Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 31 (1921)
Heft: 11

Artikel: Über das Rechnen mit benannten Zahlen
Autor: Blumer, S.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788841

müsste. Hoffen wir, dass das Buch plangemäss durchgeführt wird, so dass noch die nächste Generation und die übernächste sagen müssen, da war Ernst, Geschmack, Würde und echte Kunstliebe am Werk, als man soviel Schönes für die Jugend aussuchte. Die Sammlung diene vor allem dem edlen Genuss und nicht schulmeisterlicher Zerklärungswut. Hier mögen die Lehrer soviel als möglich schweigen, denn die Dichter reden eine tiefere Sprache. Ihnen ist das Wort gegeben!

Nachschrift der Redaktion: Zu einigen der hier aufgerollten Probleme hat der Verfasser eingehend Stellung genommen in seiner ästhetischen Studie: Die sinnliche Anschauung in der Lyrik. Glarus 1918.

Über das Rechnen mit benannten Zahlen.

Von Dr. S. Blumer, Basel.

Letzthin klagte mir ein Kollege, nun habe ihm ein Schüler, und zwar keiner von den schwächern, schon zum zweiten Male einen Kubikinhalt in cm als Lösung einer Aufgabe gegeben.

Jeder Lehrer wird nun schon dutzendmale die Beobachtung gemacht haben, dass dieser oder jener seiner Schüler ein Rechnungsresultat zwar ziffernmässig richtig ausgerechnet, aber die Benennung oder das Dezimalkomma falsch gesetzt hat. Woher kommt das? Ist bloss die Flatterhaftigkeit des Schülers an diesen Fehlern schuld oder trifft auch ein Teil der Schuld die Methode des Lehrers? Ich glaube, dass das letztere der Fall ist und zwar aus folgenden Gründen.

Wir rechnen zu viel mit unbenannten und zu wenig mit benannten Zahlen. Nun ist aber die unbenannte Zahl etwas Abstraktes, Inhaltsleeres. Eine unbenannte Zahl ist lediglich der Ausdruck für eine bestimmte Vielheit; sie sagt aber nichts aus über die Art der Einheit, die dieser Vielheit zugrunde liegt. Das praktische Leben aber hat es mit Vielheiten von bestimmten Einheiten zu tun oder mit Grössen.

Ihrem Bau nach zerfallen die Grössen in zwei Klassen: in getrennte und stetige Grössen. Die erstern bestehen aus von Natur getrennten Einheiten; Beispiel: ein Haufen Nüsse. Wollen wir uns einen Begriff von der Grösse dieses Haufens machen, so haben wir einfach die Nüsse auszuzählen. Die so erhaltene Zahl mit der Benennung „Nüsse" stellt dann die vorliegende Grösse vollständig dar; wir wissen, mit wieviel und was für Dingen wir es zu tun haben.

Bei den stetigen Grössen ist diese Trennung in Einheiten nicht vorhanden. Die wichtigsten stetigen Grössen sind: die Raumgrössen (Längen, Flächen, Volumen), die Zeiten, Kräfte, Energien. Wenn wir diese Grössen durch Zahlen darstellen wollen, so wählen wir eine Grösse derselben Art als Masseinheit und untersuchen, wie oft diese Masseinheit in der darzustellenden Grösse enthalten ist. Diesen Vorgang nennt man bekanntlich Messen. Die Zahl, welche wir beim

Messen erhalten, stellt mit der Masseinheit als Benennung die betreffende Grösse vollständig dar und soll ihre Masszahl heissen. Für mich ist also die Masszahl stets eine benannte Zahl — mit der Masseinheit als Benennung — und nicht bloss die unbenannte Zahl, die angibt, wie oft die Masseinheit in der gegebenen Grösse enthalten ist.

Nun ist bekanntlich der vierzigmillionste Teil des Erdumfanges die Masseinheit für das Messen der Längen; sie wird Meter (m) genannt. Die Masseinheit für die Flächen ist das Quadrat von 1 m Seitenlänge, der Quadratmeter (m^2) — man würde besser „Meterquadrat" sagen — und die Masseinheit für die Bestimmung der Volumen ist der Würfel (Kubus) von 1 m Kantenlänge, Kubikmeter (m^3) — besser „Meterkubus" — geheissen.

