Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 39 (1929)
Heft: 11-12

Artikel: Betrachtungen über einige praktisch wichtige geometriche Körper
Autor: [s.n.]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788271

Technische Freizeitbücher, herausgegeben von Fritz Schuler, Verlag Paul Haupt, Bern. — Spiel und Arbeit, Otto Mayer, Verlag, Ravensburg. — Schweizer Realbogen, Verlag Paul Haupt, Bern. — H. Kleinert, „Optik", Beihefte zu den Schweizer Realbogen, Verlag P. Haupt, Bern. — Hermann Hahn, Freihandversuche, Band I.—III. Otto Salle, Berlin 1905—1916. — K. Rosenberg, Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre. Bd. I: Unterstufe, Bd. II: Oberstufe. G, Freytag & Cie., Leipzig 1929 u. 1924. — B. Donath, Physikalisches Spielbuch. Fr. Vieweg & Sohn, Verlag, Braunschweig 1902. — Kolumbuseier, 2 Bände. Union Deutsche Verlagsgesellschaft.

Für den Lehrer, der sich in die Technik des Physikunterrichts eingehend vertiefen will, empfehlen wir ganz besonders die Werke von Hahn und Rosenberg. Leider sind von den Hahnschen Büchern bis heute bloss die Bände Einführung, Mechanik und Licht erschienen.

Betrachtungen über einige praktisch wichtige geometrische Körper.

Nachfolgende Betrachtungen wenden sich in erster Linie an die Lehrer an Sekundar- und gewerblichen Fortbildungsschulen; sie dürften aber auch von Lehrern an höhern Schulen mit Nutzen gelesen werden. Sie sollen die Aufmerksamkeit auf einige in der gewerblichen Praxis oft vorkommende geometrische Körper lenken, die in den meisten Lehrbüchern nur kurz und abstrakt behandelt werden, und dartun, wie man sie und ihre Berechnungsweise dem Verständnis des Schülers näher bringen kann.

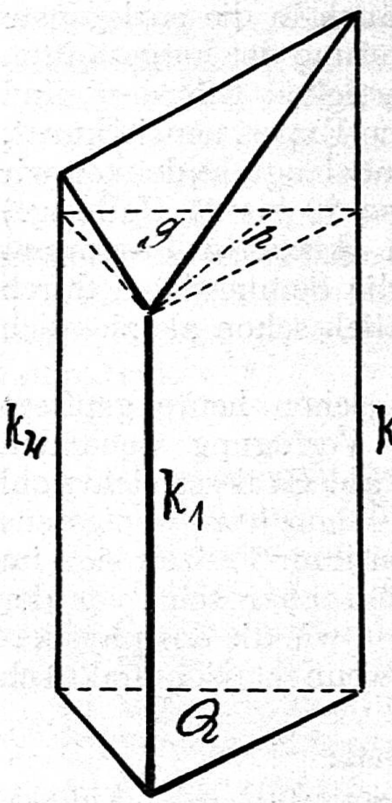

Fig. 1.

Es sind das die verschiedenen schiefabgeschnittenen Prismen. Für die Berechnung ihrer Rauminhalte gilt ganz allgemein die Formel: $V = Q \cdot a$, worin Q der Querschnitt und a der Abstand der Schwerpunkte der schiefen Schnitte ist. Mit diesem allgemeinen Satz aber kann der Lehrer an den Sekundar- und Fortbildungsschulen nicht viel anfangen, da seine Ableitung über das Fassungsvermögen seiner Schüler hinaus geht. Darum wollen wir einen andern Weg einschlagen, indem wir die in der Praxis vorkommenden Spezialfälle der Reihe nach durchgehen.

