht kein Zweifel darüber, daß die logischen Verknüpfungen bei Denkprozessen im Gehirn vollzogen werden, so daß rein anatomisch und physiologisch im Organismus Voraussetzungen dazu vorhanden sein müssen.

Didaktiker bemühen sich seit eh und je um die Verbesserung der Erkenntnisse ihrer Schüler. Seit *Adolphe Ferrière* sein Buch über die «Ecole active» geschrieben hat oder seit *Maria Montessori* und *Ovide Decroly*, beides Aerzte, die Selbsttätigkeit der ihnen anvertrauten minderbegabten Schüler bei der Erarbeitung der Begriffe und Operationen aus einer Intuition, die sich als richtig erwiesen hat, systematisch gefördert haben, ist klar geworden, daß die Handlung der Kinder große intellektuelle Bedeutung für sie hat. Der Grundsatz der Anschauung ist wohl ungenügend, wenn nicht gefährlich, zumindest, wenn man ihn wörtlich versteht; denn die passive Betrachtung ohne handelnde Veränderung kann zu Trugschlüssen führen oder sie fördert allerhöchstens die Imitation, wie *Jean Piaget* in unzähligen Untersuchungen an Kindern gezeigt hat. Daraus läßt sich ableiten, daß wohl die meisten Begriffe nicht direkt der Wirklichkeit entnommen werden können, also nicht das Abbild einer Wirklichkeit sind, sondern daß die Handlung und ihre Verinnerlichung (als Vorstufe zur Vorstellung) die Grundlage der Begriffsentwicklung sein müssen.

Der Zahlbegriff des Kindes ist nicht das Abbild einer Menge, die im Buch oder durch konkretes Material dargestellt wird; sie ist auch

nicht die Anordnung von unterschiedlichen Elementen, sondern im Sinne der Kardination und der Ordination beides simultan. Und da die logische Gruppierung der Klassen und die logische Gruppierung der asymmetrischen Relationen für den Zahlbegriff gleichzeitig vorhanden sein müssen, ist dieser notgedrungen eine Abstraktion. Obschon *Jean Piaget* in dieser Altersstufe – es handelt sich um die jüngsten ABC-Schützen – von den konkreten Operationen spricht, handelt es sich bei den zugehörigen Begriffen um abstrakte Gebilde, dargestellt in logischen oder mathematischen Strukturen. Konkret bezieht sich lediglich auf die Möglichkeit der Handlung mit konkretem Material, tatsächlich oder verinnerlicht. Ausschlaggebend ist dabei die Verarbeitung der eigenen Handlung in ein logisches Schema.

Besitzt man ein solches Schema oder glaubt man, ein solches zu besitzen, dann sind Antizipationen möglich, d. h. man tritt in die Phase der formalen Operationen ein. Hypothesen führen mit Hilfe der Intuition zu scheinbaren Lösungen, deren Richtigkeit erst noch überprüft werden muß. Dies ist begrenzt möglich im Bereich der Mathematik und der Naturwissenschaften. Stimmt die hypothetische oder gedankliche Lösung, abgeleitet aus dem vermeintlich richtigen formalen Modell, mit der Ueberprüfung nicht überein, dann muß die Formalstruktur oder die Kontrollhandlung falsch sein. Formales Denken ist nicht eine plötzliche Erscheinung im Verlaufe der Entwicklung, es ist zunächst anfänglich eine Konfrontation zwischen Gedanke und Wirklichkeit.

Der Jugendliche muß parallel zur Entwicklung des formalen Denkens die Methode der Kontrolle beherrschen, indem er aus der Kombinatorik der Fälle die möglichen bestimmt. Dadurch wird es ihm gelingen, seinen eigenen formalen Ge-

dankengang zu akzeptieren oder zu verwerfen. So wie *Jean Piaget* von einem labilen Gleichgewicht zwischen Assimilation der Umwelt und der Akkommodation an die Umwelt als Charakteristikum der Intelligenz spricht, so findet auch auf höherer Stufe des formalen Denkens ein Anpassungsprozeß zwischen dem eigenen hypothetischen Gedanken und der dazugehörigen Nachprüfung im Experiment statt. Durch Veränderung der formalen Schemata, die willkürlich, etwa in Richtung zunehmender Komplexität vorgenommen werden kann, und/oder durch Veränderung der Kontrollmethoden, etwa in Richtung deren Verfeinerung, wird dieses Gleichgewicht gestört und muß immer wieder neu angepaßt werden. Dadurch wird die geistige Aktivität ständig ausgelöst. Anfänglich ist, verursacht durch die Wahrnehmungen, eine Intuition zu beobachten. Diese verläuft in einer Richtung ab und ist deshalb irreversibel. Erst die Nachprüfung ist in Ergänzung zur Intuition als reversibler intelligenter Akt zu verstehen.

