

Zeitschrift:	Schweizer Erziehungs-Rundschau : Organ für das öffentliche und private Bildungswesen der Schweiz = Revue suisse d'éducation : organe de l'enseignement et de l'éducation publics et privés en Suisse
Herausgeber:	Verband Schweizerischer Privatschulen
Band:	8 (1935-1936)
Heft:	4
Artikel:	Mathematische Erziehung in der Volksschule [Fortsetzung]
Autor:	Bachmann, Ernst
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-850443

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZER ERZIEHUNGS-RUNDSCHAU

ORGAN FÜR DAS ÖFFENTLICHE UND PRIVATE BILDUNGSWESEN DER SCHWEIZ

45. JAHRGANG DER „SCHEIZERISCHEN PÄDAGOGISCHEN ZEITSCHRIFT“ 29. JAHRGANG DER „SCHULREFORM“

Herausgegeben von Dr. K. E. Lusser, Institut Dr. Schmidt, St. Gallen, in Verbindung mit Universitäts-Professor Dr. P. Bovet, Prof. Dr. v. Gonzenbach, Prof. Dr. W. Guyer, Prof. Dr. H. Hanselmann, Rektor J. Schälin und Seminar-Direktor Dr. W. Schohaus • Redaktion des allgemeinen Teiles: Seminar-Direktor Dr. W. Schohaus • Redaktion von „Schulleben und Schulpraxis“ Professor Dr. W. Guyer

ZÜRICH

JULIHEFT 1935

NR. 4 VIII. JAHRGANG

Mathematische Erziehung in der Volksschule (2. Teil)

Von Dr. Ernst Bachmann, Kreuzlingen

Das Problem, das hier erörtert wird, ist im 1. Teil (Juniheft) folgendermaßen formuliert worden: *Welche geistigen Kräfte des Volksschülers, also des Menschen von sechs bis fünfzehn Jahren können durch die Mathematik (vor allem durch die Geometrie) gefördert werden, und wie ist der Unterricht zu diesem Zweck zu gestalten?* Die im allgemeinen vorhandene Analogie zwischen der geistigen Entwicklung der Menschheit und derjenigen des einzelnen Menschen erlaubte, die drei in der Geschichte der Geometrie erkannten Entwicklungsstufen auf die mathematische Erziehung in der Schule zu übertragen. Die Bildungsarbeit der ersten Stufe: *Schulung des Geistes zu klaren Raumvorstellungen* ist zunächst der Vorschulzeit und der Elementarschule zugewiesen worden, sie bleibt aber in den Mittel- und den Oberklassen der Volksschule und weit darüber hinaus von unverminderter Wichtigkeit. Neben sie treten nun neue mathematische Betätigungen, diejenigen der zweiten Stufe: *Empirisches Feststellen geometrischer Gesetzmäßigkeiten*, und der dritten Stufe: *Logische Begründung und Verknüpfung dieser Gesetze*.

Es ist eine der wichtigsten und umstrittensten Fragen der mathematischen Erziehung, wann der Übergang von der zweiten zur dritten Stufe stattfinden soll. Eine extreme Antwort hierauf gaben früher die deutschen Mittelschulen, welche an die 3. oder 4. Klasse der Volksschule anschlossen und ohne weitere Vorbereitung in ihrer 2. Klasse (Quinta der Realschulen) oder 3. Klasse (Quarta der Progymnasien) — also mit Zehn-, Elf- und Zwölfjährigen — eine systematische, logische Geometrie begannen. Die zweite Stufe war also vollständig unterdrückt; später wurden ihr einige Wochen eingeräumt, indem in einem Vorkurs die einfachsten Körper: Würfel, Prisma usw. kurz betrachtet wurden. Die entsprechenden englischen Schulen benutzten für den Geometriunterricht sogar das 2200 Jahre alte systematische Buch von Euklid. Daß bei uns die obren Klassen der Primarschule zur zweiten Stufe gehören, darüber sind wir wohl alle einig. Aber wie steht es mit der Sekundarschule? Empirie

oder Spekulation? Anschaulich oder abstrakt? Fragen wir die Jugendpsychologie! Sie sagt:

Erst durch die gewaltige psychische Revolution, die mit der *Entwicklung zur Geschlechtsreife* verbunden ist, erhalten die jungen Menschen die *Fähigkeit abstrakten Denkens*, die Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, welche selbständiges Arbeiten mit Zahlbegriffen und geometrischen Begriffen erfordert.