Beginnen wir mit dem einseitig schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma. Durch einen Schnitt, den wir durch den Endpunkt der kürzesten Seitenkante senkrecht zu dieser legen, zerlegen wir den Körper in ein senkrechtes dreiseitiges Prisma und eine vierseitige Pyramide (siehe Figur 1). Das Volumen des ersten Teilkörpers ist $V_1 = Q \cdot k_1$, das des zweiten $V_2 = \frac{k_2 - k_1 + k_3 - k_1}{2} \cdot g \cdot \frac{h}{3}$, worin g die Seite des Querschnittes ist, die von den beiden längern Seitenkanten eingefasst wird, während h die zu g als Grundlinie gehörige Höhe des Querschnittes bedeutet. Also ist das Volumen des ganzen Körpers

$$V = V_1 + V_2 = Q \cdot k_1 + \frac{k_2 + k_3 - 2k_1}{3} \cdot \frac{g \cdot h}{2} = Q \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}.$$

Diese Formel gilt auch, wie durch Wiederholung der Beweisführung klar wird, wenn das dreiseitige Prisma an beiden Enden schief abgeschnitten ist. Wir haben somit den Satz: Das Volumen eines schiefabgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkt aus dem Querschnitt und der mittlern Länge der drei Seitenkanten. Gewisse Dachräume sind liegende schiefabgeschnittene dreiseitige Prismen.

Gehen wir über zu den schiefabgeschnittenen n-seitigen Prismen. Von ihnen sondern wir zu einer ersten und wichtigsten Gruppe diejenigen ab, deren Querschnitt Symmetrie in bezug auf einen Punkt (zentrische Symmetrie) aufweist. Zu dieser Gruppe gehören unter andern die Prismen, deren Querschnitt ein Parallelogramm, ferner die Prismen, deren Querschnitt ein regelmässiges Vieleck von gerader Seitenzahl ist. Auch für diese erste Gruppe von n-seitigen Prismen gilt: Volumen = Querschnitt mal mittlere Seitenkantenlänge. Die letztere ist gleich der Länge der Körperachse, d. i. die Strecke, welche die Mittelpunkte der Endflächen verbindet, und diese Achse ist identisch mit der Mittellinie eines beliebigen Achsenschnittes. Um uns von der Wahrheit des obigen Satzes zu überzeugen, legen wir durch den Endpunkt der Achse einen Schnitt senkrecht zu ihr (Fig. 2). Dieser Querschnitt begrenzt im Verein mit dem schiefen Schnitt und den Seitenflächen, resp. deren Fortsetzungen, zwei keilförmige zentrisch-symmetrische, also inhaltsgleiche Körper; also ist das schiefabgeschnittene Prisma gleich dem rechtwinklig abgeschnittenen, das mit jenem Querschnitt und Achse gemein hat. — Da der Zylinder nur ein Spezialfall des Prismas von zentrischsymmetrischem Querschnitt ist, gilt das oben Gesagte auch von ihm.

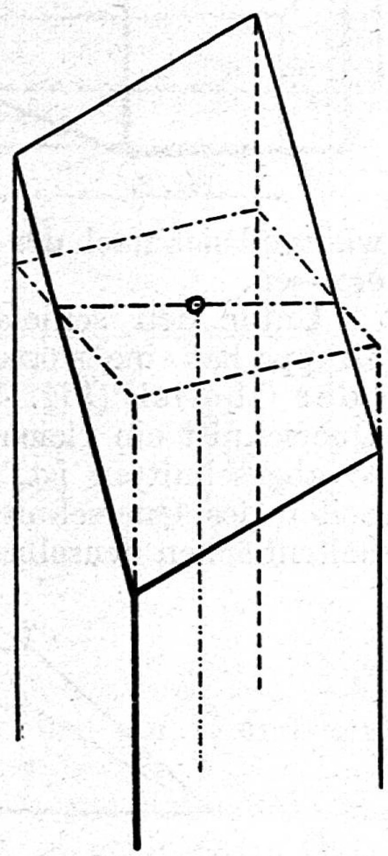

Fig. 2.

