

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 37 (1927)
Heft: 7-8

Artikel: Die Anwendung der Kongruenzsätze für das Dreieck als Beweismittel :
geometrischer Schulversuch
Autor: Gassmann, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-788360>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Anwendung der Kongruenzsätze für das Dreieck als Beweismittel.

Geometrischer Schulversuch.

Von E. Gassmann.

Die im folgenden dargestellte Versuchsreihe unterscheidet sich von einer Reihe planmässiger Übungen nur dadurch, dass die Beobachtungen über den Fortschritt der Schülerleistungen festgehalten wurden. Dadurch erweiterte sich die Übungsfolge zum didaktischen Experiment.

Ziel der Untersuchung ist die Lösung der Frage, wie sich in einer Schulklasse das Verständnis für das Beweisverfahren entwickelt. Dieser Untersuchung dient eine Reihe von Aufgaben, in denen der Schüler durch Anwendung der Kongruenzsätze für das Dreieck einen Beweis für irgendeine geometrische Wahrheit zu erbringen hat.

Voraussetzung: Die Schüler (33: 19 Knaben und 14 Mädchen einer 1. Klasse der Sekundarschule) haben die Kongruenzsätze für das Dreieck kennen gelernt, ebenso die Sätze über die Winkel an Parallelen. Das Parallelogramm ist durch Zusammenfügen von zwei kongruenten Dreiecken hergestellt und die daraus sich ergebenden Eigenschaften sind abgeleitet worden. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich die

I. Aufgabe.

Wir zeichnen zwei Parallele, die von zwei andern Parallelen geschnitten werden. Hat das entstandene Viereck (Parallelogramm) dieselben Eigenschaften wie die auf obigem Wege hergestellte Figur?

Vorbereitung des Beweises. Wir ziehen eine Diagonale. So entstehen zwei Dreiecke, die vermutlich kongruent sind. Welcher Kongruenzsatz lässt sich anwenden?

Bevor die Schüler sich entscheiden mussten, wurden die Kongruenzsätze gründlich wiederholt und in folgender Reihe festgehalten: Dreiecke sind kongruent¹⁾:

1. wenn sie in drei Seiten,
2. in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
3. in zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel oder
4. einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Beweis: Der Beweis war durch die Schüler nur in der Weise zu erbringen, dass sie den anzuwendenden Lehrsatz nannten. Das Klassenergebnis wurde das erstemal durch eine offene Abstimmung festgestellt. Diese ergab folgendes: Es entschieden sich

¹⁾ Die gewöhnliche, zugleich historische Reihenfolge der Kongruenzsätze (Euklid) ist die folgende:

1. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: S W S.
2. Eine Seite und die anliegenden Winkel: W S W.
3. Drei Seiten: S S S.
4. Zwei Seiten und den Gegenwinkel der Grösseren: S S W.

| | | |
|------------------|----|---------|
| für den 1. Satz: | 21 | Schüler |
| „ „ 2. „ | 2 | „ |
| „ „ 3. „ | 0 | „ |
| „ „ 4. „ | 10 | „ |

Nun wurde den Schülern ohne Nennung des richtigen Satzes mitgeteilt, dass die Verschiedenheit der Ergebnisse nicht befriedige. Sie wurden aufgefordert, nochmals nachzudenken und sich neuerdings zu entscheiden. Nach dieser zweiten Frage entschieden sich

| | | |
|------------------|----|---------|
| für den 1. Satz: | 23 | Schüler |
| „ „ 2. „ | 0 | „ |
| „ „ 3. „ | 0 | „ |
| „ „ 4. „ | 10 | „ |

Damit waren der 2. und 3. Fall endgültig ausgeschieden. Die Aufgabe wurde zum drittenmal klar gestellt, auch wurden die Voraussetzungen wiederholt und den Schülern eingeschärft, dass sie sich die Sache nochmals gründlich überlegen sollten. Nun entschieden sich

| | | |
|------------------|----|---------|
| für den 1. Satz: | 11 | Schüler |
| „ „ 4. „ | 22 | „ |

Nach nochmaliger Erklärung bekannten sich

| | | |
|--------------|----|---------|
| zum 1. Satz: | 10 | Schüler |
| „ 4. „ | 23 | „ |

Das viermalige Ansetzen hat ohne Zweifel einen guten Erfolg gehabt. Während sich im erstenmal nur 10 Schüler für den richtigen Beweis (4. Satz) entschieden, sind es das drittemal 22, das viertemal 23 Schüler, d. h. mehr als zwei Drittel der Klasse. Der Fortschritt von einem Mal zum andern ist aber nicht so einfach, wie es diese Zahlen erscheinen lassen.