Dr. Katz schreibt in „Psychologie und mathematischer Unterricht“: „Man soll vor und während der Pubertätsentwicklung nicht zu hohe Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit stellen und mehr einen die Anschauung berücksichtigenden Lehrgang einschlagen.“ A. Höfler in „Didaktik des mathematischen Unterrichts“: „Angesichts des Wahns, daß schwierige geometrische Beweise Knaben von zwölf Jahren beigebracht werden müssen, möchte man wirklich nach ‚Kinderschutz‘ rufen. Und ist es denn nicht einem gefürchteten Kindeslaster verzweifelt ähnlich, wenn man vorzeitig intellektuelle Leistungen gewaltsam hervorlockt, wiewohl der seelische Organismus eines Zehn- bis Dreizehnjährigen für sie noch nicht reif ist.“ Und W. Voigt in einer Untersuchung über die Anlage zum Rechnen: „Die Entfaltung erfolgt sprunghaft, bei Mädchen im 13., bei Knaben im 14. Lebensjahr.“

Was den Rechenunterricht anbetrifft, können wir also feststellen, daß der Übergang vom empirischen Rechnen zur allgemeinen Arithmetik und zur Algebra in der 2. oder 3. Klasse der Sekundarschule psychologisch richtig ist. Von der Geometrie werden wir das nur dann behaupten können, wenn wir außer der Primarschule auch einen großen Teil der Sekundarschule der zweiten Stufe zuteilen. Erst im Laufe der Sekundarschule vollzieht sich dann der Übergang zur dritten Stufe, nicht durch einen plötzlichen Wechsel, sondern durch eine die ganze Sekundarschule hindurch dauernde Gleichzeitigkeit beider Stufen, durch ein dichtes Verflechten anschaulicher und logischer Beweisführung, in dem allmählich der logische Einschlag stärker und stärker wird.

Die Forderung einer *empirischen Geometrie* stützt sich aber erst in letzter Linie auf die Notwendigkeit, den Beginn der systematischen, logischen Geometrie hinauszuschieben. Sie ist nicht ein nebенächliches Füllsel, sondern ein wesentlicher Bestandteil mathematischer Forschung und mathematischen Denkens. Die Geschichte der Mathematik zeigt nicht nur in ihrer vorgriechischen und frühgriechischen Zeit, daß die geometrischen Erkenntnisse erst durch Anschauung, durch Erfahrung gewonnen werden müssen, ehe man sie ordnen und miteinander logisch verknüpfen, d. h. eben beweisen kann. Fast jedes einzelne geometrische Problem hat diese Entwicklung von der empirischen Feststellung zur logischen Begründung durchgemacht. Selbst die größten Geister aus der Geschichte der Mathematik von Pythagoras bis Gauß haben von Einzelfällen aus das mathematische Gesetz zuerst intuitiv erfaßt, also sozusagen erraten und erst nachher die logische Kette geschmiedet. Pythagoras zum Beispiel hat von den Ägyptern die Erfahrungstatsache übernommen, daß ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 rechtwinklig ist, von den Indern wurde die Rechtwinkligkeit des Dreiecks 5, 12, 13 überliefert und Pythagoras fand zunächst selber noch weitere Zahlenbeispiele. Dann konnte er den Satz, der seinen Namen trägt, am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck beweisen, wo er in die Augen springt, und noch später erst gelang der allgemeine Beweis. Von Gauß, dem Fürsten der Mathematiker, der alle andern um Haupteslänge überragt, sagt Felix Klein in den Vorbemerkungen zu Gauß' wissenschaftlichem Tagebuch: „Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit die Beweise zu zwingen.“ An anderer Stelle sagt Klein: „Die Mathematik ist in gewissem Sinn von denen am meisten gefördert worden, die mehr durch Intuition als durch strenge Beweisführung sich auszeichneten.“ Und schließlich Pestalozzi 1799 in seinem Bericht über Stans: „Nach meinen Erfahrungen hängt alles davon ab, daß jeder Lehrsatz ihnen durch das Bewußtsein intuitiver, an Realverhältnisse angeketteter Erfahrung sich selber als wahr darstelle.“

Diesen Zeugnissen ist einiges Gewicht nicht abzusprechen. Sie stammen auch nicht von heute. Wie kommt es, daß trotzdem der Geometrieunterricht an der Sekundarschule sich bestrebte, systematisch und logisch zu sein? Die Sekundarschule ist hierin stark von der Mittelschule beeinflußt worden, deren untern Klassen sie parallel läuft und an die sie einen Teil ihrer Schüler abgibt. Der Mathematiklehrer der Mittelschule wurde durch seinen Studiengang in hohem Maße mathematisch, aber fast gar nicht psychologisch geschult. Die psychischen Voraussetzungen in seinen Schülern kannte er nur ungenügend, aber klar stand in seinem geistigen Besitz eine mehr oder weniger vollendet logische Form der Mathematik. Diese logische Mathematik streng zu unterrichten, betrachtete er zwar deswegen als seine Aufgabe, weil man ihr einen gewaltigen logischen Bildungswert nachrührte, aber die Gefahr war groß, daß er es vielmehr deshalb tat, weil er innerlich an sie gebunden war und ihm jede Zuhilfenahme anschaulicher Mittel ein Verrat schien an dem Ideal, dem er verpflichtet war. So gab es an den Mittelschulen nicht wenige vorzügliche Mathematiker,

