Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 39 (1929)
Heft: 3-4

Artikel: Zur Methodik der Kreisberechnung
Autor: Scherrer, F. R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788244

zehnjährigen Menschen ihre sehr bedenklichen Seiten hat, um so mehr, wenn das Maturitätszeugnis nicht allein oder so gut wie ausschliesslich für die Immatrikulation an einer der verschiedenen Hochschulen verwendet wird, sondern die Zulassung zu bestimmten Arten der „Karriere“ bedingt, wie dies in Deutschland immer mehr die Regel zu werden scheint. Mit einer derartigen Personaldiagnose übernimmt die Schule eine weit über ihre eigentliche Befugnis hinausgreifende ungeheure Verantwortung für die Zukunft ihrer Abiturienten, eine Verantwortung, die um so schwerer zu tragen sein wird, da man zwar Leistungen im Groben messen und miteinander vergleichen kann, aber für die Charaktereigenschaften die verbindlichen Massstäbe völlig fehlen — auch die Psychotechnik hat den Charakterpegel noch nicht erfunden. Es verdient in ernstliche Erwägung gezogen zu werden, ob nicht in der entgegengesetzten Richtung eine Reform des Maturitätsausweises gesucht werden müsste: wäre es nicht im Interesse der Sauberkeit das beste, das Maturitätszeugnis würde überhaupt keine Fachzensuren mehr, sondern neben der selbstverständlich notwendigen Angabe des Schultypus nur noch eine Gesamtqualifikation etwa nach der erwähnten preussischen Skala enthalten? Oder welchen Sinn hat es eigentlich, dass den Absolventen der höheren Schulen die Prüfungsnoten in allen Fächern das ganze Leben hindurch nachlaufen?

So lässt sich wohl im ganzen sagen, dass unsere eidgenössische Maturitätsordnung neben der preussischen nicht schlecht abschneidet. Der preussischen ist ein grosses Verdienst zuzugestehen: sie ist vom besten Willen nach einer menschlichen Art der Erledigung dieser immerhin prekären Angelegenheit erfüllt. Die Zukunft wird zeigen, ob sie in diesem lobenswerten Bestreben nicht zu weit geht; die Tatbestände, die dem eingangs erwähnten Aufsatz von Weinstock zu Grunde liegen, scheinen diese Befürchtung zu bestätigen. Auf jeden Fall aber ist Preussen um die einheitliche Regelung der Maturitätsverhältnisse zu beneiden. Vielleicht zwingt uns das Ausland einmal durch die strikte Nichtanerkennung der „kantonalen“ Maturitätszeugnisse dazu, dem Chaos von Sonder-Maturitäten, das sich im Schatten der kantonalen Unterrichtshoheit entwickelt hat, auf irgendeine Art ein Ende zu machen, unbeschadet des selbstverständlichen Rechtes unserer Universitäten, Aufnahmeprüfungen nach eigenem Ermessen zu veranstalten. Es sind Anzeichen dafür vorhanden, dass man jenseits der Landesgrenzen dieses Durcheinander satt zu werden beginnt.

Dr. *Max Zollinger*.

Zur Methodik der Kreisberechnung.

Von Dr. F. R. Scherrer,
Küsnacht-Zürich.

Im Elementarunterricht betritt man behufs Ermittlung der Zahl π gewöhnlich denselben Weg, den schon *Archimedes* (287 bis 212 v. Chr.) eingeschlagen hat; d. h. man setzt den Kreisradius als gegeben voraus und nähert sich der Länge des Kreisumfanges und der Kreisfläche durch die fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl ein- und umgeschriebener regelmässiger Vielecke. Dieses Verfahren lässt zwei Umkehrungen zu. Man kann nämlich, ausgehend von einem regelmässigen Polygon, unter Beibehaltung entweder der Fläche oder des Umfanges die Seitenzahl fortgesetzt verdoppeln und gelangt so zum Radius eines Kreises, der dem Ausgangspolygon im ersten Fall an Fläche, im zweiten Fall an Umfang gleich ist. Auf die erste Art gingen die Inder in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung vor; auf die zweite Art versuchte der gelehrte Kardinal *Nicolaus Cusanus* (Niklaus Chryppfs von Cues an der Mosel [1401—1464]) und *René Descartes* (1596—1650) das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser zu berechnen. *A. M. Legendre* (1752—1833) und später *Ch. Briot* (1817—1882) bestimmten in ihren Eléments de Géométrie die Zahl π sowohl nach dem Archimedischen Verfahren als auch, indem sie unter Beibehaltung des Umfanges die Seitenzahl des regelmässigen Vielecks fort gesetzt verdoppelten, wobei Briot bemerkt, dass dieses Verfahren dem Archimedischen vorzuziehen sei.

Im folgenden wird das Problem der Arkufikation, d. h. der Verwandlung einer gegebenen Strecke in einen Kreisbogen von vorgeschriebenem Zentriwinkel auf die einfachste Weise sowohl rechnerisch als auch konstruktiv behandelt, und es wird gezeigt, dass man die Zahl π, von jedem rechtwinkligen Dreieck ausgehend, beliebig genau berechnen kann. Da bei diesem Verfahren von ähnlichen Figuren kein Gebrauch gemacht wird, so lässt es sich unmittelbar an die Berechnung der Fläche geradlinig begrenzter Figuren anschliessen, wodurch in die Übungen über Flächenberechnung mehr Abwechslung gebracht werden kann.