Es haben nämlich von der ersten zur zweiten Abstimmung 12 Schüler ihre Meinung geändert. Vergleichen wir hiemit die Veränderung der Zahlen oben, so ergibt sich, dass Schüler, die sich das erstemal für den 1. Satz erklärt hatten, zum 4. übergegangen sind und umgekehrt. Von der zweiten auf die dritte Abstimmung haben 13 Schüler die Meinung geändert. Da der Zuwachs beim 4. Satz nur 12 ist, muss mindestens einer wieder vom rechten Ergebnis abgefallen sein.

Noch auffallender ist dies beim Übergang vom 3. auf den 4. Versuch. Die Zahl der richtigen Entscheide nimmt um einen zu (von 22 auf 23). Es haben aber 7 Schüler ihre Meinung geändert.

Für die Unsicherheit der Schüler spricht der Umstand, dass die Meinung

| | | |
|----------------------|----|---------|
| nicht geändert haben | 7 | Schüler |
| einmal „ „ | 20 | „ |
| zweimal „ „ | 6 | „ |
| Total | 33 | Schüler |

Das Ergebnis wäre auch jetzt noch unvollständig, wenn wir nicht wüssten, dass zwei Schüler, die sich für den 4. Satz entschieden haben, es aus unrichtiger Überlegung taten, indem sie nicht die

Diagonale als gleiche Seite erkannten. Sie wurden herausgefunden, weil ich sie als zweifelhafte Elemente zuerst zum Beweis aufforderte. Für den ganzen Versuch ergibt sich also folgende Übersicht:

| | I. | II. | III. | IV. Abstimmung |
|--------------------|----|-----|------|----------------|
| 1. Satz | 21 | 23 | 11 | 10 |
| 2. „ | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3. „ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4. „ | 10 | 10 | 22 | 23 |
| Meinungsänderungen | 12 | 13 | 7 | |

II. Aufgabe.

Voraussetzung bei Beginn dieses Versuches ist das Ergebnis des vorangehenden, also die Kenntnis der Eigenschaften des Parallelogramms, wie sie aus der Kongruenz der zwei Teildreiecke sich ergeben.

Neue Aufgabe. Wir ziehen im Parallelogramm beide Diagonalen und suchen die Eigenschaften, welche sich hieraus ergeben. Wir vermuten, dass beide Diagonalen das Parallelogramm in vier Dreiecke teilen, von denen je zwei gegenüberliegende kongruent sind.

Frage: Auf welchen Kongruenzsatz können wir uns stützen? Wie beim ersten Versuch wurde auch diesmal die Abstimmung viermal wiederholt.

Ergebnis: Es entschieden sich bei der

| | I. | | II. | | III. | | IV. Abstimmung | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|------|-----|----------------|-----|
| | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. |
| für den 1. Satz | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| „ „ 2. „ | 14 | 7 | 13 | 3 | 12 | 3 | 9 | 4 |
| „ „ 3. „ | 1 | 3 | 2 | 5 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| „ „ 4. „ | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 | 8 | 8 | 10 |

Es änderten ihre Ansicht

von der 1. auf die 2. Abstimmung 5 Knaben und 7 Mädchen

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| „ „ 2. „ | 3 | „ | 2 | „ | 2 | „ |
| „ „ 3. „ | 4 | „ | 3 | „ | 2 | „ |

Bei diesem Beweis kommt derselbe Kongruenzsatz zur Anwendung wie in der vorhergehenden Aufgabe. Aber es gesellt sich in der Beweisführung ein verwirrendes Element dazu, das sind die Scheitelwinkel an den Diagonalen, deren gleiche Grösse ohne weiteres erkannt wird, so dass in den vier Teildreiecken leicht vier Stücke als gleich nachgewiesen werden können. Dieser Umstand hat denn auch die Schüler der ersten, unrichtig entscheidenden Gruppe nach ihrem eigenen Geständnis veranlasst, Dinge in die Voraussetzung hineinzuziehen, die noch unbewiesen waren. Ein Fortschritt gegenüber dem Ergebnis der 1. Aufgabe ist es, dass dies nicht von vornherein geschah und dass sich von Anfang an kein einziger Schüler für den 1. Kongruenzsatz entschied. Einen merkwürdigen Denkfehler machten die zwei Schüler, die für den 3. Satz stimmten. Sie schlossen, dass die Seiten in beiden Dreiecken gleich seien, weil sie die Diagonalen

gemeinsam als Seiten hätten. Sie übersahen also, dass auf jedes Dreieck nur ein Teil der Diagonale als Seite entfiel und dass eben der Nachweis der gleichen Grösse dieser Teile das Problem ist. Ein Fortschritt gegenüber dem ersten Versuch ist auch die geringere Zahl der Schüler, die ihre Meinung gewechselt haben.