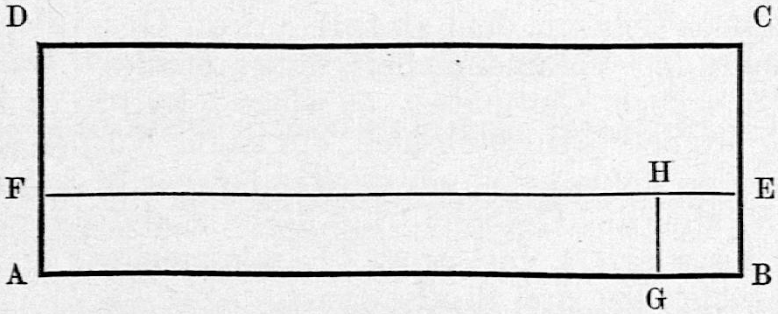
Nun wird weder mit der Flächen- noch mit der Volumeneinheit wirklich gemessen. Es wäre dies praktisch sehr umständlich und zeitraubend. Die Mathematik lehrt dafür, die Flächen- und Rauminhalte aus der Grösse bestimmter Strecken der betreffenden Gebilde berechnen. Aber gerade bei diesen Berechnungen laufen die in der Einleitung genannten Fehler unter.

Angenommen, bei einem Rechteck sei die Länge 2 m, die Breite 70 cm; wie gross ist der Flächeninhalt? Die Rechnung muss als Resultat eine mit der Flächeneinheit oder deren Unterabteilungen benannte Zahl ergeben. Eine benannte Zahl kann aber nur herauskommen, wenn auch mit benannten Zahlen gerechnet wird. Im vorliegenden Fall hätte der Schüler etwa folgendermassen zu überlegen: „Als Flächeneinheit kommt am besten der dm^2 zur Anwendung. Längs der Grundlinie lassen sich 20 dm^2 aneinanderreihen und auf der ganzen Fläche haben sieben solcher Reihen Platz; also ist $F = 7 \cdot 20\ dm^2 = 140\ dm^2$." Genau dasselbe Resultat erhalten wir auch, wenn wir $F = 20\ dm \cdot 7\ dm$ setzen, 20 mal 7 wirklich ausmultiplizieren und für dm mal dm dm^2 setzen. Letztere Art zu rechnen hat nun aber den Vorteil, dass der Schüler sich nicht jedes Mal die Fragen vorlegen muss: „Welche Flächeneinheit wähle ich und wievielmal lässt sie sich in der einen und wievielmal in der andern Ausdehnungsrichtung abtragen?" — welche Fragen auch bei kompliziertern Figuren, als das Rechteck eine ist, schwierig zu beantworten wären; man denke nur an den Kreis. Der Schüler hat, wenn er nach der zweiten Art, nach der „Einheitsrechnung", rechnen will, einfach die zur Berechnung nötigen Längen in derselben Masseinheit auszudrücken, die so erhaltenen Masszahlen in die Flächenformel einzusetzen und die von dieser vorgeschriebenen Operationen auszuführen. Das gleiche gilt von den Volumenberechnungen. Ist z. B. ein Quader 1 m lang, 1 dm breit und 1 cm dick, so setze man $V = 10\ dm \cdot 1\ dm \cdot 0{,}1\ dm = 1\ dm^3$. Auf diese Weise gerechnet, wird das Resultat der Flächen- und Volumenberechnung automatisch mit der richtigen Benennung und mit dem Dezimalkomma an der richtigen Stelle herauskommen.

Die Berechtigung dieser Art Flächen- und Volumenberechnung ist schon öfters bestritten worden, so von Rüefli im 4. Heft der Schweiz. Pädagogischen Zeitschrift, Jahrgang 1901. Dieser verdiente

Rechenmethodiker betont darin, dass man nicht dm mit dm — denn das seien zwei Strecken — multiplizieren könne. Ich bin mit ihm vollständig einverstanden, insofern man den Begriff der Multiplikation im gewöhnlichen Sinne fasst. Der Begriff der Multiplikation lässt sich aber so erweitern, — Rüefli gibt es am Schlusse seines Aufsatzes selber zu — dass auch die Multiplikation zweier Strecken einen Sinn bekommt und zu einem Rechteck als Produkt führt, dessen Länge und Breite die gegebenen Strecken ausmachen. Nach dieser erweiterten Multiplikation wäre dann auch $dm \cdot dm = dm^2$.