Der erste der vier Abschnitte, in die sich die Abhandlung gliedert, eignet sich zur Behandlung in Sekundarschulen, wogegen der vierte die Kenntnis der trigonometrischen Funktionen voraussetzt.

I.

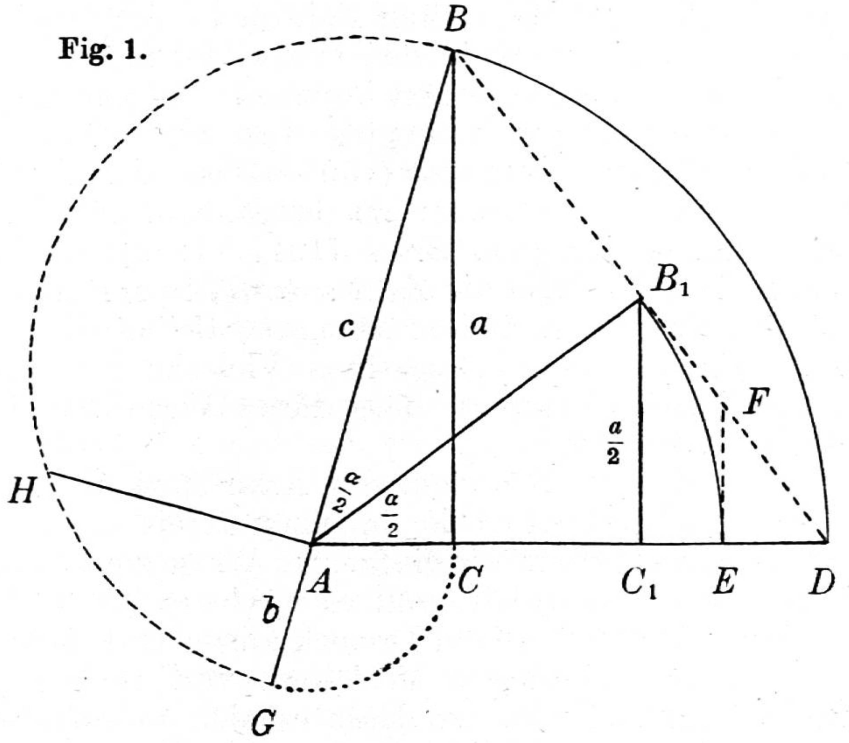
Es sei in Fig. 1 ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenmasszahlen a, b, c. Der um A durch B gelegte Kreis schneide die Verlängerung von AC in D, und es treffe die Halbierungslinie des der Seite a gegenüber liegenden Winkels α die Sehne BD in B_1. Bezeichnet C_1 den Fusspunkt der von B_1 auf AD gefällten Normalen, so ist AB_1C_1 ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ die Kathete B_1C_1 von der Länge $\frac{a}{2}$ gegenüberliegt; überdies ist C_1 der Halbierungspunkt der Strecke CD. Bedeutet für das Dreieck AB_1C_1 c_1 die Masszahl der Hypotenuse und b_1 die der Kathete AC_1, so ist

$$b_1 = \frac{b+c}{2}, \qquad c_1 = \sqrt{c \cdot b_1}.$$

Zieht man um A durch B_1 einen Kreis, der AD in E schneidet und legt daran in E eine Tangente, die $B_1 D$ in F trifft, so ist $F B_1 = FE < FD$, folglich auch $C_1 E < DE$. $C_1 E$ ist also kleiner als die Hälfte von $C_1 D$ oder das Viertel von $C D$. D. h.

$$c_1 - b_1 < \frac{c - b}{4}$$

Fig. 1.



Indem man das Verfahren, durch das man aus dem Dreieck ABC das Dreieck AB_1C_1 erhalten hat, auf das letztere anwendet, gelangt man zu einem rechtwinkligen Dreieck AB_2C_2, worin dem Winkel $\frac{a}{4}$ die Kathete $\frac{a}{4}$ gegenüberliegt. n aufeinanderfolgende derartige Konstruktionen führen schliesslich vom Dreieck ABC zu einem rechtwinkligen Dreieck $A\,B_n\,C_n$ mit dem Winkel $\frac{a}{2^n}$ und der Gegenkathete $\frac{a}{2^n}$. Bezeichnen c_n und b_n beziehungsweise dessen Hypotenuse und längere Kathete, so ist

$$(1) \quad b_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \qquad c_{n+1} = \sqrt{c_n \cdot b_{n+1}}; \qquad c_{n+1} - b_{n+1} < \frac{c_n - b_n}{4}.$$

Durch Anwendung dieser Ungleichheit auf alle Indices von1 bis n ergibt sich

$$(2) \qquad c_n - b_n < \frac{c - b}{4^n},$$

ferner aus den Gleichungen (1)

$$b < b_1 < b_2 \ldots < b_n < c_n < c_{n-1} \ldots < c_2 < c_1 < c.$$

Da überdies nach (2) die Differenz $c_n - b_n$ mit ohne Ende wachsendem Index n sich der Grenze Null nähert, so nähern sich zugleich die Kathete b_n wachsend und die Hypotenuse c_n abnehmend derselben Grenze r.