Zu einer zweiten Gruppe scheiden wir diejenigen Prismen aus, deren Querschnitt Symmetrie in bezug auf eine Gerade (achsiale Symmetrie) besitzt. Beiläufig mag bemerkt werden, dass das Rechteck Symmetrie in bezug auf einen Punkt und auf zwei Gerade, das gewöhnliche Parallelogramm Symmetrie in bezug auf einen Punkt, das gleichschenklige Trapez Symmetrie in bezug auf eine Gerade zeigt. Wenn die Prismen dieser zweiten Gruppe parallel zur Symmetrieachse des Querschnittes schief abgeschnitten werden, so gilt auch bei ihnen, dass das Volumen gleich dem Produkt aus Querschnitt und mittlerer Seitenkantenlänge ist, was sich ohne weiteres aus Fig. 3 erkennen lässt. Ebenso kann aus der Fig. 3 abgelesen werden, dass die mittlere Seitenkantenlänge gleich der Mittellinie jedes Schnittes ist, der senkrecht zur Symmetrieachse des Querschnittes geführt wird. Für diejenigen schiefabgeschnittenen Prismen, welche weder der ersten noch der zweiten Gruppe zugeteilt werden können, bleibt als das einfachste übrig, dass man sie durch Schnitte, welche man durch eine Seitenkante und alle ihr nicht benachbarten Seitenkanten legt (Diagonalschnitte), in lauter dreiseitige Prismen zerlegt und deren Volumen der Reihe nach berechnet. Man könnte auch in der Fläche des Querschnittes einen beliebigen Punkt annehmen und von ihm aus Schnitte durch alle Seitenkanten legen. In diesem Fall würden wir n dreiseitige Prismen erhalten, während sich nach der ersten Zerlegungsart $(n-2)$ dreiseitige Prismen ergeben.

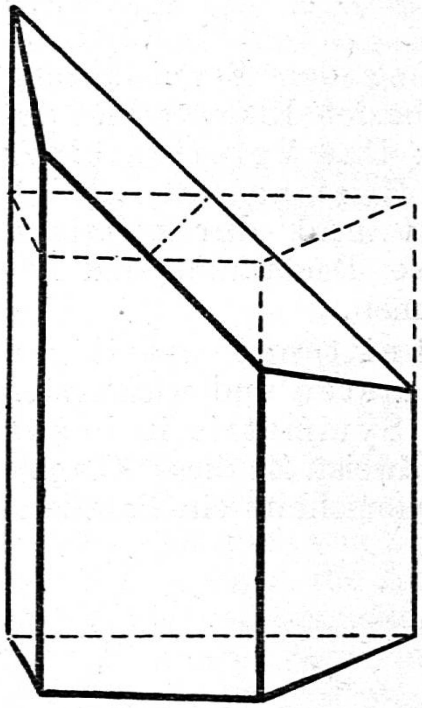

Fig. 3.

Unter den schiefabgeschnittenen Prismen der obigen dritten Gruppe hat eine grössere praktische Bedeutung der Schichthaufen oder Obelisk (Fig. 4). Derselbe ist ein vierseitiges Prisma, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez ist und das an den Enden so abgeschnitten ist, dass die Schnitte parallel zu den parallelen Seiten des Querschnittes gehen und mit der grössern der parallelen Seitenflächen denselben Neigungswinkel bilden, wie die beiden nicht-

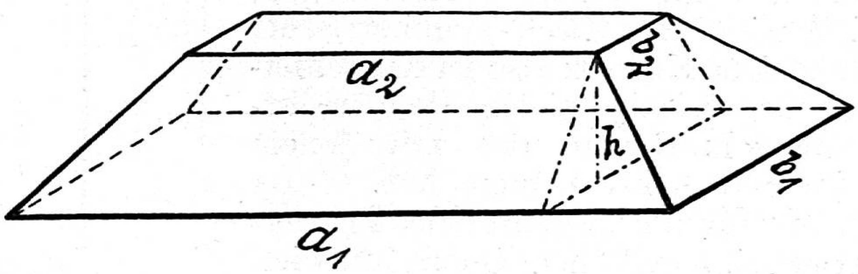

Fig. 4.