deren Unterricht entweder als langweilig und zwecklos verschrieen, oder als schwer und unverständlich gefürchtet war, und eine beträchtliche Anzahl der Schüler, wenn nicht gar die Mehrzahl, tröstete sich mit der Deklaration: „Mathematisch unbegabt.“ Noch 1919 schrieb der Mathematikpädagoge Lietzmann: „Wenn man sich in der Welt von heute umhört, so hat man den Eindruck, als ob von allen Fächern, die auf den höhern Schulen gelehrt werden, die Mathematik das bestgehaßteste sei.“ (Die sprachlich schreckliche Superlativhäufung gibt dem Ausspruch wohl genügend Nachdruck!) Im Jahre 1926 führte eine Umfrage des „Berliner Tageblatts“ bei führenden Persönlichkeiten deutscher Politik, Wirtschaft und Kunst zu geradezu niederschmetternden Auskünften über die Rolle der Mathematik im Schulleben dieser immerhin begabten und gescheiten Leute.

Was heißt denn überhaupt: Dieser Schüler ist in jenem Fach unbegabt? Das heißt doch wohl: Es besteht ein zu großer Unterschied zwischen den Anforderungen des Fachs und den Kräften des Schülers. Gewiß wird es in allen Fächern etwa Schüler geben, die zurückbleiben, während sie in den übrigen Fächern gut oder ordentlich sind. Wenn aber ein großer Teil der Klasse dem Unterricht nicht oder nur mühsam zu folgen vermag, ist es wohl Zeit, Inhalt und Methode gründlich zu prüfen. Das ist auch geschehen. Die Gewährsleute der eben zitierten harten Urteile haben ihre Mittelschule wohl meist vor 1900 durchlaufen. Seither haben im Mathematikunterricht gewaltige Reformbestrebungen eingesetzt (zum Beispiel die Meraner Vorschläge). Die strengen Definitionen und Beweise haben vielfach verständlicheren, anschaulicher Beweisführungen Platz gemacht. Immerhin ist das Schlagwort: Mathematisch nicht begabt! noch lange nicht verschwunden. Der Mathematiklehrer, der nicht an einer Fachschule, sondern an einer allgemeinen Bildungsanstalt unterrichtet, wird solange nicht zufrieden sein können, als die Meinung besteht, daß es zum Verständnis des Mathematikunterrichtes einer besondern mathematischen Anlage bedürfe. Entweder unzufrieden mit den Leuten, die ein Urteil, das inzwischen grundlos geworden ist, immer noch zu Markte tragen, oder unzufrieden mit sich selbst, wenn der Vorwurf noch zu Recht besteht.

Ich habe bisher die Forderung einer empirischen Geometrie für die Sekundarschule begründet mit der Unreife des Sekundarschülers für eine vorwiegend logische Geometrie und mit dem Hinweis auf den geschichtlichen Werdegang der mathematischen Probleme. Die eindringlichste Begründung dieser Forderung ergibt sich aber, wenn wir zum Grundproblem, das ich an die Spitze dieser Arbeit gestellt habe, zurückkehren: Wie ist die Geometrie zu betreiben, daß sie die geistigen Anlagen des Schülers möglichst fördert? Es herrscht zwar immer noch die Meinung vor, daß vor allem die streng logische, systematische Geometrie oder gar nur diese geeignet sei, die formale Aufgabe der Geistesbildung zu erfüllen. Sehen wir aber näher zu, so zeigt sich, daß diese Schulung eine höchst beschränkte, einseitige, engherzige ist. Von den vielen geistigen Anlagen, die im Schüler bereit liegen, werden nur ganz wenige gefördert: die Fähigkeit des Definierens, des logischen Schließens, des Systematisierens, während ebenso wertvolle vernachlässigt werden: die Sinne, das Vorstellungsvermögen, Phantasie und Intu-

ition, die Fähigkeit der Kritik, des Vergleichens, des funktionalen Denkens und meist auch die ganze Sphäre des Fühlens und Wollens. Selbst vorausgesetzt, daß es im Wesen der Geometrie liege, gerade die zuerst genannten Kräfte in ganz besonderem Maße zu fördern, ist es doch psychologisch falsch, die Beziehungen der Geometrie zu allen andern Kräften zu unterbinden, die sie ebenfalls, wenn auch in geringerem Maße, zu fördern imstande ist.