Die Meinung nicht geändert haben 9 Knaben und 4 Mädchen
 „ „ einmal „ „ 10 „ „ 9 „
 „ „ zweimal „ „ 0 „ „ 1 „

Bei diesem Versuch wurden Knaben und Mädchen auseinandergehalten. Die landläufige Ansicht, dass die Mädchen weniger gut denken könnten, lässt sich aus dieser Versuchsreihe nicht bestätigen. Die Klasse zählt 19 Knaben und 14 Mädchen, von denen den Beweis richtig gefunden haben 8 Knaben und 10 Mädchen. Diese stehen also günstiger da.

III. Aufgabe.

Frage: Welche besonderen Eigenschaften weisen die Diagonalen des Rechtecks auf?

Der Beweis für die gleiche Länge der Diagonalen kann sich stützen auf den Satz, dass eine Diagonale das Rechteck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke teilt.

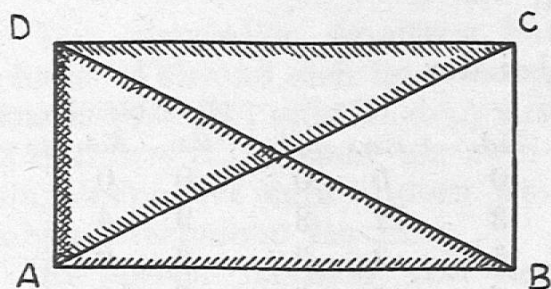


Fig. 1

Der Schüler muss in Fig. 1 die Kongruenz der Dreiecke ABD und ACD nachweisen.

Das Ergebnis der vier Abstimmungen ist folgendes:

| | I. | | II. | | III. | | IV. Abstimmung | |
|---------|-----|-----|-----|-----|------|-----|----------------|-----|
| | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. |
| 1. Satz | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2. | 14 | 10 | 15 | 12 | 15 | 13 | 17 | 14 |
| 3. | 5 | 2 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 4. , | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |

Meinungsänderung 2 Kn. 3 M. 1 Kn. 1 M. 2 Kn. 1 M.

Nicht geändert haben die Meinung 14 Knaben und 10 Mädchen
 einmal „ „ „ „ 4 „ „ 4 „
 zweimal „ „ „ „ 1 „ „ 0 „

IV. Aufgabe.

Voraussetzung: Allgemeine Eigenschaften des Parallelogramms. Eine Diagonale teilt den Rhombus in zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke.

Neue Aufgabe. Zerlegung des Rhombus durch zwei Diagonalen. Warum sind die vier Teildreiecke kongruent?

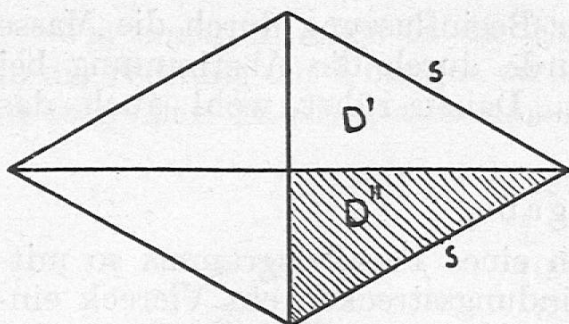


Fig. 2

Naheliegend ist hier der Beweis der Kongruenz durch den 2. Satz, aber es lassen sich auch die andern Sätze anwenden, wenn man die Achsensymmetrie zu Hilfe nimmt. Aus diesem Grunde kann die IV. Aufgabe für die Entscheidung, ob die Ergebnisse richtig oder unrichtig seien, nicht verwendet werden; denn es können

alle richtig sein. Merkwürdig ist aber die Bevorzugung des 1. Satzes.