Ich kann aber die Berechtigung der vorgeschlagenen Art der Flächen- und Volumenberechnung auch auf eine ganz elementare Weise plausibel machen. Ich will den Beweis nur für die Flächenberechnung führen, der für die Volumenberechnung ergibt sich dann von selbst. Ist A B C D ein Rechteck von der Länge l, der Breite b und der Fläche F, A B E F ein Rechteck von der Fläche F′ der Länge l und der Breite l_0, wo l_0 die Längeneinheit oder eine ihrer Unterabteilungen, also m, dm, cm oder mm, bedeutet und ist endlich G B E H die Flächeneinheit F_0, also ein Quadrat mit l_0 als Seitenlänge, so ist



$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{b}{l_0} \cdot F' \\ F' &= \frac{l}{l_0} \cdot F_0 \end{aligned}\right\} \text{ also } F = \frac{b}{l_0} \cdot \frac{l}{l_0} \cdot F_0$$

Nehmen wir uns nun vor, für $l_0 \cdot l_0$ stets F_0 zu setzen, so ist $F = b \cdot l$.

Ist umgekehrt die Aufgabe zu lösen: Welche Länge hat ein Rechteck von 1 m² Fläche und 12½ cm Breite, so wird man vorerst entweder die Fläche in cm² oder dann die Breite in m ausdrücken und dann setzen

$$\text{Länge} = \frac{10000 \text{ cm}^2}{12\frac{1}{2} \text{ cm}} = \frac{10000 \text{ cm} \cdot \text{cm}}{12\frac{1}{2} \text{ cm}} = 800 \text{ cm}$$

oder: $\text{Länge} = \dfrac{1 \text{ m}^2}{\frac{1}{8} \text{ m}} = \dfrac{1 \text{ m} \cdot \text{m}}{\frac{1}{8} \text{ m}} = 8 \text{ m}.$

Hat man ferner die Höhe eines Balkens von 700 dm³ Inhalt, 8 m Länge und 25 cm Breite zu berechnen, so operiert man nach der Einheitsrechnung folgendermassen: $h = \dfrac{700 \text{ dm}^3}{80 \text{ dm} \cdot 2{,}5 \text{ dm}} = \dfrac{700 \text{ dm}^3}{200 \text{ dm}^2} = 3{,}5 \text{ dm}.$

Gleich wie bei der Berechnung der Fläche eines Rechtecks verfährt man bei der Berechnung eines Drehmomentes oder einer Arbeit. Bei beiden heisst die Masseinheit Meterkilogramm (mkg). Im ersten Fall versteht man unter 1 mkg das Drehmoment, das die Kraft 1 kg am Hebelarm 1 m erzeugt. Die Kraft P, die am Arm l angreift, hat dann ein Drehmoment $M = \frac{P}{1\,\mathrm{kg}} \cdot \frac{l}{1\,\mathrm{m}}$ mkg. Setzt man nun fest, dass 1 kg · 1 m = 1 mkg sein soll, dann ist $M = P \cdot l$. — Im zweiten Fall hat man unter 1 mkg die Arbeit zu verstehen, die aufgewendet werden muss, um eine Kraft von 1 kg auf dem Weg 1m zu überwinden. Ersteigt also ein 85 kg schwerer Mann einen Berg von 1200 m relativer Höhe, so beträgt die von ihm aufgewendete Arbeit $A = \frac{85\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg}} \cdot \frac{1200\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\,\mathrm{mkg} = 102000\,\mathrm{mkg}$.

Dasselbe Resultat hätten wir erhalten, wenn wir einfach gesetzt hätten $A = 85\,\mathrm{kg} \cdot 1200\,\mathrm{m} = 85 \cdot 1200\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} = 102000\,\mathrm{mkg}$.