parallelen Seitenflächen es tun. Der Körper liegt gewöhnlich auf dieser grössern rechteckigen Seitenfläche und wir wollen sie deshalb „Grundfläche“, die ihr parallele Begrenzungsfläche „Deckfläche“ und die übrigen trapezförmigen Begrenzungsflächen „Seitenflächen“ nennen. Diese „Seitenflächen“ sind also gleichschenklige Trapeze und gleichstark gegen die „Grundfläche“ geneigt. Gewisse Dachräume, ferner Komposthaufen, geschichtete Schotter- und Sandhaufen, die Innenräume gewisser Wagen weisen die Obeliskform auf. — Legt man durch zwei nichtbenachbarte parallele Kanten, z. B. durch a_1 hinten und a_2 vorn, einen Schnitt (Diagonalschnitt), so erhält man zwei schiefabgeschnittene dreiseitige Prismen, deren Volumen $V_1 = \frac{2a_1 + a_2}{3} \cdot \frac{b_1 \cdot h}{2}$ und $V_2 = \frac{a_1 + 2a_2}{3} \cdot \frac{b_2 \cdot h}{2}$ sind, wobei *hk* den Abstand von „Grund- und Deckfläche" bedeutet, den wir die „Höhe" des Körpers nennen wollen. Also ist das Volumen des Schichthaufens

$$V = V_1 + V_2 = \frac{h}{6}\,[(2a_1 + a_2)\, b_1 + (2a_2 + a_1)\, b_2]$$

Mit dem Obelisk wird oft der Pyramidenstumpf mit rechteckiger Grundfläche verwechselt, und deshalb sollen diese zwei Körper näher miteinander verglichen werden. Sie stimmen darin überein, dass beide als schiefabgeschnittene vierseitige Prismen von trapezförmigem Querschnitt aufgefasst werden können, bei denen die schiefen Schnitte parallel zu den parallelen Seiten des Querschnittes geführt worden sind. Aber sie unterscheiden sich dadurch, dass der nach „oben" ergänzte Obelisk ein schiefabgeschnittenes dreiseitiges Prisma, der nach oben ergänzte Pyramidenstumpf aber eine Pyramide liefert (Fig. 5), mit a. W. die verlängerten Seitenkanten schneiden einander beim Obelisk in zwei Punkten, beim Pyramidenstumpf aber in einem Punkt; denn die parallele nKanten a_1, a_2, b_1, b^2 genügen beim Obelisk der arithmetischen Proportion $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, beim Pyramidenstumpf aber wegen der Ähnlichkeit von Grund- und Deckfläche der geometrischen Proportion $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$.

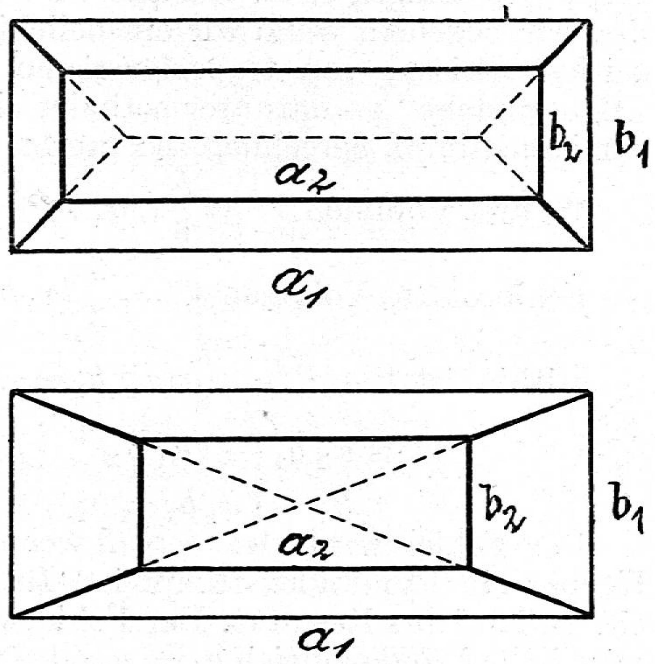

Fig. 5.