Ergebnis der vier Entscheidungen:

| | I. | | II. | | III. | | IV. Abstimmung | |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|-------|
| | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. |
| 1. Satz | 15 | 12 | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 2. „ | 3 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 3. „ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4. „ | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| Meinungsänderung | 4 Kn. | 2 Md. | 1 Kn. | 0 Md. | 0 Kn. | 0 Md. | 0 Kn. | 0 Md. |

Nicht geändert haben die Meinung 14 Knaben und 12 Mädchen

| | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| einmal „ | „ | „ | „ | 5 | „ | „ | 2 | „ |
| zweimal „ | „ | „ | „ | 0 | „ | „ | 0 | „ |

V. Aufgabe.

Voraussetzung: In einem Parallelogramm wird durch den Schnittpunkt der Diagonalen eine beliebige Gerade gezogen.

Behauptung: Die Gerade teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Vierecke.

Die Analyse ergibt, dass die Gleichheit der Strecken a und a_1 zu beweisen ist (siehe Fig. 3). a und a_1 sind gleichliegende Seiten in zwei kongruenten Dreiecken.

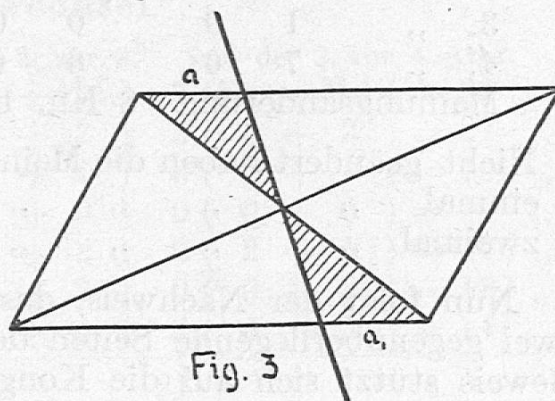


Fig. 3

Beweis der Kongruenz. Es entschieden sich in der

| | I. | | II. | | III. | | IV. Abstimmung | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|------|-----|----------------|-----|
| | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. |
| für den 1. Satz | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| „ „ 2. „ | 11 | 7 | 12 | 11 | 12 | 11 | 12 | 10 |
| „ „ 3. „ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| „ „ 4. „ | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 2 | 6 | 3 |
| Meinungsänderung | 6 | 6 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 |

Neu war bei diesen Abstimmungen, dass, um jede Beeinflussung auszuschalten, die Schüler die Augen schliessen mussten. Der Beeinflussung durch einzelne bessere Schüler konnte bei den ersten Versuchen durch den Hinweis auf deren Fehlleistungen gut entgegen-

gearbeitet werden, weniger aber der Beeinflussung durch die Masse der Stimmenden. Dieser Fehler wurde durch die Abstimmung bei geschlossenen Augen ausgeschaltet. Daher rührt wohl auch das weniger einheitliche Ergebnis.

VI. Aufgabe.

Es werden die Mitten der Seiten eines Parallelogramms so miteinander verbunden, dass die Verbindungsstrecken ein Viereck einschliessen. Warum ist dieses ein Parallelogramm? Die Analyse ergibt,

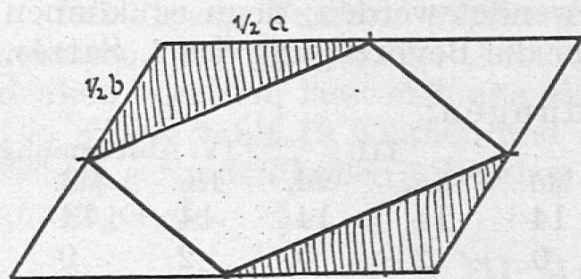


Fig. 4

dass (sofern man von den Diagonaleigenschaften absieht) die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten nachgewiesen werden muss. Es entsteht die weitere Frage, ob diese Eigenschaft genügt, um die Figur als Parallelogramm zu erkennen. Man zieht zu diesem Zweck eine Diagonale

und beweist die Kongruenz der entstandenen Dreiecke (1. Satz). Dieser Beweis wurde voraus genommen.

Ergebnis der Abstimmung (bei geschlossenen Augen)

| | I. | | II. | | III. | | IV. Abstimmung | |
|------------------|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|----------------|-----|
| | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. |
| 1. Satz | 8 | 8 | 10 | 8 | 16 | 10 | 16 | 10 |
| 2. „ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3. „ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4. „ | 7 | 6 | 8 | 6 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| Meinungsänderung | 8 Kn. 1 Md. | | 6 Kn. 3 Md. | | 0 Kn. 0 Md. | | | |

Nicht geändert haben die Meinung 7 Knaben und 10 Mädchen
 einmal „ „ „ „ 10 „ „ 4 „
 zweimal „ „ „ „ 2 „ „ 0 „