Etwas anders verhält es sich mit dem spezifischen Gewicht. Dasselbe ist das Gewicht der Volumeneinheit eines Stoffes. Das Wasser hat die Einheit des spez. Gewichtes; es wiegt 1 kg pro dm^3 oder 1 t pro m^3 oder 1 g pro cm^3. Angenommen, ein erster Körper K habe das Gewicht G und das Volumen V, ein zweiter Körper K′ habe ebenfalls das Volumen V, aber das Gewicht 1 kg, dann ist die Menge Wasser, die ebenfalls 1 kg wiegt, 1 dm^3 gross. Bezeichnen wir mit s, s′ und s_0 die spez. Gewichte der drei Stoffe, so ist

$$s : s' = G : 1\,\mathrm{kg} \qquad s = \frac{G}{1\,\mathrm{kg}} \cdot s'$$

$$s' : s_0 = 1\,\mathrm{dm}^3 : V \qquad s' = \frac{1\,\mathrm{dm}^3}{V} \cdot s_0$$

$$\text{Also} \qquad s = \frac{G}{1\,\mathrm{kg}} \cdot \frac{1\,\mathrm{dm}^3}{V} \cdot s_0 = \frac{G : 1\,\mathrm{kg}}{V : 1\,\mathrm{dm}^3} \cdot s_0 = \left(\frac{G}{V} : \frac{1\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{dm}^3}\right) \cdot s_0.$$

Setzt man nun fest, dass $1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ und s_0 dasselbe bezeichnen sollen, nämlich das spezifische Gewicht des Wassers, so kann einerseits $1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ nichts anderes bedeuten als „1 kg pro dm^3" und dann ist anderseits für jeden beliebigen Körper $s = \frac{G}{V}$. Drückt man also das Gewicht eines Körpers in kg, das Volumen in dm^3 aus, so ergibt der Quotient aus den numerischen Faktoren dieser beiden Masszahlen eine reine Zahl, die sagt, wie vielmal der Körper schwerer ist als dasselbe Volumen Wasser. Setzt man hinter diese Zahl noch den formellen Quotienten aus kg durch dm^3, so erhält man das spezifische Gewicht als benannte Zahl, welche angibt, wieviele kg der dm^3 des Körpers wiegt. Es ist nun leicht einzusehen, dass beim spezifischen Gewicht eines und desselben Stoffes der numerische Faktor sich nicht ändert, wenn man es in $\frac{g}{cm^3}$ oder $\frac{t}{m^3}$ ausdrückt. Wenn wir uns nun gewöhnen, in den Lösungsansatz der Gewichtsberechnungen nicht das „spez. Gewicht", wie es in den Tabellen steht, sondern das „wirkliche" spezifische Gewicht einzusetzen, so kommt das Resultat automatisch als benannte Zahl, also als Grösse, heraus, wie folgende zwei Beispiele zeigen sollen.

Welches ist das Gewicht von 1 hl Milch, wenn deren „spez. Gew." 1,03 ist? $G = V \cdot s = 100\ dm^3 \cdot 1{,}03 \frac{kg}{dm^3} = \frac{100\ dm^3}{dm^3} \cdot 1{,}03\ kg = 103\ kg.$

Welches Volumen hat ein Körper vom spez. Gewicht 2,5, wenn sein Gewicht 1 q beträgt? $V = \frac{G}{s} = \frac{100\ kg}{2{,}5 \frac{kg}{dm^3}} = \frac{100\ kg \cdot dm^3}{2{,}5\ kg} = 40\ dm^3.$

Wie man aus diesen zwei Beispielen ersieht, spielt der Ausdruck $\frac{kg}{dm^3}$ im Lösungsansatz die Rolle eines Vormerks, dass mit dem einen seiner Bestandteile zu multiplizieren und mit dem andern zu dividieren sei, jedesmal selbstverständlich da, wo es möglich ist.