Nach und nach sind reine hypothetisch-deduktive Gedankengänge ohne konkrete Kontrollen möglich. Erst jetzt ist der formale Denkprozeß im Aufbau. Die Kontrollen der Aussagen erfolgen nicht mehr durch das konkrete Experiment, sondern durch die angeeignete, in sich geschlossene Gedankenstruktur. Damit ist ein Transfer auf analoge Situationen mit Verstand und ohne gedankenlosen imitierenden Drill erst möglich. Verwechslungen der mannigfachen verfügbaren logischen Denkstrukturen sind oft an der Tagesordnung. Die umgekehrte Proportionalität wird mit dem Schema der direkten Proportionalität zu lösen versucht, usw.

Die Befragungsmethode, wie sie *Jean Piaget* verwendete und der er die Bezeichnung klinisch gab, ist vom Standpunkt der Psychometrie aus kritisierbar, weil jegwelche Standardisierung fehlt. Aber auch eine kollektive Methode kann in solchen Forschungen nicht streng standardisiert werden. Wesentlich ist, daß ein Klima des Vertrauens und der Spontaneität geschaffen wird, die es

dem Schüler erlauben, freimütig zu handeln und zu sprechen. Beobachtet wird vom Versuchsleiter nicht allein die Handlung, sondern die Erklärungen dazu, nicht die Lösung allein, sondern der Weg dazu. Die verbalen Äußerungen der Schüler sind kindertümlicher, ungeschickter Art, zumindest in unseren Ohren, aber erstaunlich klar, wenn man sich die Mühe nimmt, zuzuhören.

Es wäre überaus wertvoll, wenn solche Untersuchungen nicht an mehreren Kindern, Altersstufe um Altersstufe, durchgeführt werden könnten, sondern wenn einige Kinder longitudinal begleitet werden könnten. Erst dann wüßten wir, ob das Durchlaufen der Entwicklungsstadien für alle gleich, wenn auch zeitlich verschoben wäre. Ich möchte hier betonen, daß die Streuung der Fähigkeiten mit zunehmendem Alter auch zunimmt, daß es aber allgemein schwer fällt, zu entscheiden, ob ein Jugendlicher bei einer Aufgabe einfach ein sogenannter Spätzünder sei oder ob die untersuchte Fähigkeit tatsächlich weniger stark ausgebildet sei als bei vergleichbaren Gleichaltrigen. Nicht zu unterschätzen sind in diesem Zusammenhang die blockierenden oder antreibenden Kräfte der Motivationen und Emotionen.

Wüßte man mehr über allfällige Gesetzmäßigkeiten bei der Entwicklung kognitiver Strukturen, dann könnte man sich im Unterricht danach richten, indem das Curriculum darauf Rücksicht nähme. Allerdings bliebe eben die Streuung der Fähigkeiten, und es ist ja nicht ein Zufall, daß das bisherige Schulsystem ohne organisatorische Aufsplitterung nicht mehr auskommt, selbst in der Gesamtschule nicht. Will man die Schüler in einer Gesamtschule zusammenfassen, weil dies einem sozialen Postulat entsprechen könnte, dann sind entwicklungspsychologische Gründe dafür kaum erkennbar, es sei denn, es gelänge, durch pädagogisch-didaktische Maßnahmen das zu realisieren, was unter Chancengleichheit gefordert wird. Dies aber käme einer Verknüpfung der angeborenen, vererbten Begabungen gleich. Im ganzen Kom-

plex von Anlage und Umwelt können wir nur *einen* Teil, die Umwelt, beeinflussen und steuern. Zu dieser Umwelt gehört die Didaktik und sie hat, wie eben festgestellt, ihre Grenzen.