Nun folgt der Nachweis, dass wirklich im vorliegenden Fall je zwei gegenüberliegende Seiten des innern Vierecks gleich sind. Der Beweis stützt sich auf die Kongruenz der zwei gegenüberliegenden Dreiecke (2. Satz). Die Abstimmung ergibt:

| | I. | | II. | | III. | | IV. Abstimmung | |
|------------------|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|----------------|-----|
| | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. | Kn. | Md. |
| 1. Satz | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 2. „ | 10 | 8 | 14 | 10 | 15 | 10 | 15 | 13 |
| 3. „ | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4. „ | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Meinungsänderung | 4 Kn. 3 Md. | | 1 Kn. 0 Md. | | 0 Kn. 3 Md. | | | |

Nicht geändert haben die Meinung 14 Knaben und 9 Mädchen
 einmal „ „ „ „ 5 „ „ 4 „
 zweimal „ „ „ „ 0 „ „ 1 „

*

Um einen Einblick in die Entwicklung der Klassenleistung und in die Wirkung der Übungen zu bekommen, stellen wir die Ergebnisse in folgenden Tabellen zusammen.

Anzahl der richtigen Lösungen.

| | I. | II. | III. | IV. Abstimmung |
|------------|--------------------------------|-----|------|----------------|
| 1. Aufgabe | 10 | 10 | 22 | 23 |
| 2. „ | 8 | 10 | 13 | 18 |
| 3. „ | 14 | 17 | 18 | 31 |
| 4. „ | (kommt hier nicht in Betracht) | | | |
| 5. „ | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 6. „ | 16 | 18 | 26 | 26 |
| | 18 | 24 | 25 | 28 |
| | 74 | 87 | 112 | 135 |

Es fällt auf, wie jede folgende Abstimmung in allen Aufgaben einen Fortschritt bringt. Aber je mehr Aufgaben gelöst werden, um so weniger zeigt sich diese Wirkung. Die Schüler lernen also unter dem Einfluss dieser Übungen von Anfang an sorgfältiger urteilen. Damit ist auch der Augenblick gekommen, da auf eine mehrmalige Abstimmung verzichtet werden kann (siehe letzte Aufgabe).

Die Art des Fortschrittes der Schülerleistungen zeigt sich noch deutlicher in der Abnahme des Meinungswechsels, wie das die folgende Zusammenstellung zeigt.

Meinungswechsel.

| | von der 1. zur 2. | von der 2. zur 3. | von der 3. zur 4. Abst. |
|------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| 1. Aufgabe | 12 (Kn.+Md.) | 13 (Kn.+Md.) | 7 (Kn.+Md.) = 32 Sch. |
| 2. „ | 12 (5 + 7) | 4 (2 + 2) | 5 (3 + 2) = 21 „ |
| 3. „ | 5 (2 + 3) | 2 (1 + 1) | 3 (2 + 1) = 10 „ |
| 4. „ | 6 (4 + 2) | 1 (1 + 0) | 0 (0 + 0) = 7 „ |
| 5. „ | 12 (6 + 6) | 2 (0 + 2) | 3 (2 + 1) = 17 „ |
| 6. „ | 9 (8 + 1) | 9 (6 + 3) | 0 (0 + 0) = 18 „ |
| | 7 (4 + 3) | 1 (1 + 0) | 3 (0 + 3) = 11 „ |
| | 63 | 32 | 21 |

Während die Anzahl der richtigen Lösungen von Abstimmung zu Abstimmung grösser wird, nimmt die Zahl derjenigen Schüler, die ihre Meinung wechseln, ab (von einzelnen Ausnahmen abgesehen, die wohl in der kleinen Zahl begründet sind). Diese Abnahme macht sich nicht nur bei derselben Aufgabe geltend, sondern auch in der Reihe der aufeinanderfolgenden Aufgaben. Dabei fällt beim Übergang zu Aufgabe 5 in beiden Tabellen die plötzliche Verschlechterung der Ergebnisse auf. Sie rührt her von der Erschwerung der Aufgabe durch die Abstimmung bei geschlossenen Augen. Nachher sind die Verhältnisse wieder ähnlich, wie von Aufgabe 1 bis 4.

Am deutlichsten zeigen sich die hier beobachteten Tatsachen in der 3. Zusammenstellung.