Ähnlich dem spezifischen Gewicht ist die Geschwindigkeit. Sie ist der Weg per Zeiteinheit. Die Einheit der Geschwindigkeit hat der Körper, welcher per Sekunde 1 m zurücklegt. Angenommen, ein erster Körper lege in der Zeit t den Weg s, ein zweiter Körper in derselben Zeit t den Weg 1 m und ein dritter Körper den Weg 1 m in 1 Sekunde zurück, so ist, wenn v, v' und v_0 die Geschwindigkeiten der drei Körper bezeichnen,

$$v : v' = s : 1\ m \qquad v = \frac{s}{1\ m} \cdot v'$$

$$v' : v_0 = 1\ sec : t \qquad v' = \frac{1\ sec}{t} \cdot v_0$$

Also
$$v = \frac{s}{1\ m} \cdot \frac{1\ sec}{t} \cdot v_0$$

$$v = \frac{s : 1\ m}{t : 1\ sec} \cdot v_0.$$

Setzt man $1 \frac{m}{sec} = v_0$, so ist allgemein $v = \frac{s}{t}$. Um die Geschwindigkeit zu finden, hat man also den formellen Quotienten aus Weg und Zeit zu bilden, die numerischen Faktoren von Dividend und Divisor wirklich zu dividieren und die Benennungen in Bruchform hinzuzufügen. $1 \frac{m}{sec}$ ist also „1 m pro Sekunde", $45 \frac{km}{Std}$ = 45 km pro Stunde. Wie man mit Geschwindigkeiten rechnet, soll folgende Aufgabe zeigen. Welches (v) ist die Umfangsgeschwindigkeit eines Schwungrades, das bei 2,6 m Durchmesser in der Minute 110 Umdrehungen macht? $v = \frac{2{,}6\ m \cdot 3{,}14 \cdot 110}{60\ sec} = \frac{2{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 110}{60} \frac{m}{sec} = 15 \frac{m}{sec}.$

Aber auch bei den übrigen physikalischen Grössen ist das Rechnen mit benannten Masszahlen, auch wenn deren Benennung eine noch so zusammengesetzte ist, nur von Vorteil, beugt doch deren Verwendung in einfachster Weise der sonst so häufigen Verwechslung verwandter Begriffe, wie: Weg (Masseinheit: m), Geschwindigkeit $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right)$ und Beschleunigung $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\right)$ oder Druck (kg) und Druckintensität oder Druckspannung $\left(1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2} = 1\ \mathrm{Atm.}\right)$ oder Arbeit (mkg) und Effekt $\left(\frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{sec}}\right)$ vor und bietet ausserdem dem Schüler ein nahezu unfehlbares Mittel, schwere Fehler im Ansatz zur Auflösung selbst zu erkennen.

Nun gibt Rüefli im bereits angetönten Aufsatz zu, dass „die Multiplikation der Grösseneinheiten und ihrer Benennungen für das ausgebildete Denken der Gelehrten in gewissen Fällen ein bequemer und unschädlicher Mechanismus sein möge." Wenn man aber das Verfahren auch auf das gewöhnliche Rechnen anwenden wolle, so müsse man zu absurden Benennungen kommen. Er zeigt das an zwei Beispielen. Beim ersten hätte man bei einem Preise von 6 Fr. per 1 Zentner für 4 Zentner Kartoffeln „4 Zentner mal 6 Fr." zu bezahlen und dies gebe „24 Zentnerfranken". Mit diesem Beispiel zeigt aber Rüefli bloss, dass er das Wesen der „gebrochenen" Benennungen nicht verstanden hat; sonst hätte er gesetzt:

$$\text{Preis} = 4\ \text{Zentner} \cdot 6\,\frac{\text{Fr.}}{\text{Zentner}} = 24\ \text{Fr.};$$ denn 6 Fr. ist der Preis pro Zentner, also eine Grösse von der Art des spezifischen Gewichtes oder der Geschwindigkeit. Noch schöner ist das zweite Beispiel: Wenn man für 5 m Tuch 40 Fr. bezahlen müsse, so koste 1 m „40 Fr. geteilt durch 5 m" oder „8 Frankenmeterstel". Die korrekte Lösung und Deutung des Resultates nach den eben aufgestellten Regeln für das Rechnen mit benannten Zahlen ist natürlich die:

$$\text{Einheitspreis} = \frac{40\ \text{Fr.}}{5\ \text{m}} = 8\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}} = 8\ \text{Franken pro Meter.}$$