Trotzdem bleibt die Frage offen, ob Kinder und Jugendliche nicht durch geeignete didaktische Maßnahmen besser gefördert werden könnten. Zwei Möglichkeiten stehen offen: entweder man verhilft den Schülern zu einem vertiefteren Verständnis oder man bemüht sich um eine Akzelleration, indem die Schüler Begriffe und Operationen früher verstehen lernen. Was die Akzelleration anbetrifft, so ist diese begrenzt durch die biologische Reifung. Die Diskussion darüber überschreitet den Rahmen unserer Diskussion.

Die Didaktik sollte sich wohl besser darauf beschränken, die Strukturen, die psychologisch in der Entwicklung bekannt sind, in ihrem Aufbau zu fördern, und zwar durch Bereitstellung didaktischer Hilfen. Damit kann der Schüler weitgehend selbständig vorgehen, d. h. das Prinzip der Selbsttätigkeit ist gewahrt.

Für das Verständnis mathematischer Begriffe und Operationen sind besondere Vorkehrungen erforderlich. Eine Bedingung haben wir aus der Didaktik eben erwähnt: die Selbsttätigkeit. Sie allein, so stellten wir eingangs fest, genügt zwar nicht, doch ist sie als solche schon eine Hilfe. Dies wird etwa klar bei der Verwendung programmierter Unterrichtshilfen oder der Cuisenaire-Stäbchen und -Farben, mit denen die Schüler handelnd etwas verarbeiten. Obschon ich bis heute nicht verstanden habe, weshalb etwa rot und blau sieben ergeben soll, darf dem nachweisbaren Erfolg nicht Abbruch getan werden. Nur könnte es sein, daß die Manipulation des Materials und eine Art Hawthorneffekt das Geheimnis des Erfolges ausmachen. Wenn neben diesen Einflußgrößen also auch noch mathematisch richtig konzipiertes Material verwendet würde, müßte der Erfolg noch zu erhöhen sein. Aber was heißt didaktisch oder mathematisch richtiges Material? Vielleicht



Das rote Stiefelchen

Lucia Grosse: **Das rote Stiefelchen**

Bilderbuch, 24 Seiten 31 x 22,5 cm, Fr./DM 27.50

Übersetzungen: **The Little Red Boot** (englisch) – **La petite botte rouge** (französisch) – **Den röda stöveln** (schwedisch) – **Lo Stivaletto Rosso** (italienisch)

Sternkalender 1975/1976

Erscheinungen am Sternenhimmel Ostern 1975–Ostern 1976
Herausgegeben von der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum durch **Suso Vetter**. 47. Jahrgang.

Aus dem Inhalt: Kalendarium mit astronomischen Monatsüberblicken – **Friedrich Hiebel**, Rudolf Steiner (Zum fünfzigsten Todestag) – **Friedrich Behrmann**, Von der Zukunftsbedeutung des Manichäismus (Zum 1700. Todestag des Mani am 26. 2. 1976) – **Joachim Schultz**, Begegnung eines jungen Menschen mit Rudolf Steiner – **Wilhelm Hoerner**, Die Woche beginnt mit dem Sonntag.

96 Seiten, mit zahlreichen Abbildungen. Kt. Fr./DM 14.—

Philosophisch-Anthroposophischer Verlag
Goetheanum, CH-4143 Dornach

Arbeitsblätter für das Rechnen
mit farbigen Stäben...
Bilder für Geschichten...
Chenille...
Zinnpfännchen...

Kennen Sie das grüne Handbuch von Schubiger?
Sie finden dort alles von A bis Z.

55



Stellen-Ausschreibungen und -Gesuche

Auskunft durch die Inseraten-Verwaltung:

M. Kopp, Kreuzstraße 58, 8008 Zürich

(Bei Anfragen bitte Rückporto beilegen)

Gesundheit und Freude durch Bewegung

Auf der richtigen Unterlage
Auf den **AIREX®**-Gymnastik-
matten.