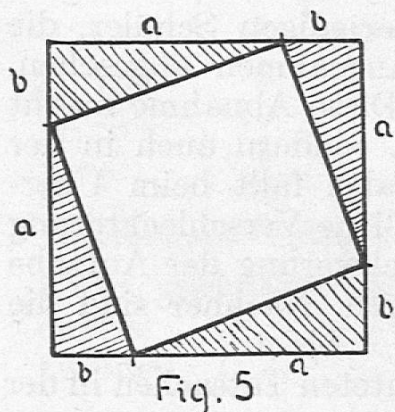
Es haben die Meinung geändert:

| | 0 mal | 1mal | 2mal | |
|------------|-----------------|----------------|---------------|-------------|
| 1. Aufgabe | 7 (Kn. + Md.) | 20 (Kn. + Md.) | 6 (Kn. + Md.) | |
| 2. „ | 13 (9 + 4) | 19 (10 + 9) | 1 (0 + 1) | |
| 3. „ | 24 (14 + 10) | 8 (4 + 4) | 1 (1 + 0) | |
| 4. „ | 26 (14 + 12) | 7 (5 + 2) | 0 (0 + 0) | |
| 5. „ | 18 (11 + 7) | 11 (6 + 5) | 3 (1 + 2) | nur 32 Sch. |
| 6. „ | { 17 (7 + 10) | 14 (10 + 4) | 2 (2 + 0) | |
| | { 23 (14 + 9) | 9 (5 + 4) | 1 (0 + 1) | |
| | 128 | 88 | 14 | |

Auch hier ist der Einschnitt zwischen Aufgabe 4 und 5 deutlich, aber er ist nicht so gross wie in den andern Zusammenstellungen. Dafür bringt uns diese Tabelle deutlich die zunehmende Sicherheit der Schüler in der Anwendung der Kongruenzsätze als Beweismittel zum Bewusstsein, indem nach den ersten beiden Aufgaben die Zahl derjenigen Schüler, die ihre Meinung ändern, stark abnimmt.

Letzte Aufgabe.

Diese wurde erst einige Monate später durchgeführt. Es sollte untersucht werden, ob die vorangegangenen Übungen einen anhaltenden Erfolg gehabt haben und wie sich die Schüler einer grössern Zahl von Aufgaben gegenüber verhielten. Zu diesem Zweck wurden 5 Aufgaben gewählt, die jeden Kongruenzsatz einmal anwenden liessen. Die 5. Aufgabe sollte verhindern, dass einzelne Schüler nach drei Entscheidungen einfach für den noch bleibenden Kongruenzsatz stimmten. Die Aufgaben wurden so vorbereitet, dass die Schüler alle Figuren zuerst in der gegebenen Reihenfolge nach der bestimmten Anleitung zeichnen mussten. Die Art der Entstehung wurde dann nochmals wiederholt, weil sie für die Erkenntnis der drei Bestimmungsstücke massgebend war. Erst nachher mussten die Schüler neben jede Figur den Lehrsatz schreiben, den sie zum Beweis der Kongruenz der Dreiecke anwenden wollten. Ferner mussten sie in jeder Figur die gewählten Bestimmungsstücke hervorheben, was eine wichtige Kontrolle war, um Zufallsurteile herauszufinden und sie nötigenfalls als unrichtig zu erklären.



Entstehung der Figuren:

Fig. 5. Auf den Seiten eines Quadrates wird von den Ecken aus in der Uhrzeiger-richtung die gleiche Strecke abgetragen. Die Verbindungsstrecken der Endpunkte bilden ein Viereck, das vermutlich ein Quadrat ist. Beweis der Gleichheit der Seiten (und der rechten Winkel).

Fig. 6. Von einem Punkt der Halbierungslinie eines Winkels werden unter 45° zwei Strahlen, die nicht einen gestreckten Winkel bilden, gezogen.

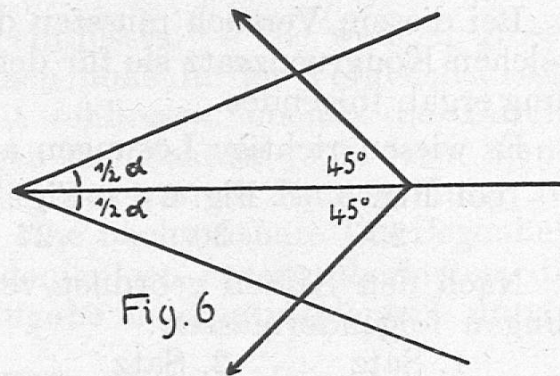


Fig. 6

Fig. 7. In einem Deltoid wird die Diagonale gezogen, die die Schnittpunkte der gleichen Seiten verbindet.