Wie man aus den obigen zwei Beispielen ersehen kann, lässt sich die „Einheitsrechnung" ganz gut auch auf das gewöhnliche Rechnen anwenden, ohne dass sie im geringsten zu Absurditäten führt. Ich bin nun allerdings auch der Meinung, dass für das Rechnen auch der „höhern" Volksschule die Einheitsrechnung nicht in Frage kommen kann, ausgenommen für das geometrische und das physikalische Rechnen, hingegen für die Mittelschule wäre sie ganz am Platze. Es ist denn doch zu arg, wenn in einer vom Lehrer durchgesehenen und nicht beanstandeten Lösung der Aufgabe: In einem Gefäss steht Wasser 1,6 m über der Mitte einer Ausflussöffnung von 1 cm²; welchen Druck erleidet der Pfropfen, der die Öffnung verschliesst, der Schüler die Lösung gibt: Druck $= 16\ \mathrm{dm} \cdot 0{,}01\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}160\ \mathrm{kg}$.

In seiner Geschichte der Prinzipien der Mechanik bemerkt Dühring, dass das System der algebraischen Symbole an einem Grundfehler leidet, insofern es nicht die numerischen Einheiten zur Schau trägt, welche die wesentlichen Koeffizienten eines jeden Buchstabensymbols ausmachen. In seinem Buche „The Concepts and Theories of modern Physics“ meint Stallo, „Dühring hätte diese Bemerkung dahin ausdehnen können, dass der Gebrauch von Buchstaben als algebraische Symbole, d. h. als Stellvertreter von Zahlen, an sich schon eine ernstliche (wenn auch vielleicht unvermeidliche) Schwäche der mathematischen Bezeichnungsweise ist. In der einfachen Formel, die z. B. die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers in ihrer Abhängigkeit von Raum und Zeit ausdrückt ($v = \frac{s}{t}$), haben die Buchstaben eine Tendenz, dem Mathematiker zu suggerieren, dass er vor sich direkte Stellvertreter der Dinge oder Elemente hat, mit denen er sich beschäftigt und nicht bloss deren in Zahlen ausgedrückte Verhältnisse.“ Nach dem Vorausgegangenen wird dem Leser klar, dass mir gegenüber Stallo's Warnung berechtigt ist, denn für mich ist s eine Strecke, z. B. 45 m, und t eine Zeit, z. B. 3 Sek., für mich ist also s nicht: $\frac{\text{Strecke}}{\text{Längeneinheit}}$ und t nicht: $\frac{\text{Zeit}}{\text{Zeiteinheit}}$, für mich sind also s und t benannte und nicht unbenannte Zahlen und darum kommt bei mir v nicht als unbenannte Zahl heraus, bei der ich nachträglich mit Mühe und Not festzustellen habe, welche Einheit ihr unterschoben werden kann, sondern bei mir kommt v als benannte Zahl heraus, nämlich als eine Anzahl Längeneinheiten pro Zeiteinheit. Im angezogenen Spezialfall wird $v = \frac{45\text{ m}}{3\text{ sec}} = 15\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, und der Sinn dieser Gleichung ist, der Körper lege in der Sekunde 15 m zurück, womit seine Geschwindigkeit eindeutig festgestellt ist. Wenn man also so verfährt, wie Stallo es nicht haben will, so wird Dührings Bemerkung hinfällig.

Pestalozzi als Sozialphilosoph.

Von Stadtschulrat Dr. Artur Buchenau, Berlin-Charlottenburg.

In der bekannten Schrift: „Herbart, Pestalozzi und die heutigen Aufgaben der Erziehungslehre“ (Marburg 1899) wurde von Paul Natorp zuerst mit Nachdruck auf Pestalozzis „Nachforschungen über den Gang der Natur in der Entwicklung des Menschengeschlechts“[1]) hingewiesen. Natorp machte darauf aufmerksam, dass das Buch rein philosophisch ist, obwohl der Verfasser versichert, in keinem Stück von einem bestimmten philosophischen Grundsatze auszugehen. Der Ausdruck „Menschengeschlecht“ zeigt schon, dass hier eine kühne Konstruktion vorliegt und in der Tat, bei allem Schöpfen aus eigener,

---

[1]) Band VII der Werke; auch erschienen als Separatausgabe der Kommission für das Pestalozzi-Stübchen in Zürich bei Schulthess, 1886.