Atlas

Grösse 125 x 200 cm
grün

Corona

Grösse 100 x 185 cm
rot

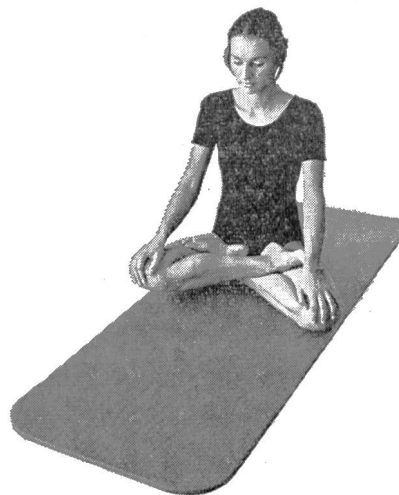
Coronella

Grösse 60 x 185 cm
rot

AIREX®-Matten

hergestellt aus geschlossenzelligem
PVC-Schaumstoff, Staub-, schmutz-
und wasserdicht, lichteht und alter-
ungsbeständig, hygienisch, leicht zu
reinigen, beidseitig verwendbar,
nicht rutschend, immer flachliegend,
weich und angenehm federnd.

® eingetragene Marke



COUPON

Bitte Senden Sie uns Unterlagen über die
Gymnastikmatten AIREX®, Typen Atlas,
Corona und Coronella.

Name: _____

Strasse: _____

Ort: _____

Bitte einsenden an

Eugen Schmid AG, 5610 Wohlen Telefon 057/6 16 89

SER

ist die Materialfrage weniger wichtig als deren richtige Präsentation, die wie bei den logischen Blöcken von *Dienes* z. B. Kontrolltätigkeiten erlauben. Ob die direkte Proportionalität durch Messungen in der Ebene oder bei Messungen von Wasserspiegelhöhen bei Gefäßen erarbeitet wird, scheint nicht so relevant; dagegen dürfte es die Gleichwertigkeit der beiden Strukturen, die an verschiedenem Material geübt werden kann, sein. Dabei handelt es sich weniger um den Transfer von einer Situation in die andere, als vielmehr um die heuristisch gewonnene Entdeckung der eben erwähnten Gleichwertigkeit der zugehörigen Strukturen.

Selbst Schüler, die im Physikunterricht das (mathematische) Pendel behandelt haben und die zugehörige Formel kennen, vermögen diese oft nicht zu verstehen. Umgekehrt können Schüler der unteren Klassen der Mittelschulen durch eine falsche Experimentation – etwa durch gleichzeitiges Verändern verschiedener Einflußgrößen – die Abhängigkeit der Schwingungsfrequenz von der Länge nicht selbst erforschen, geschweige denn, daß sie die Formel herleiten könnten!

Im Beispiel des Pendels geht es um eine Gesetzmäßigkeit, die viel komplexer ist als etwa die Linearität, die auf der Idee der Proportionalität aufbaut. Weil der Schüler dazu noch gar nicht reif ist, kann das Gesetz in der Formalsprache nur schwer verstanden werden. Dagegen ist der logische Zusammenhang von Länge, Gewicht und Schwingungsfrequenz denkbar.

Noch bleibt die Frage offen, ob *Bärbel Inhelder* und *Jean Piaget* aufgrund ihrer Beobachtungen zur Aussage berechtigt waren, die zugehörige Denkstruktur sei eine kommutative mathematisch-logische Gruppe. Die zitierten Beobachtungsprotokolle lassen einen solchen Schluß nicht erkennen. Dagegen ist es so, daß die Jugendlichen die qualitativen Zusammenhänge vor den quantitativen verstehen, so wie Primarschüler auch über die Stufe der qualitativen Erfassung zur quantitativen gelangen, wenn sie die er-

sten konkreten Begriffe der Mathematik entdecken (z. B. Zahl und gemeiner Bruch). *Hans Biäsch* und ich entdeckten bei der Eichung der Testreihen für Schweizer Kinder, daß bei der Aufgabe an die Schüler, einen kubischen Wohnblock mit kleineren Würfeln von einer Inselfläche auf eine kleinere zu transponieren, diese schon im 10. Altersjahr entdecken, daß in Funktion der kleineren Fläche die Höhe des Neubaus größer sein muß. Aber erst ganze drei Jahre später lösen sie die Aufgabe spontan durch genaue Volumenberechnung quantitativ.