Legt man 2^n zu $A\,B_n\,C_n$ kongruente Dreiecke so aneinander, dass alle den Scheitel A des Winkels $\frac{a}{2^n}$ und je zwei benachbarte eine Seite miteinander gemein haben, so schliesst die äussere Seite des ersten mit der äusseren Seite des letzten Dreiecks den Winkel a ein. Die in den aufeinanderfolgenden Dreiecken dem Winkel $\frac{a}{2^n}$ gegenüberliegenden Seiten von der Länge $\frac{a}{2^n}$ bilden zusammen einen gebrochenen Streckenzug von der Gesamtlänge a, dessen Punkte von A im Minimum den Abstand b_n und im Maximum den Abstand c_n haben. Weil b_n und c_n sich mit wachsendem Index ohne Ende dem Grenzwert r nähern, so geht allmählich der Streckenzug von der Länge a in einen gleichlangen Kreisbogen mit dem Zentriwinkel a und dem Radius r über[1]). Hieraus folgt der Satz:

(3) *Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck a einen spitzen Winkel, a dessen Gegen- und b dessen Ankathete, ferner c die Hypotenuse bezeichnet und man die endlose Reihe $b, c, b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots b_n, c_n, \ldots$ bildet, wo für jeden Index n b_n das arithmetische und c_n das geometrische Mittel der beiden ihm unmittelbar vorhergehenden Glieder der Reihe ist, so nähern sich mit wachsendem Index die b_n zu- und die c_n abnehmend dem Radius r eines Kreisbogens von der Länge a und dem Zentriwinkel a.*

Das Dreieck $A\,B_n\,C_n$ hat die Flächenmasszahl $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2^n} \cdot b_n$, folglich das oben genannte aus 2^n derartigen Dreiecken zusammengesetzte Flächenstück, wo dem Winkel a die gebrochene Linie von der Länge a gegenüberliegt, die Masszahl $\frac{1}{2}\,a\,b_n$; mithin ist $\frac{1}{2} \cdot ar$ die Masszahl der Fläche des Kreissektors vom Radius r und der Bogenlänge a. D. h.

(4) *Der Inhalt eines Kreissektors ist gleich dem halben Produkt aus dem Kreisbogen und dem Radius.*

Wählt man im Dreieck $A\,B\,C$ den Winkel a gleich 30° und seine Gegenkathete als Längeneinheit, so wird $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$. Weil das Verhältnis $r : a$ im vorliegenden Fall zugleich das Verhältnis des Kreisradius zur Längeneinheit, also die Masszahl r des Kreisradius ist, und diese Masszahl nur von b und c, nicht aber von den absoluten Längen $A\,C$ und $B\,C$ abhängt, so hat das Verhältnis des Kreisradius zur Länge des Kreisbogens von 30° und daher auch das umgekehrte Verhältnis, nämlich das des Bogens von 30° zum Radius

---

[1]) Um den Schülern den Gang der Rechnung zu veranschaulichen, empfiehlt es sich, etwa ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 24$ cm, $b = 7$ cm zeichnen und daran die Halbierung viermal durchführen zu lassen.

bei allen Kreisen denselben Wert $a:r$. Das Verhältnis des Halbkreises zum Radius $\frac{6a}{r}$ oder des Kreisumfanges zum Durchmesser ist demnach bei allen Kreisen gleich gross und wird deshalb stets mit demselben Buchstaben, nämlich mit π bezeichnet. Wenn also r den Radius, u den Umfang und F die Fläche eines Kreises bedeutet, ist

$$u = 2\,r\,\pi$$

und nach Satz (4)
$$F = \frac{1}{2}\,u\,r,$$
oder
$$F = r^2\,\pi.$$

Für praktische Bedürfnisse genügt es oft, die Zahl π auf zwei Dezimalstellen genau zu kennen. Um sie ausgehend von einem rechtwinkligen 30°-Dreieck auf diesen Grad der Genauigkeit zu bestimmen, muss man nach (2) und (3) mit der Bildung der Mittel so weit gehen, dass

$$c_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}\,(c_n - b_n) < \frac{c-b}{4^n \cdot 2} < \frac{2{,}5}{10^3},$$

also
$$4^n > \frac{0{,}268}{5} \cdot 10^3 = 53{,}6$$

wird; d. h. es muss n gleich oder grösser als 3 gewählt werden. Man erhält

$$\begin{array}{ll} b_1 = 1{,}866 & c_1 = 1{,}932 \\ b_2 = 1{,}899 & c_2 = 1{,}915 \\ b_3 = 1{,}907 & c_3 = 1{,}911 \\ b_4 = 1{,}909 & \end{array}$$

und hieraus
$$\frac{6}{1{,}911} < \pi < \frac{6}{1{,}909};$$

daher ist auf zwei Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}14$.

Man kann die Zahl $\frac{\pi}{2}$ von jedem beliebigen rechtwinkligen Dreieck aus durch Addition der Bogenmasse seiner beiden spitzen Winkel erhalten, Man kommt jedoch rascher zum Ziel auf Grund des Satzes: Wenn die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks beziehungsweise gleich sind der Summe und der Differenz der Katheten eines andern rechtwinkligen Dreiecks, so betragen die kleineren spitzen Winkel der beiden Dreiecke zusammen 45°.