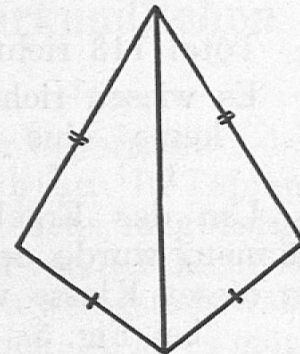


Fig. 7

Fig. 8. Von einem Punkt der Senkrechten auf eine Gerade werden die gleichen Strecken a nach dieser gezogen.

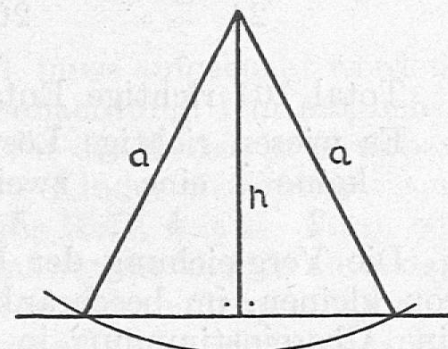


Fig. 8

Fig. 9. Von den Endpunkten der Strecke AB werden zwei Paare paralleler Strahlen gezogen, die sich in zwei Punkten schneiden.

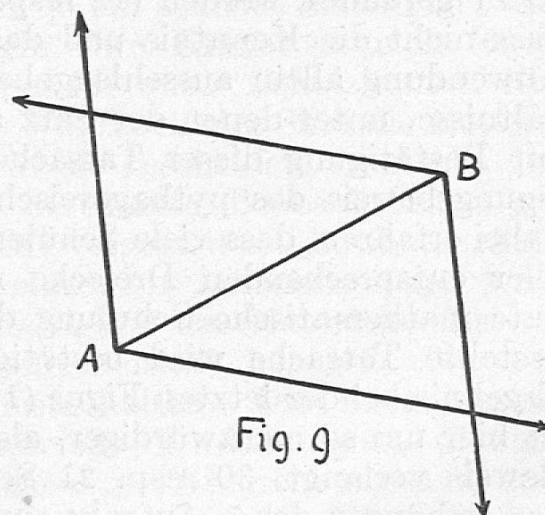


Fig. 9

Bei diesem Versuch mussten die Schüler nur einmal entscheiden, welchen Kongruenzsatz sie für den richtigen hielten. Diese Entscheidung ergab folgendes.

Es wiesen richtige Lösungen auf:

| | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| bei Fig. 5 | Fig. 6 | Fig. 7 | Fig. 8 | Fig. 9 | |
| 25 | 30 | 27 | 12 | 19 | Schüler |

Nach den Sätzen geordnet verteilen sich die richtigen Entscheidungen folgendermassen:

| | | | | |
|---------|---------|---------|----------|---------|
| 1. Satz | 2. Satz | 3. Satz | 4. Satz | |
| 27 | 25 | 12 | 30 | Schüler |
| | | | resp. 19 | „ |

Total 113 richtige Entscheidungen oder 3,39 pro Schüler.

Es wiesen richtige Lösungen auf:

| | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|--------------|
| keine | eine | zwei | drei | vier | fünf | |
| 1 | 1 | 4 | 10 | 11 | 6 | = 33 Schüler |

Um das Ergebnis dieses letzten Versuches richtig deuten zu können, wurde derselbe auch in einer Parallelklasse durchgeführt. In dieser Klasse wiesen richtige Lösungen auf:

| | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| bei Fig. 5 | Fig. 6 | Fig. 7 | Fig. 8 | Fig. 9 | |
| 26 | 21 | 24 | 14 | 16 | Schüler |

Nach den Sätzen geordnet:

| | | | | |
|---------|---------|---------|----------|---------|
| 1. Satz | 2. Satz | 3. Satz | 4. Satz | |
| 24 | 26 | 14 | 21 | Schüler |
| | | | resp. 16 | „ |

Total 101 richtige Entscheidungen oder 3,16 pro Schüler.