Da Obelisk und entsprechender Pyramidenstumpf Spezialfälle des schiefabgeschnittenen vierseitigen Prismas von trapezförmigem Querschnitt und rechteckiger „Grundfläche" sind und da die Volumenformel des Obelisks auch für diese allgemeinere Körperform gilt — was leicht einzusehen ist — so muss sich auch der Pyramidenstumpf mit rechteckiger Grundfläche nach der Formel $V = \frac{h}{6}\,[(2a_1 + a_2)\, b_1 + (2a_2 + a_1)\, b_2]$ berechnen lassen. Dass das der Fall ist, ergibt sich auch aus der allgemeinen Volumenformel der Pyramidenstümpfe $V = \frac{h}{3}$

$(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$. Ersetzen wir nämlich darin G_1 durch $a_1 \cdot b_1$ und G_2 durch $a_2 \cdot b_2$, so erhalten wir $V = \frac{h}{3}(a_1 b_1 + \sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2} + a_2 b_2)$ und daraus wegen der Gleichheit von $a_1 b_2$ und $a_2 b_1$, welche aus der Proportion $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ folgt, $V = \frac{h}{3}(a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2)$. Diese letztere Formel erhalten wir aber auch aus $V = \frac{h}{6}[(2a_1 + a_2) b_1 + (2a_2 + a_1) b_2 b_1]$. Lösen wir nämlich darin die innern Klammern, so ist $V = \frac{h}{6}(2a_1 b_1 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2 + a_1 b_2)$, woraus wegen $a_2 b_1 = a_1 b_2$ wieder folgt $V = \frac{h}{3}(a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2)$.

Können wir so das Volumen des Pyramidenstumpfes mit rechteckiger Grundfläche stets nach der Obeliskformel berechnen, so gilt nicht das Umgekehrte. Suchen wir einen Ausdruck für den Fehler, den wir begehen, wenn wir ein beliebiges schiefabgeschnittenes vierseitiges Prisma von trapezförmigem Querschnitt und rechteckiger „Grundfläche“ — darunter befindet sich auch der Obelisk — als Pyramidenstumpf berechnen, so ergibt sich folgendes:

Wahres Volumen $V' = \frac{h}{6}(2a_1 b_1 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2 + a_1 b_2)$.

Fehlerhaftes Volumen $V'' = \frac{h}{3}(a_1 b_1 + \sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2} + a_2 b_2)$.

Mithin ist $V' - V'' = \frac{h}{6}(a_2 b_1 - 2\sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2} + a_1 b_2)$, also

$$\frac{V' - V''}{V''} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a_2 b_1} - \sqrt{a_1 b_2})^2}{a_1 b_1 + \sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2} + a_2 b_2}.$$

Der Fehler wird also = Null, wenn $a_2 b_1 = a_1 b_2$, wenn also der Körper ein Pyramidenstumpf ist. In den andern Fällen erhält man ein zu kleines Resultat. Der Fehler wird ein Maximum, wenn einerseits $b_2 = 0$ und zugleich $a_2 = a_1$ oder wenn anderseits $b_2 = b_1$ und zugleich $a_2 = 0$ ist. In diesen Fällen wird $\frac{V' - V''}{V''} = \frac{1}{2}$.