II.

In der Figur 1 ist $DE > \frac{C_1 D}{2} = \frac{C\,C_1}{2}$, somit $c - c_1 > \frac{b_1 - b}{2}$ und $b + 2c > b_1 + 2c_1$. Es besteht demnach die endlose Reihe von Ungleichheiten

$$b + 2c > b_1 + 2c_1 > b_2 + 2c_2 \ldots > b_n + 2c_n > \ldots.$$

Weil sowohl b_n als auch c_n sich mit ohne Ende wachsendem Index n der Grenze r nähern, so nähern sich die Glieder der Reihe der Grenze $3\,r$. Verlängert man in Figur 1 $B\,A$ um eine Strecke $A\,G$ von der

Länge $A\,C$, beschreibt über $B\,G$ einen Halbkreis, errichtet in A auf $A\,B$ eine Normale, die den Halbkreis in H trifft, dann hat die Strecke $A\,H$ die Masszahl $\sqrt{b\,c}$ und der Kreisradius die Masszahl $\frac{b+c}{2}$ oder b_1, somit ist $\sqrt{b\,c} < b_1$, also $b\,c < b_1^2$ und $b\,c^2 < b^2 c = b_1\,c_1^2$. Es besteht daher auch die endlose Reihe der Ungleichheiten

$$b\,c^2 < b_1\,c_1^2 < b_2\,c_2^2 \ldots < b_n\,c_n^2 < \ldots,$$

deren Glieder sich mit ohne Ende wachsendem n dem Grenzwert r^3 nähern. Für beliebige Indices i und k ist also

$$\frac{b_i + 2\,c_i}{3} > r > \sqrt[3]{b_k\,c_k^2}.$$

In Worten:

(5) *Bildet man von der in Satz (3) genannten Grösse b_n und der zweimal gesetzten Grösse c_n sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel, so nähert sich mit ohne Ende wachsendem n jenes abnehmend und dieses zunehmend dem Radius r des Kreisbogens von der Länge a und dem Zentriwinkel α.*

Weil die beiden Mittel $\sqrt[3]{b_n\,c_n^2}$ und $\frac{b_n + 2c_n}{3}$ zwischen b_n und c_n liegen, so schliessen sie r enger ein als diese. Zu einer Abschätzung des Überschusses von $\frac{b_n + 2\,c_n}{3}$ über r gelangt man auf folgende Weise. Es ist nach (1)

$$\sqrt[3]{b_{n+1}\,c_{n+1}^2} = \sqrt[3]{b_{n+1}^2\,c_n} = b_{n+1}\sqrt[3]{\frac{c_n}{b_{n+1}}}$$

$$= b_{n+1}\sqrt[3]{\frac{2\,c_n}{b_n + c_n}} = \frac{b_n + c_n}{2}\sqrt[3]{1 + \frac{c_n - b_n}{c_n + b_n}}$$

Weil

$$1 + x = \left[1 + \frac{x}{3} - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^3\left[5 - 3\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3\right]\ [2])$$

---

[2]) Diese Gleichung erhält man entweder durch Ausmultiplizieren der rechten Seite, oder durch direktes Radizieren von $1 + x$, oder durch folgende Überlegung: Es ist:

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 = 1 + x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27},$$

$$\text{folglich } \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 > 1 + x,$$

$$\left(1 + \frac{x}{3} - a\,x^2\right)^3 = 1 + x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} - 3\left(1 + \frac{x}{3}\right)^2 a\,x^2 + 3\left(1 + \frac{x}{3}\right) a^2 x^4 - a^3 x^6$$

Will man unter der Annahme, dass x kleiner als 1 ist, a so wählen, dass die dritte Potenz von $1 + \frac{x}{3} - a\,x^2$ nahezu gleich $1 + x$ wird, so muss man die Summe der in x quadratischen Glieder also

$$\frac{x^2}{3} - 3\,a\,x^2 = 0$$

setzen, woraus $a = \frac{1}{9}$ folgt.

so ist, wenn x zwischen 0 und 1 liegt,

$$\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{x}{3} - \left(\frac{x}{3}\right)^2$$

daher

$$\sqrt[3]{b_{n+1}\, c^2_{n+1}} > \frac{b_n + c_n}{2}\left[1 + \frac{c_n - b_n}{3\,(c_n + b_n)} - \frac{(c_n - b_n)^2}{9\,(c_n + b_n)^2}\right]$$

oder

$$\sqrt[3]{b_{n+1}\, c^2_{n+1}} > \frac{b_n + c_n}{2} + \frac{c_n - b_n}{6} - \frac{(c_n - b_n)^2}{18\,(c_n + b_n)}$$

$$= \frac{b_n + 2\,c_n}{3} - \frac{(c_n - b_n)^2}{18\,(c_n + b_n)}$$

somit

$$\text{(6)} \qquad \frac{b_n + 2\,c_n}{3} - r < \frac{b_n + 2\,c_n}{3} - \sqrt[3]{b_{n+1}\, c_{n+1}^2} < \frac{1}{18} \cdot \frac{(c_n - b_n)^2}{c_n + b_n}.$$