Das Bestreben, möglichst viele Kräfte des Schülers möglichst intensiv zu mobilisieren, erfordert eine ganz bestimmte Lehrmethode. Es kann auf keinen Fall die dozierende sein, denn diese verurteilt den Schüler zur Passivität. Aber auch das Frage- und Antwortspiel der sogenannten heuristischen Methode, auf die wir vor wenig Jahren noch stolz waren, veranlaßt den Schüler nicht genügend, seine Kräfte zu gebrauchen. Die Fragen sind vielfach in hohem Maße suggestiv. Eine solche Lektion kann vom Lehrer zu Hause bis in die kleinsten Einzelheiten jeder Frage und jeder Antwort ausgearbeitet werden und läuft dann wie am Schnürchen. Schlag auf Schlag kommen die vorausgesehenen Schülerantworten. Zwischen Frage und Antwort kann nur eine recht bescheidene Anstrengung des Schülers liegen, er hat nicht viel mehr als seine Sprechwerkzeuge betätigt. Wenn der Lehrer den Schüler zu eigener geistiger Tätigkeit bringen will, muß er es anders anstellen. Er muß diese allzu bestimmten Fragen durch eine allgemeine Problemstellung durch Hinweise, Andeutungen, Aufforderungen ersetzen. Oder noch besser: Er muß den Schüler dazu bringen, selber solche Probleme zu finden und zur Diskussion zu stellen. Es ist dann eine Frage seines psychologischen Geschicks, ob er sich in den Geist des noch erfolglos tastenden Schülers hineinversetzen, hier einen hemmenden Riegel wegschieben, dort durch einen kurzen Lichtstrahl auf einen möglichen Weg hinweisen kann. Mit andern Worten: Unterrichtsmethode muß das *Klassengespräch* sein im Sinne des *Arbeitsprinzips*.

An dieser gemeinsamen Arbeit kann der Schüler nur dann aktiv teilnehmen, wenn die Anforderungen seinen Kräften angemessen sind. Die Euklidische Geometrie, die mit ihrer logischen Strenge ausgerechnet diejenigen Kräfte beansprucht, die noch ungenügend entwickelt sind, muß vorläufig ganz zurücktreten. Die empirische Geometrie aber, die gewissermaßen den Charakter derjenigen Naturwissenschaft hat, in der man mit den einfachsten Mitteln forschen und experimentieren kann, kommt der Denkrichtung der Vorpubertätszeit aufs glücklichste entgegen. Die Anforderungen dieser Geometrie stehen gerade in jenem kleinen Abstand über den vorhandenen geistigen Kräften, daß sie diese fördern ohne sie zu überfordern. Der Schüler fühlt sich seiner Aufgabe gewachsen, er bekommt Vertrauen in seine Kraft. Wer sich etwas zutraut, kann etwas. Der Erfolg stellt sich ein. Was man kann, tut man gern. Gefühl und Wille sind mobilisiert.

Welches sind die Forschungsmethoden dieser Geometrie? Es sind zunächst: Zeichnen, messen, drehen, umklappen, ausschneiden, aufeinanderlegen usw. Dann die Herstellung beweglicher Modelle, die Erforschung ihrer Veränderungen und schließlich, davon angeregt, Konstruktionen, ganze Konstruktionsreihen und Messungsreihen. Die Konstruk-

tionen führen auf allerlei Entdeckungen, sie lassen uns Eigenschaften, Zusammenhänge, Gesetze vermuten, ahnen, erraten, Spannung und Interesse sind geweckt, Probleme treten auf, Phantasie und Intuition treten in Funktion. Die beweglichen Modelle, die Konstruktionsreihen und Messungsreihen sind der Anlaß zu einer Denkschulung, die an Bildungswert nicht hinter dem logisch-systematischen Schließen der dritten Stufe steht. Es ist das *funktionale Denken*, von dem der erwähnte Meraner Lehrplan sagt: „Neben der formalen logischen Bildung sollen die Stärkung des Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens die zentralen Aufgaben sein.“ Dieses funktionale Denken betrachtet alle seine Objekte als veränderliche Größen, die mit andern veränderlichen Größen in gegenseitiger Abhängigkeit stehen. Es bemüht sich, diese Abhängigkeiten, diese Zusammenhänge zu überschauen, zu durchschauen. Das funktionale Denken ist die Denkweise, die nichts Isoliertes, zufällig Vorhandenes kennt, sondern in allem und überall Ursache und Wirkung sieht. Es ist die Betrachtungsweise, nach welcher jede Wissenschaft strebt. Das funktionale Denken soll von der Mathematik aus, wo es sozusagen in Reinkultur wie ein Bakterium auf seinem Nährboden gezüchtet werden kann, sich über alle Gebiete menschlicher Erfahrung ausbreiten. Das phantasievolle, wundergläubige, märchenelige Kind denkt nicht funktional. Es wird durch die empirische Geometrie dazu erzogen.