Es wiesen richtige Lösungen auf:

| | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|--------------|
| keine | eine | zwei | drei | vier | fünf | |
| 2 | 1 | 5 | 10 | 10 | 4 | = 32 Schüler |

Die Vergleichung der beiden Klassenergebnisse lässt, abgesehen von kleinen, im beschränkten Material begründeten Unterschieden, eine Übereinstimmung in zwei Punkten erkennen. Einmal ist auffallend, wie die Bestimmungsstücke für den 3. Kongruenzsatz (zwei Seiten und der der Grössern gegenüberliegende Winkel) weniger leicht gefunden werden (12 resp. 14 Schüler). Dieser Umstand zeigt, dass nicht die Kenntnis und das Verständnis eines Satzes für seine Anwendung allein ausschlaggebend ist, sondern ebenso sehr die Verhältnisse, unter denen der Satz angewendet werden muss. Man lasse zur Bestätigung dieser Tatsache in einer höheren Klasse den Zerlegungsbeweis des pythagoreischen Lehrsatzes erbringen. Man wird dabei erfahren, dass viele Schüler nicht imstande sind, die Kongruenz aller entsprechenden Dreiecke nachzuweisen, selbst wenn sie eine gute mathematische Schulung durchgemacht haben. Die oben festgestellte Tatsache wird bestätigt durch das auffallend schlechtere Ergebnis bei der letzten Figur (19 resp. 16 Schüler). Die Unsicherheit ist hier um so merkwürdiger, als bei Fig. 6, die denselben Satz zum Beweis verlangt, 30 resp. 21 Schüler richtig urteilen. Offenbar hat das Anhängen der 5. Aufgabe eine suggestive Wirkung gehabt, welche

die freie Entscheidung ungünstig beeinflusste. — Die weniger grosse Streuung der richtigen Lösungen nach links in der Vergleichsklasse lässt auf eine grössere Unsicherheit schliessen, ebenso die Durchschnittszahlen der richtigen Lösungen pro Schüler (3,39 resp. 3,16). Doch kann dies zufällig sein und ich möchte die Entscheidung, ob die planmässigen Übungen wirklich eine nachweisbare Überlegenheit der Versuchsklasse bewirkt haben, denjenigen Lesern überlassen, die in ihrer eigenen Schule die letzte Aufgabe als Kontrollversuch durchführen können.

Ein Stück Arbeitsprinzip aus dem naturkundlichen Unterricht.

Welche Fülle von Arbeitsmöglichkeiten bietet der Unterricht in der Naturkunde! Da steht an erster Stelle das Beobachten. In Töpfen, Kistchen im Zimmer, im Gartenbeet des Klassengärtchens, im günstigsten Falle im einzelnen Schülerbeet werden Pflanzen von den Kindern gezogen und im Wachstum beobachtet. Tiere können wenigstens während einiger Zeit im Zimmerterrarium gehalten werden. So ist es möglich, sie auf ihre Gestalt und einige Lebensgewohnheiten hin zu beobachten. Jedes Kind steht wieder und wieder bei diesem Lebewesen, beobachtet auf eigene Faust, teilt seine Beobachtungen freudig mit, regt durch Fragen Besprechungen an.

Ein grosses Objekt, ein Baum, der Wald, muss aufgesucht werden. Die Wanderung tritt in den Dienst der Beobachtung. Um möglichst intensives Beobachten zu erreichen, teilen wir die Klasse in Gruppen mit verschiedenen Aufgaben ein. Drei bis 4 Kinder sitzen um einen grossen, bemoosten Stein und zeichnen in ihr Heft, was sie daran beobachten. Eine Gruppe von 6 Kindern untersucht den Waldboden daraufhin, was da wächst, liegt, kriecht. Eine andere Gruppe schreibt alle Baumsorten auf. Da steht eines bei einer Buche, dort eines bei einer Eiche und schreibt seine Beobachtungen über diesen Baum auf. Es ist mit Schnur oder Messband ausgerüstet. Sechs Kinder haben die Aufgabe, von den blühenden Pflanzen je ein schönes Exemplar, von jedem Strauch einen Zweig zu sammeln. Zwei Kinder sammeln einen bescheidenen Strauss von Waldblumen für unser Schulzimmer. Ein Grüppchen schreibt oder zeichnet am Waldbächlein. Sind die Notizen oft kümmerlich, die Zeichnungen mehr als bescheiden, so macht das gar nichts; die Kinder haben doch bestimmte Beobachtungen gemacht und sie beobachten intensiv. Oft vergessen sie darob das Aufzeichnen. Die Mangelhaftigkeit der einzelnen Aufzeichnungen wird zum Teil behoben durch die Mannigfaltigkeit des Materials, das wir auf diesem Wege bekommen: Der Zeichenstift hat bei aller Bescheidenheit der Werke manches festgehalten. Die zerknitterten Notizblättlein enthalten wieder zahlreiche Entdeckungen, die gesammelten Pflanzen, Rinden-Holzstücke regen Besprechungen an und ergänzen mündliches Erzählen. Bei dem nachfolgenden Eintreten auf