Erweitert man in dieser Ungleichheit rechts mit $c_n - b_n$ und berücksichtigt, dass $(c_n - b_n)\,(c_n + b_n) = \left(\frac{a}{2^n}\right)^2$, so nimmt sie die Gestalt an

$$\frac{b_n + 2\,c_n}{3} - r < \frac{b_n + 2\,c_n}{3} - \sqrt[3]{b_{n+1}\, c^2_{n+1}} < \frac{2^{2n-1}\,(c_n - b_n)^3}{(3\,a)^2}.$$

Da $c_n - b_n < \frac{c - b}{2^{2n}}$, so ist

$$\frac{b_n + 2\,c_n}{3} - \sqrt[3]{b_{n+1}\, c^2_{n+1}} < \frac{(c - b)^3}{2^{4n+1}\,(3a)^2},$$

daher um so eher

$$\text{(7)} \qquad \frac{b_n + 2\,c_n}{3} - r < \frac{(c - b)^3}{2^{4n+1}\,(3a)^2}.$$

Aus der letzten Ungleichheit ergibt sich, wie weit man in der Berechnung der b_n und c_n gehen muss, um r mit vorgeschriebener Genauigkeit zu erhalten. Will man z. B. ausgehend vom rechtwinkligen 30°-Dreieck die Zahl π auf fünf Dezimalstellen genau ermitteln, so muss n so gewählt werden, dass $\frac{(c - b)^3}{2^{4n+1}\,(3a)^2} \leqq \frac{1}{2 \cdot 10^5}$. Dabei ist

$a = 1 \;\; b = \sqrt{3} = 1{,}732,\; c = 2$, woraus folgt $2^{4n} > \frac{0{,}27^3 \cdot 10^5}{9} = 218{,}7,$

also $n \geqq 2$. Man erhält auf sechs Dezimalstellen genau

$$\begin{array}{ll} b\;\; = 1{,}732051 & c\;\; = 2 \\ b_1 = 1{,}866025 & c_1 = 1{,}931852 \\ b_2 = 1{,}898939 & c_2 = 1{,}915324 \end{array}$$

$\frac{b_2 + 2\,c_2}{3} = 1{,}909862,\;\; c_2 - b_2 = 0{,}016385.$

Nach (6) übertrifft $\frac{b_2 + 2c_2}{3}\, r$ um weniger als $\frac{8}{9} \cdot 0{,}0164^3$ oder um weniger als 0,000004; somit ist

$$1{,}909862 > r > 1{,}909858.$$

Weil $\pi = \frac{6a}{r}$ ist, ergibt sich

$$\frac{6}{1{,}909862} < \pi < \frac{6}{1{,}909858}$$

oder

$$3{,}141588 < \pi < 3{,}141594;$$

daher ist auf fünf Dezimalstellen genau

$$\pi = 3{,}14159.$$

Das unter I. dargelegte Verfahren hätte zur Erlangung dieses Näherungswertes die Berechnung der b_n und c_n bis zu b_8 und c_8 erfordert.

Die dargelegte Methode zur Berechnung des Bogenmasses eines Dreieckswinkels ermöglicht auch die Bestimmung der Fläche eines Kreissegmentes aus der Sehne und dem Pfeil (Bogenhöhe) ohne Zuhilfenahme trigonometrischer Funktionen und Tafeln, wie am folgenden Beispiel ersichtlich ist:

Die Fläche eines Kreissegmentes, dessen Sehne 80 cm und dessen Pfeil 20 cm lang ist, soll auf den Quadratmillimeter genau berechnet werden. Der Radius des Bogens, der das Segment begrenzt, misst 50 cm. Die Hälfte des zum letzteren gehörenden Zentriwinkels hat das Bogenmass $\frac{40}{r}$, wo r die bisherige Bedeutung hat. Man erhält daher für den Flächeninhalt des Segmentes

$$F = \left(50^2 \cdot \frac{40}{r} - 1200\right) \mathrm{cm}^2 = \left(\frac{100\,000}{r} - 1200\right) \mathrm{cm}^2.$$

Da r sich in die Zehner erstreckt, muss es auf vier Dezimalstellen bestimmt werden. Wollte man nach Satz (3) rechnen, so müsste n so gewählt werden, dass $c_n - b_{n+1} < \frac{c_o - b_o}{2^{2n+1}} = \frac{20}{2^{2n+1}} < \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ würde, also $n = 9$ gesetzt und die Reihe der b_n und c_n bis b_{10} berechnet werden. Benützt man jedoch Satz (5), so muss nach (7) die Ungleichheit bestehen

$$\frac{20^3}{2^{n4+1} \cdot 120} \leqq \frac{1}{2 \cdot 10^4},$$

der $n = 3$ beinahe genügt.