Da die Figuren nun veränderlich, beweglich, lebendig sein müssen, treten Kreide und Wandtafel zeitweise in den Hintergrund. Stäbe, Schnüre treten an ihre Stelle, die Stäbe häufig durch Lochung und Schnur gelenkartig verbunden. Ausziehbare Vorhangstäbe sind sehr geeignet. Den Vorgang der Bewegung und Formveränderung verfolgen wir je nach der Schwierigkeit des Vorganges und der Reife der Schüler bald nur durch aufmerksames Betrachten, bald durch Messungen und durch Konstruktionsreihen, die zahlreiche Stadien des Prozesses festhalten. Größere und umständlichere Messungsreihen werden auf die Schüler verteilt und die Ergebnisse der ganzen Klasse gemeinsam in Tabellen zusammengestellt, so vor allem die *empirischen Flächenermittlungen* durch Zählen der in der Fläche enthaltenen Flächeneinheiten. Wir zeichnen dazu die Figuren auf kariertes Papier, am besten auf solches, das in Zentimeterquadrate und Millimeterquadrate eingeteilt ist. Ich halte es für sehr wichtig, daß der späteren Flächenberechnung ein ausgiebiges direktes Flächenausmessen vorangeht, sonst wird die Inhaltsberechnung rasch ein leerer Mechanismus. Wohl geht man überall bei der Ableitung der Rechtecksberechnung vom Begriff des Flächenüberdeckens mit Maßquadraten aus, aber schon dies geschieht häufig recht abstrakt mit ein paar Kreidestrichen an der Wandtafel statt mit einer Reihe von Dezimeterquadraten aus Pappe, mit denen man wirklich eine Rechtecksfläche (Tisch) überdeckt. Ist dann das Rezept gefunden, so verschwindet der letzte Rest der grundlegenden Vorstellung in der Versenkung, und übrig bleibt die Einübung eines Rechenschemas.

Wir können die empirische Flächenmessung auf beliebig geformte Flächen anwenden. Die Inhalte einer Reihe von Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe, oder gleicher Höhe verschiedener Grundlinie, oder gleicher Grund-

linie verschiedener Höhe, jeweils mit Grundlinie und Höhe (und ev. auch weiteren Stücken der Figuren) zusammen tabelliert, enthalten den Zusammenhang zwischen diesen Größen und führen zur Dreiecksformel, die man nachträglich mit der Rechtecksformel logisch verknüpft, d. h. sie durch diese beweist. Messen wir die Inhalte von Kreisen, vergleichen mit den Radien, so finden wir π und die Inhaltsformel. Es versteht sich, daß wir π schon einmal gefunden haben, als wir nämlich an einer Reihe von Kreismodellen: Holzzyllindern, Blechbüchsen, Pappohren, Käseschachteln usw. Umfang und Durchmesser maßen. Auch hier wird erst, nachdem Umfangsformel und Inhaltsformel für den Kreis feststehen, ihre logische Verknüpfung vorgenommen. So geht dem Schüler auch die Ökonomie der logischen Verknüpfung auf. Es geht ihm wie dem Wanderer, der die heiße, staubige Landstraße mit ihren vielen Kehren emporgestiegen ist und nun am Ziel zurück schauend den kurzen, schattigen, wenn auch steilen Fußweg sieht, den er auch hätte gehen können. Er bekommt Sinn für solche Wege. — Wie hübsch ist ferner die Anwendung dieser Flächenmessung etwa auf ein Pflanzenblatt, wenn man eben in der Botanik die Bedeutung desselben als Lichtempfänger erkannt hat. Von den Messungsreihen und Tabellen führt die Entwicklung schließlich zu den graphischen Darstellungen, die man nicht vernachlässigen wird.

Etwas freilich erfordert die empirische Geometrie, durchgeführt nach dem Arbeitsprinzip: Zeit, viel Zeit! Der Lehrer muß sich selbst möglichst ausschalten und die Initiative an die Schüler abgeben. Er muß immer warten können. Er muß dem Schüler Zeit lassen, auch Irrwege zu gehen. Dann wird der Schüler selbstständig und kritisch werden. Er wird nicht mehr sprechen, um den Lehrer zufrieden zu stellen, sondern um seine Kameraden zu überzeugen. Das Gespräch ist echt geworden. Ein flottes Tempo wird dieser Betrieb nie haben können. Aber was kräftigt den Körper mehr? Eine bescheidene Fußwanderung aus eigener Kraft, oder eine Reise mit Bahn oder Auto: In sieben Tagen durch die ganze Schweiz!?

Die Messungsergebnisse der empirischen Geometrie sind mit den unvermeidlichen Zeichnungs- und Beobachtungsfehlern behaftet. So wird zum Beispiel eine ehrlich und ernsthaft durchgeführte Messung der Winkel einer Dreiecksreihe in einer Klasse Winkelsummen von 175° bis 185° ergeben können. Alle empirisch gefundenen Gesetze erscheinen darum nur ungefähr richtig, nur unter Vorbehalt richtig, nur wahrscheinlich statt wahr. Durch die empirische kann das Bedürfnis nach der strengen, logischen Geometrie geweckt werden. Diese hat gewiß in beschränktem Umfang in der Sekundarschule ihre Berechtigung. Aber immer noch werden ihre Bedeutung für die Übermittlung geometrischen Wissens und der Wert ihrer Denkschulung überschätzt. Was das erste anbetrifft, gibt es manche einwandfreien Beweise, die geometrisches Wissen nicht einwandfrei übermitteln können, weil sie zu wenig Überzeugungskraft haben, zum Beispiel zu lange Beweise, wo man zwar jedem einzelnen Schritt zustimmen muß und doch gegen das Ganze Mißtrauen hat, weil man es nicht überschaut. Es kommt in der Schule eben doch nicht in erster Linie auf die logische Richtigkeit des