Man ist geneigt, denen zuzustimmen, die aus den erwähnten Gründen die Mengenlehre als Vorstufe logischen und mathematischen Denkens eingeführt haben möchten. Tatsächlich werden die logischen Operationen hier vor jeder Quantifizierung geübt. Die Einseitigkeit der Methode besteht nur in der Ueberbetonung der Kardination gegenüber der Ordination. Schließlich sind auch die behandelten Gesetze recht weltfremd, so daß die Kinder im Alltag wenig profitieren. Auch Naturwissenschaftslehrer bedauern, daß sie ihren Stoff ohne die konventionelle Mathematik nicht mehr vortragen können.

Ich komme zum Schluß. Die Didaktik des Mathematikunterrichtes dürfte nicht allein in der didaktisch richtigen Anordnung der Mathematikthemen liegen. Sie hängt zu einem großen Teil von der Verarbeitungsfähigkeit der Schüler ab. Die Frage der Gesetzmäßigkeit der Entwicklung ist auf weite Strecken noch ungelöst.

INTERNATIONALE UMSCHAU

Die 22. Internationale Lehrertagung 1975 findet vom 20. bis 26. Juli 1975 im Kinderdorf Pestalozzi in Trogen statt.

Thema: «Die Bedeutung des Rhythmischen in der menschlichen Entwicklung».

Weitere Unterlagen sind erhältlich durch: Lehrertagung Trogen, c/o SLV, Ringstraße 54, Postfach, 8057 Zürich.

Vom 2. bis 6. August 1975 findet ein Symposium über das Thema «Angstbewältigung als pädagogische Aufgabe» statt. Weitere Auskünfte: A. Engelberg, A-6522 Prutz/Ried.

SCHWEIZER UMSCHAU

Die Sektion für musische Erziehung der Akademie Amriswil führt am 19. u. 20. April 1975 auf Schloß Hagenwil bei Amriswil unter dem Titel «Praxis der kreativen Phantasie-Entfaltung» eine Lehrveranstaltung durch.

Nähere Angaben bei Akademie Amriswil, Postfach 15, 8580 Amriswil.

BUCHBESPRECHUNGEN

Henra F. Ellenberger: «*Die Entdeckung des Unbewußten*». 2 Bände, 1184 S. SFr. 84.—. Verlag Hans Huber, Bern.

Die englische Ausgabe wurde vorbildlich von Gudrun Theusner-Stampa übersetzt. Dem Autor ist ein großer Wurf gelungen. Der Verlag ist zu beglückwünschen für die Herausgabe dieses einschlägigen Werkes. Die spannend geschriebene Darstellung der Entdeckung des Unbewußten vermag weite Kreise zu fesseln. Das monumentale geistesgeschichtliche Werk wurde in jahrelanger Arbeit geschrieben. Der Stammbaum der modernen Psychotherapie und Tiefenpsychologie wird bis in kleine Verästelungen deutlich, lebendig und in seinen Zusammenhängen evident.

Das Buch klärt nicht nur Vergangenes, sondern führt wegweisend in die Zukunft. Das Buch ist nicht nur interessant als Geschichte des Unbewußten, sondern dank der Vorgeschichte auch als Nachschlagewerk wertvoll. Nicht nur für Psychologen und Psychotherapeuten ist es bedeutsam, sondern auch für Pädagogen. Kinder werden erklärt und in einem neuen Licht gesehen. L.

«*Amazonas – Strom der grünen Hölle*». Schweizer Verlagshaus AG, Zürich. 372 Seiten.

Eine faszinierende Geschichte eines Stromes – des mächtigen Amazonas. Seit dem Angriff der kriegerischen Amazonen auf die Männer des Francisco de Bolivar ist er als Strom der Amazonen bis auf den heutigen Tag geheimnisvoll geblieben. Mit ... beginnt St.Clair die Historie, die sich spannend wie ein Abenteuerroman liest. Der Autor hat nicht nur ethnologische und geographische Studien betrieben und die einschlägige Literatur durchgearbeitet. Er kennt den mächtigen Amazonas aus eigener Erfahrung. – Ein sehr interessantes Buch, das sich auch als Geschenk gut eignet. Ja