Es ergibt sich

$$\begin{array}{ll} b \;= 30 & c \;= 50 \\ b_1 = 40 & c_1 = 44{,}72136 \\ b_2 = 42{,}36068 & c_2 = 43{,}52502 \\ b_3 = 42{,}94285 & c_3 = 43{,}23295 \end{array}$$

$$\frac{b_3 + 2c_3}{3} = 43{,}13625, \quad c_3 - b_3 = 0{,}29010$$

$$\frac{2^{n-1}(c_3 - b_3)^3}{(3a)^2} = \frac{32 \cdot 0{,}29^3}{120^2} = 0{,}0000542.$$

Es ist daher $43{,}13625 > r > 43{,}13620$, folglich

$$\frac{100\,000}{43{,}13625} - 1200 < F < \frac{100\,000}{43{,}13620} - 1200$$

oder

$$1118{,}236 < F < 1118{,}238,$$

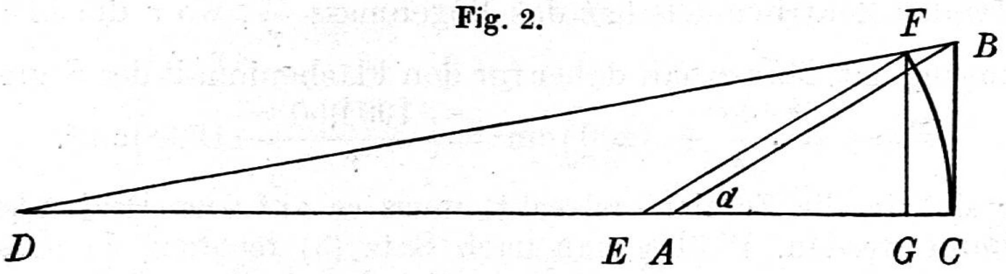
somit auf zwei Dezimalstellen genau

$$F = 1118{,}24 \text{ cm}^2.$$

III.

Es seien in Fig. 2 A, B, C die Ecken, a, b, c die ihnen beziehungsweise gegenüberliegenden Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, c die Hypotenuse und α der der Seite a gegenüberliegende Winkel. Je kleiner α ist, um so näher kommt $\frac{b + 2c}{3}$ dem Radius r des Kreisbogens von der Länge a und dem Zentriwinkel α. Verlängert man also $A\,C$ über A hinaus um die Strecke $A\,D$ von der Länge $2\,c$ und teilt $C\,D$ in drei gleiche Teile, bezeichnet den C benachbarten Teilpunkt mit E, zieht durch E eine Parallele zu $A\,B$, die vom Kreis um E durch C in F geschnitten wird, so ist der Überschuss der Länge des Kreisbogens $C\,F$ über a um so kleiner, je kleiner der Winkel α ist.

Fig. 2.



Bezeichnet man den Fusspunkt der von F auf $A\,C$ gefällten Normalen mit G, so sind die Dreiecke $A\,B\,C$ und $E\,F\,G$ ähnlich bei ähnlicher Lage. Trägt man von A aus auf der Verlängerung von $A\,C$ die doppelte Hypotenuse des Dreiecks $A\,B\,C$ und von E aus die doppelte Hypotenuse des Dreiecks $E\,F\,G$ ab, so gelangt man zu demselben Punkt D. Er ist also für die beiden Dreiecke der Ähnlichkeitspunkt; folglich geht die Gerade $D\,B$ durch den Punkt F. Dieser wird also auch erhalten, indem man die Gerade $D\,B$ mit dem Kreis um E durch C zum Schnitt bringt. Wenn umgekehrt der Kreisbogen $C\,F$ mit dem Mittelpunkt E gegeben ist und man den Radius $E\,C$ um die Strecke $E\,D$ von der Länge des Durchmessers verlängert, hierauf die Gerade $D\,F$ mit der in C gezogenen Tangente schneidet, so ist der Abstand des Schnittpunktes B von C annähernd gleich der Länge des Kreisbogens $C\,F$, und zwar fehlt zur genauen Länge um so weniger, je kleiner der Zentriwinkel $C\,E\,F$ ist. Damit ist die von *Nicolaus Cusanus* erwähnte und von *Willebrord Snellius* (1580—1626) und

Christian Huygens (1629—1695) begründete Näherungskonstruktion für die Streckung eines Kreisbogens gewonnen[3]).

Einen allgemeinen Ausdruck für deren Fehler erhält man, da

$$\frac{3\,a}{b+2\,c}=\frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$$

ist, indem man $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ durch die betreffenden unendlichen Reihen ersetzt und die angedeutete Division ausführt. Es ergibt sich

$$\frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}=\alpha-\frac{\alpha^5}{180}-\frac{\alpha^7}{1512}\pm\cdots\cdots,$$

wo α das Bogenmass des Winkels $C\,E\,F$ bezeichnet. Gemessen mit dem Radius $E\,C$ als Längeneinheit ist also die Strecke $B\,C$ um ungefähr $\frac{\alpha^5}{180}\left(1+\frac{\alpha^2}{8{,}4}\right)$ kleiner als der Kreisbogen $C\,F$. Für die spitzen Winkel, die Vielfache von 15° betragen, lässt sich der Fehler dieser Näherungskonstruktion ohne Trigonometrie und unendliche Reihen leicht ermitteln. Die Daten und Ergebnisse der hierauf bezüglichen Rechnungen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt, in deren letzter Zeile die Kreisradien angegeben sind, bei denen der Fehler der Bogenstreckung 0,1 mm beträgt.

α	15°	30°	45°	60°	75°
a	1	1	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
b	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	1	1
c	$2\sqrt{2+\sqrt{3}}$	2	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$\frac{3a}{b+2c}$	0,2617925	0,5233729	0,783612	1,03923	1,28287
$\operatorname{arc}\alpha$	0,2617994	0,5235988	0,785398	1,04720	1,30900
$\operatorname{arc}\alpha-\frac{3a}{b+2c}$	0,0000069	0,0002259	0,001786	0,00797	0,02613
r	14492,8 mm	442,7 mm	56,0 mm	12,6 mm	3,8 mm

Eine allgemeine Abschätzung des Fehlers dieser Näherungskonstruktion erfolgt mit elementaren Mitteln im nächsten Abschnitt.