Beweises an, sondern auf seine psychologische Eindringlichkeit. Da kann eine gute Veranschaulichung, eine Darstellung, die die Sache glaubhaft, einleuchtend, überzeugend macht, dem strengsten Beweis überlegen sein. Und die Denkschulung durch Mathematik hat ihr volles Gewicht doch erst für eine höhere Altersstufe, wo die natürliche Feindschaft zwischen der deduktiven Wissenschaft und den psychologischen Forderungen des Unterrichts wegen der größeren Reife des Schülers gemildert ist. Der Unterricht auf der Sekundarschulstufe wird fast immer induktiv vorgehen müssen, vom Besondern zum Allgemeinen, weil nur dies der psychologisch richtige Weg vom Leichten zum Schweren ist. Dagegen werden sich Wiederholungen, Zusammenfassungen behandelter Kapitel vorzüglich für die deduktive Methode eignen. Recht aufschlußreich sind die Denkvorgänge, wo sich Induktion und Deduktion auf dem Fuße folgen, wie etwa in dem oben erwähnten Fall der Ableitung der Inhaltsformel des Rechtecks und der nachherigen Übung. Die gewonnene Formel stellt einen Automaten dar, der für das immer wiederkehrende Problem durch den bloßen Ablauf eines Mechanismus die Lösung gibt. Die Erfindung des Automaten, nicht seine Benutzung, ist geistige Leistung und somit geistige Schulung. Es ist darum auch geisttötend, wenn in der Arithmetik ein Rechengesetz möglichst rasch an wenig Beispielen oder in allgemeinen Zahlen abgeleitet und nachher an hundert Beispielen geübt wird. Wieviel besser würde man ohne Kenntnis der einschlägigen Regel Beispiel um Beispiel lösen, bis sich von selbst, durch eine automatische Induktion das Gesetz herausschält, das nun keiner langen Einübung mehr bedarf. Die Induktion bildet den Geist, die Deduktion schläfert ihn ein. Die Erledigung einer Rechenaufgabe nach den Methoden der Bestimmungsgleichungen geht viel mechanischer vor sich, bietet also weniger Denkschulung als die Lösung durch bürgerliches Rechnen.

Auf keinen Fall darf die Geometrie der Sekundarschulen systematisch und axiomatisch sein. Definitionen und Axiome gehören nicht an den Anfang. Der Schüler braucht Begriffe nicht definieren zu können; es genügt, daß er mit ihnen richtig umgehen kann. Es kommt mir recht töricht vor, den Geometriunterricht der 5. Klasse Primarschule mit Erörterungen über den Punkt zu beginnen, wie das in einem neuen Lehrbuch geschieht, um auf dem Umweg über Aussichtspunkt, Eisenbahnnodenpunkt, Drehpunkt der Türe zum Satze zu gelangen: „Der Punkt hat keine Größe.“ Als ob das Kind, das schon Hunderte von i-Punkten gemacht hat, nicht wüßte, was ein Punkt ist und ihn etwa mit den Worten: „Der Punkt ist ganz, ganz klein“, nicht viel besser beschreiben würde.

Zum Schluß ein Schulbeispiel einer logischen Beweisführung und dazu das Gegenbeispiel der vorwiegend empirischen Darbietung. Es betrifft den Peripheriewinkelsatz. In einem Geometriebuch für Sekundarschulen, das bis jetzt gute 25 Jahre den Unterricht beherrscht hat, finden wir folgende Darstellung:

„Lehrsatz: Ein Peripheriewinkel hat halb soviel Grade als der zu ihm gehörige Zentriwinkel.“

Um das zu beweisen, unterscheiden wir drei Fälle:

1. Fall. Das Zentrum des Kreises liegt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 1).

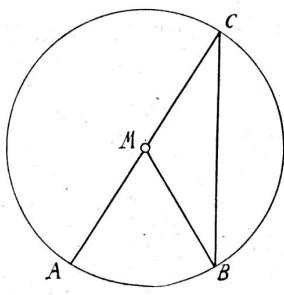


Fig. 1

Der Zentriwinkel $\angle AMB$, welcher mit dem Peripheriewinkel $\angle ACB$ auf dem gleichen Bogen AB steht, ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks BCM . Also

$$\angle MCB + \angle MBC = \angle AMB.$$

Weil aber $\angle MBC = \angle MCB$ ist, so folgt

$$2 \angle MCB = \angle AMB \text{ oder}$$

$$\angle MCB = \frac{1}{2} \angle AMB.$$

2. Fall. Das Zentrum des Kreises liegt im Innern des Peripheriewinkels (Fig. 2).

Durch den Durchmesser CD wird der Peripheriewinkel $\angle ACB$ in zwei Teile zerlegt.

Es ist aber nach dem vorigen Fall

$$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle AMD$$

$\angle DCB = \frac{1}{2} \angle DMB$, woraus durch Addition

folgt $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$.