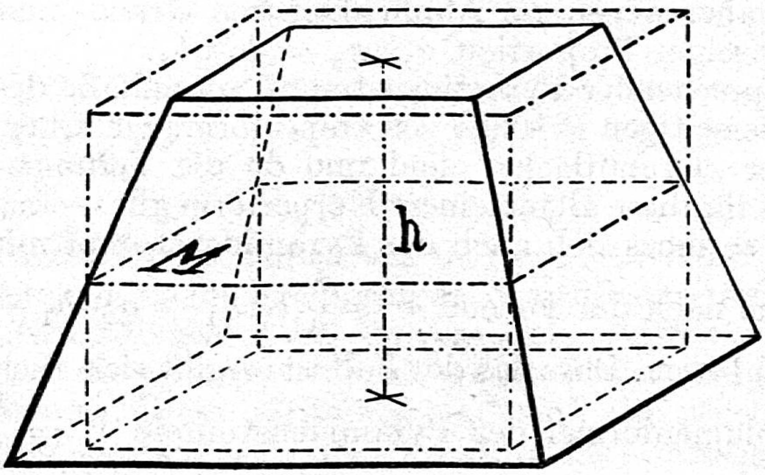

Fig. 6.

Da das schiefabgeschnittene vierseitige Prisma von trapezförmigem Querschnitt und rechteckiger „Grundfläche“, mithin auch der Obelisk und der ihm ähnliche Pyramidenstumpf, nach der genauen Volumenformel etwas umständlich zu berechnen ist, so begnügt man sich oft mit einer einfachern Berechnungsweise, die aber nur ein annähernd richtiges Resultat ergibt. Man denkt sich nämlich das schiefabgeschnittene Prisma durch ein „gleichhohes" senkrechtes Prisma ersetzt (Fig. 6), das den durch die Mitte der Querschnittshöhe parallel zur „Grundfläche" gelegten Schnitt, den sog. „Mittelschnitt" (M in Fig. 6), zur Grundfläche hat. Dieses Prisma ist aber kleiner als das gegebene, und wir wollen die Grösse dieser Abweichung bestimmen. Es ist V' (exakt) $= \frac{h}{6}(2a_1 b_1 + a_2 b_1 b_2 + 2a_2 b_2 + a_1 b_2)$, V'' (angenähert) $= h \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{h}{4}(a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2)$, folglich $V' - V'' = \frac{h}{12}(a_1 b_1 - a_2 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2) = \frac{h}{12}(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$ und mithin $\frac{V' - V''}{V''} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}$. Der Fehler ist also um so grösser, je stärker sich das schiefabgeschnittene Prisma nach „oben" verjüngt. Die Grenzfälle treten ein bei $a_2 = a_1$, bzw. $b_2 = b_1$, wo $V' - V'' = 0$, also $V'' = V'$ wird und bei $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, wo $V' - V'' = \frac{1}{3} V''$, also $V'' = \frac{3}{4} V'$ wird. Wenn man also den Obelisk und den ihm ähnlich sehenden Pyramidenstumpf als senkrechtes Prisma mit dem Mittelschnitt als Grundfläche berechnet, erhält man ein Resultat, das um 0 — $33^1/_3$% seines Wertes zu klein ist.

Ein noch fehlerhafteres Resultat endlich liefert die Berechnungsweise, bei der man sich das schiefabgeschnittene Prisma durch ein „gleichhohes" senkrechtes Prisma ersetzt denkt, dessen Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel aus „Grund- und Deckfläche" des schiefabgeschnittenen gesetzt wird. Es ist dann V' (exakt) $= \frac{h}{6}(2a_1 b_1 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2 + a_1 b_2)$, V'' (angenähert) $= h \cdot \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{2} = \frac{h}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2)$, folglich $V' - V'' = \frac{h}{6}(a_2 b_1 - a_1 b_1 + a_1 b_2 - a_2 b_2) = -\frac{h}{6}(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$. —$V' - V''$ ist in diesem Fall gerade doppelt so gross als bei der Berechnungsweise nach der Mittelschnittformel, aber von entgegengesetztem Sinn, m. a. W. die Berechnungsweise nach der zweiten Annäherungsformel liefert ein zu grosses Resultat und es ist der Fehler dem absoluten Betrage nach gerade doppelt so gross wie bei der Berechnungsweise nach der Mittelschnittformel. Es ist also die zweite Näherungsformel zu verwerfen.

Dr. *S. Blumer.*