IV.

Die im zweiten Abschnitt aufgestellten Ungleichheiten ermöglichen die Berechnung zyklometrischer und trigonometrischer Funktionen für kleine Argumentwerte. Bezeichnen nämlich wie bisher c

[3]) Man vergleiche damit in dem sehr lesenswerten Buche von *F. Rudio*, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig, Teubner 1892, S. 116, ferner *Weber* und *Wellstein*, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, Leipzig, Teubner 1905, Bd. 2, S. 274—276, wo sich auf Seite 275, Zeile 3 von unten, ein Vorzeichenfehler eingeschlichen hat, demzufolge die Gleichungen (3), (4) und (5), S. 276, zu verbessern sind.

die Hypotenuse, a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, wo der Kathete a der Winkel α gegenüberliegt, so ist nach Satz (5):

$$\frac{b+2c}{3} > r > \sqrt[3]{b\,c^2},$$

somit

$$\frac{3a}{b+2c} < \frac{a}{r} < \frac{a}{\sqrt[3]{bc^2}}$$

oder

(8)
$$\frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} < arc\,\alpha < \frac{\sin\alpha}{\sqrt[3]{\cos\alpha}}$$

Für kleine Winkel ist daher

$$\sin\alpha \asymp arc\,\alpha\,\sqrt[3]{\cos\alpha},$$ [4]

$$\operatorname{tg}\alpha \asymp \frac{arc\,\alpha}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha}}.$$

Es sind das die Maskelyneschen Formeln (*Nevil Maskelyne* 1732—1811), deren Begründung *Tralles* im Jahre 1804 gegeben hat. Sie führen zu den bekannten Gleichungen

$$\log\sin\alpha = \log\operatorname{arc}\alpha + S$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha = \log\operatorname{arc}\alpha + T,$$

wo
$$S = \frac{1}{3}\log\cos\alpha \text{ und } T = -\frac{2}{3}\log\cos\alpha$$

ist, die bei Verwendung fünfstelliger Logarithmen bis zu 6^0 benützt werden können.

Wir bezeichnen nun arc α mit y und setzen stets voraus, es sei $y < 1$.

Aus der dritten Ungleichheit dieses Abschnittes folgt

$$3\sin y < 2y + y\sqrt{1-\sin^2 y}$$
$$[(9+y^2)\sin y - 6y^2]^2 < 9y^2 - 3y^4.$$

Da sowohl die rechte Seite dieser Ungleichheit als auch links der Ausdruck in der eckigen Klammer positiv ist, besteht die Beziehung

$$(9+y^2)\sin y - 6y < 3y\sqrt{1-\frac{y^2}{3}},$$

folglich für Werte von y, die kleiner als 1 sind,

$$(9+y^2)\sin y < 9y - \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{24} - \frac{y^7}{144} -$$

und daher

(9)
$$\sin y < y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{72} - \frac{y^7}{432} + \ldots$$

---

[4]) Das Zeichen $\asymp$ bedeutet „annähernd gleich".

Hieraus und aus der Gleichung $\cos y = 1 - 2\sin^2 \frac{y}{2}$ ergibt sich

$$\cos y > 1 - 2\left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + \frac{y^5}{2304}\right)^2$$

$$(10) \qquad \cos y > 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{576}$$

Zufolge der dritten Ungleichheit dieses Abschnittes ist

$$\sin y > y\sqrt[3]{\cos y} > y\sqrt[3]{1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{576}}.$$

Führt man die angedeutete Radizierung aus, so erhält man

$$\sin y > y - \frac{y^3}{2\cdot 3} - \frac{y^5}{2^3\cdot 3^2} - \frac{y^7}{2^8\cdot 3^5}(19\cdot 12 + 49\,y^2).$$

Dadurch, dass man hier innerhalb der Klammern y durch 1 und hernach den sich ergebenden Wert 277 des Klammerausdruckes durch 288 ersetzt, geht diese Ungleichheit in die folgende über:

$$\sin y > y - \frac{y^3}{2\cdot 3} - \frac{y^5}{2^3\cdot 3^2} - \frac{y^7}{2^3\cdot 3^3};$$

es ist daher

$$\sin\frac{y}{2} > \frac{y}{2} - \frac{y^4}{2^4\cdot 3} - \frac{y^5}{2^8\cdot 3^2} - \frac{y^7}{2^{10}\cdot 3}$$

und nach (10)

$$\cos\frac{y}{2} > 1 - \frac{y^2}{2^3} + \frac{y^4}{2^7\cdot 3} - \frac{y^6}{2^{12}\cdot 3^2}.$$

Aus den beiden letzten Ungleichheiten folgt

$$(11) \qquad \sin y > y - \frac{y^3}{2\cdot 3} + \frac{y^5}{2^4\cdot 3^2} - \frac{11\,y^7}{2^{12}\cdot 3^3},$$

woraus man auf Grund der Gleichung $\cos y = 1 - 2\sin^2\frac{y}{2}$ schliesst:

$$\cos y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2^3\cdot 3} - \frac{y^6}{2^8\cdot 3} + \frac{139\,y^8}{2^{18}\cdot 3^3}.$$