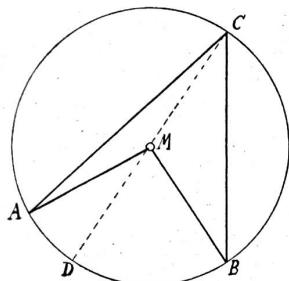


Fig. 2

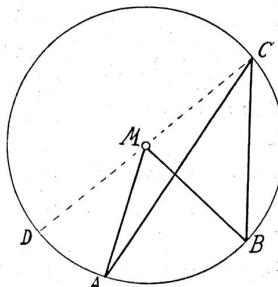


Fig. 3

3. Fall. Das Zentrum des Kreises liegt außerhalb des Peripheriewinkels (Fig. 3).

Zieht man wieder den Durchmesser CD , so ist nach dem ersten Fall

$$\angle BCD = \frac{1}{2} \angle BMD$$

$$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle AMD$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so folgt: $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$.

4. Folgerungen:

a) Peripheriewinkel auf gleichem Bogen sind gleich.

b) Der Peripheriewinkel über dem Halbkreis (über dem Durchmesser) ist 90° .

Kritik:

1. Ein Beweis von furchtbarer Länge. Der Peripheriewinkelsatz kommt einem vor wie ein armes Mäuslein, das durch drei Löcher entwischen könnte, aber langsam, pedantisch macht man ihm eins nach dem andern zu: 1. Fall . . . 2. Fall . . . 3. Fall . . . bis man es endlich mit Hilfe der drei Fälle in der Falle hat.

2. Der Nachdruck liegt auf der starren, toten Größenangabe des Winkels. Das Lebendige, Bewegliche, das in der Tatsache steckt, daß der Scheitelpunkt den ganzen Kreisbogen durchlaufen kann, ohne daß der Winkel sich ändert, kommt nur andeutungsweise in der Folgerung 4a zum Ausdruck.

3. Der Sonderfall vom Peripheriewinkel über dem Halbkreis folgt bescheiden, kaum beachtet, als Folgerung 4b. Wie gründlich könnte er wegen seiner Einfachheit, Verständlichkeit und leichten Beweisbarkeit den Hauptsatz vorbereiten, wenn er vorausginge.

In der *empirischen Geometrie* würde man den Schüler zuerst diesen Sonderfall entdecken lassen. Anlaß dazu könnte die Absicht sein, mit dem Winkeldreieck (Equerre) oder mit

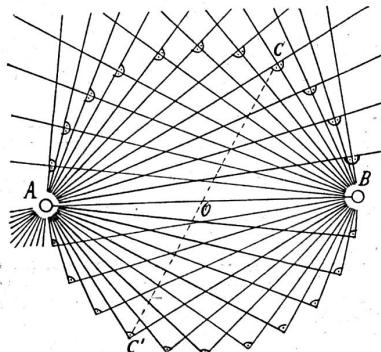


Fig. 4

Lineal und Zirkel das vielleicht kürzlich gelernte Fällen von Senkrechten zu üben (Fig. 4, obere Hälfte) oder in der Dreieckslehre eine Menge rechtwinkliger Dreiecke von gemeinsamer Hypotenuse zu zeichnen (Fig. 4, untere Hälfte).

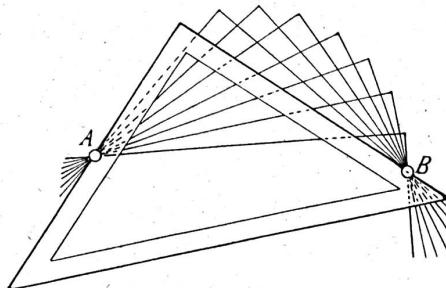


Fig. 5

Eine lebendigere und anschaulichere Variante ist die Bewegung eines Winkeldreiecks, derart, daß die Katheten fortwährend durch die Punkte A und B gehen. (Zwei Nägel, in ein Zeichenbrett geschlagen, zwei Stecknadeln im Heft des Schülers.) (Fig. 5.)

Die Anschauung zeigt mit schlagender Deutlichkeit den Kreis. Aber auch der logische Beweis — Warum liegen die

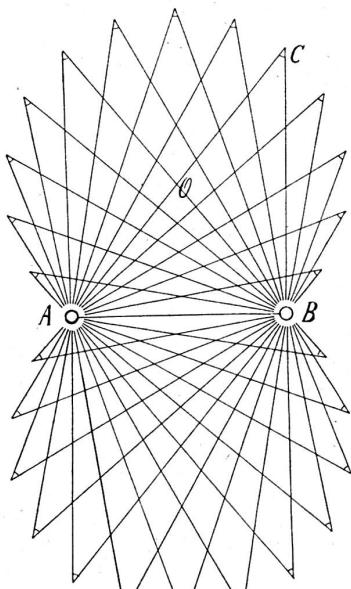


Fig. 6

Punkte auf einem Kreis? — läßt nicht auf sich warten. Wir brauchen nur das Dreieck ABC durch das kongruente ABC¹

zum Rechteck zu ergänzen, um aus der Diagonaleigenschaft des Rechtecks zu erkennen: OC = OC¹ = OA = OB = Radius eines Kreises. Der Satz vom Winkel über dem Halbkreis zeigt sich damit als logische Folge des Diagonalensatzes im Rechteck.