Indem man in dieser Ungleichheit y^8 durch das grössere y^6 ersetzt, geht sie in die folgende über

$$\cos y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2^3\cdot 3} - \frac{y^6}{2^{18}\cdot 3^3}\cdot 9077;$$

somit ist

$$(12) \qquad \cos y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{780}.$$

Die im dritten Abschnitt angegebene Näherungskonstruktion für die Länge eines Kreisbogens beruht darauf, dass der Ausdruck $\frac{\sin y}{2+\cos y}$

nur um ganz wenig kleiner ist als y. Zufolge der Ungleichheiten (11) und (12) ist

$$\frac{3\sin y}{2+\cos y} > \left(3\,y - \frac{y^3}{2} + \frac{y^5}{2^4\cdot 3} - \frac{11\,y^7}{2^{12}\cdot 3^2}\right) : \left(3 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2^2\cdot 3} - \frac{y^6}{780}\right),$$

daher
$$\frac{3\sin y}{2+\cos y} > y - \frac{y^5}{144}\left(1 + \frac{y^2}{8{,}4}\right)$$

und
$$y - \frac{3\sin y}{2+\cos y} < \frac{y^5}{144}\left(1 + \frac{y^2}{8{,}4}\right).$$

Die erwähnte Kreisbogenstreckung ergibt sonach für einen Bogen vom absoluten Mass y eine Strecke, deren Masszahl um weniger als $\frac{y^5}{144}\left(1 + \frac{y^2}{8{,}4}\right)$ zu klein ist.

Ersetzt man in der Ungleichheit (11) y^7 durch das grössere y^5, so geht sie über in

$$\sin y > y - \frac{y^3}{2\cdot 3} + \frac{757\,y^5}{110592};$$

somit ist

$$\sin y > y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{146}.$$

Aus dieser und der Ungleichheit (9) ergibt sich

$$y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{146} < \sin y < y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{72}, \tag{13}$$

ferner aus (10) und (12)

$$1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{576} < \cos y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{780}. \tag{14}$$

Mit Hilfe der Näherungswerte $y - \frac{y^3}{6}$ für $\sin y$ und $1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24}$ für $\cos y$ lässt sich der praktisch so wichtige Satz von *Legendre* über sphärische Dreiecke herleiten, deren Seiten im Vergleich zum Kugelradius sehr klein sind. Die in den beiden letzten Ungleichheiten gezogenen Schranken ermöglichen die Berechnung des Sinus bis 8° 28′ und des Cosinus bis 18° 24′ auf sechs Dezimalstellen genau.

Zufolge der Ungleichheit (8) ist

$$\frac{3\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{3 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} < \mathrm{arc}\,\frac{\alpha}{2},$$

daher, wenn man $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ mit t bezeichnet

$$\frac{3\,t}{3+t^2} < \mathrm{arc\,tg}\,t$$

oder

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{9} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t^2}{3}} < \operatorname{arc\,tg} t.$$

Von jetzt an wird vorausgesetzt, es sei $t < 1$. Die letzte Ungleichheit wird daher verstärkt, wenn man auf der linken Seite im zweiten Faktor des dritten Gliedes 1 statt t setzt; somit ist

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{12} < \operatorname{arc\,tg} t. \tag{15}$$

Nach (6) ist

$$\frac{b + 2c}{3} - r < \frac{1}{18} \cdot \frac{(c - b)^2}{c + b},$$

$$\frac{b + 2c}{3a} - \frac{r}{a} < \frac{1}{18} \cdot \frac{(c - b)^2}{a(c + b)},$$

$$\frac{\cos\alpha + 2}{3\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{arc}\alpha} < \frac{1}{18} \cdot \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)},$$

daher

$$\frac{1}{2\operatorname{arc}\frac{\alpha}{2}} > \frac{3 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{18}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} t < \frac{9t}{9 + 3t^2 - t^4}$$

$$\operatorname{arc\,tg} t < t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{9 + 3t^2 - t^4}.$$

Unter Beachtung des Umstandes, dass im dritten Glied der rechten Seite dieser Ungleichheit der Nenner den Wert 9 übersteigt, erhält man aus ihr und (15)

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{12} < \operatorname{arc\,tg} t < t - \frac{t^3}{3} + \frac{2}{9}t^5. \tag{16}$$

Die hier für arc tg t gezogenen Schranken ermöglichen die Berechnung dieser Funktion auf sechs Dezimalstellen für Argumentwerte, die 0,08152 nicht übersteigen und die Bestimmung des Winkels aus Tangens bis zu $4^\circ\,39\frac{1}{2}'$ auf Zehntelsekunden genau.

Die Berufswahlvorbereitung.

Ein Versuch, durchgeführt an einer Landsekundarschule.

Von der Vorbereitung des Schülers auf die Berufswahl hängt es ab, wie stark dieser mit eigenen Beobachtungen und Erlebnissen an der Lösung der Frage: „Welchen Beruf?“ teilnehmen kann. Die bewusste Berufswahlvorbereitung ist Sache des Elternhauses und der Schule. In der Schule