Erst später stoßen wir auf den allgemeinen Peripheriewinkelsatz. Dreieckskonstruktionen aus einer Seite und den Winkeln geben uns Anlaß, über einer Grundlinie eine ganze Menge von Dreiecken zu zeichnen, deren an der Grundlinie liegende Winkel immer die gleiche Summe haben, damit für den Winkel an der Spitze der gleiche Rest bleibt (Fig. 6). Überzeugend zeigt sich wieder die Lage aller Dreiecksspitzen auf zwei symmetrischen Kreisbögen. Für einen der vielen Winkel, nämlich für den Winkel ACB läßt sich mit Hilfe des gleichschenkligen Dreiecks BOC leicht zeigen, daß er halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel AOB ist. Ob darüber hinaus der vollständige logische Beweis noch durchgeführt werden soll, hängt ganz von der geistigen Reife des Schülers ab. Ist er noch unkritisch, so haben Anschauung und Analogie zum vorangegangenen Sonderfall genug Überzeugungskraft. Ist er aber fortgeschritten, so wird er mit dem Bedürfnis auch Verständnis für den strengen Beweis haben. So kann sich der Lehrer von Fall zu Fall dem Stand der Klasse, vielleicht sogar dem einzelnen Schüler anpassen, vorausgesetzt, daß er selbst wandlungsfähig genug ist.

Die Organisation des Lehrfilmbetriebes

Von Dr. G. Imhof, Basel

Wenn auch heute kaum mehr ein Zweifel besteht über die Eignung des Filmes als Unterrichtshilfe in den verschiedenen Disziplinen, da, wo es sich darum handelt, dynamisches Geschehen klar und eindrücklich zur Darstellung zu bringen, so kann aber anderseits kaum bestritten werden, daß von Seite der Schulbehörden nur langsam und sehr zögernd an die Einführung des Filmes in den Unterricht herangegangen worden ist. Wenn wir den Ursachen dieser kühlen Einstellung nachgehen, so lassen sich verschiedene Motive erkennen.

Jeder Neuerer ist von Natur aus ein Fanatiker seiner Idee. Der Fanatiker, gleichviel auf welchem Gebiete er sich auslebe, überwertet seine Idee. So auch der Lehrfilmfanatiker. Er glaubt, mit Hilfe des Laufbildes könne er alle erzieherischen Probleme lösen. Wenn wir heute zwar wesentlich sachlicher über den Wert des Filmes als Unterrichtshilfe denken, so dürfen wir doch nicht vergessen, daß wir ohne die Lehrfilmfanatiker der Zeit unmittelbar nach dem Weltkrieg heute nicht die starke Bewegung in der Welt hätten, welche die Abhaltung von internationalen Lehrfilmkongressen ermöglicht. Dieses Verdienst sei rückhaltlos anerkannt. Aber anderseits ist auch in jener Zeit, wo man mit noch ganz ungeklärten Ideen den Film in die Schule bringen wollte, eine zähe und unbelehrbare Gegnerschaft entstanden. Es waren durchaus nicht nur Leute, welche sich in ihrer administrativen Ruhe und Bequemlichkeit unangenehm gestört fühlten, sondern auch Schulvorsteher und Lehrer, die in

dem Filmgesturm eine unerwünschte und schädliche Störung der ruhig-konsequenteren Erziehungsarbeit sahen. Die ganze Bewegung schien ihnen noch viel zu wenig didaktisch und pädagogisch erklärt.

Ein anderer Grund der Reserve gegenüber der Lehrfilmbewegung war die so überaus wichtige Kostenfrage. In Zeiten, wo das Standardformat Alleingeltung auf der Welt hatte, bedeuteten Apparaten- und Filmbeschaffung für einen Schulorganismus eine in vielen Fällen unerträgliche Belastung des Budgets. Selten waren die Gemeinden, die aus eigenen Mitteln sich Projektoren und Lehrfilme anschaffen konnten. Glücklich immer noch die, welche sich Zuschüsse sichern konnten, sei es aus Staatsmitteln oder aus Spenden von Schulfreunden, Elternorganisationen usw. Wir sehen dieses System besonders verbreitet in Frankreich. Ungezählte Gemeinden aber waren und sind heute noch nicht in der Lage, sich Projektoren und Filme anzuschaffen.

Aus dieser Notlage heraus entwickelte sich nun das heute noch weitverbreitete System der.

A. Lehrfilmdarbietungen für die Schuljugend durch gelegentliche Veranstaltungen außerhalb der Unterrichtszeit.

Unter diese Kategorie von Lehrfilmveranstaltungen fallen die folgenden Formen:

1. *Jugendveranstaltungen der Lichtspieltheater.* Sei es,
1. daß die Theaterbesitzer aus freier Initiative, oder unter Beratung durch erfahrene Schulumänner von Zeit zu Zeit