

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 28 (1918)
Heft: 1-2

Artikel: Zur Erkenntnis-Theorie über Raum und Zahl
Autor: Merz, K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-789202>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ZUR ERKENNTNIS-THEORIE ÜBER RAUM UND ZAHL. VORTRAG*) VON DR. K. MERZ, PROF. IN CHUR.

Fragen der Erkenntnistheorie oder allgemeiner der Philosophie veranlassen den Fachgelehrten, eine Übersicht über seine eigene Wissenschaft zu gewinnen und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilen derselben, sowie die Beziehungen der einzelnen Wissenschaften zueinander zu bestimmen. Dann wird man sich weiter darüber Rechenschaft zu geben suchen, wie Wissenschaft oder Erkenntnis überhaupt entsteht, um zu den Grundfunktionen des Denkens zu gelangen und zu allgemeinen Normen, welchen die Geistestätigkeit folgt. Man wird vielleicht sogar nach dem Ursprung aller wissenschaftlichen Methode fragen, um einen Aufschluss über den letzten Grund aller der Vorgänge zu erreichen, welche zu beherrschen die Erkenntnis bestrebt ist. Dabei wird aber eine gewisse Einseitigkeit nicht zu vermeiden sein, indem die Wissenschaft, von welcher der Fachgelehrte ausgeht, unwillkürlich in ihrer Bedeutung als überwiegend auftritt. Um dies einigermaßen auszugleichen, muss ein Zusammenhang mit der Philosophie als Fachwissenschaft gesucht werden. Damit ist in den Hauptfragen eine Richtung zu gewinnen, die aus der Enge der Einzelwissenschaft hinausführt. Die Ablehnung einer den Fachgelehrten fremd anmutenden Denkweise von vorneherein, drängt ihn wieder innert den Kreis zurück, über welchen er hinauszuschweifen eigentlich gewillt war.¹⁾

Als Ausgangsgebiet für die Philosophie ist die Mathematik besonders günstig, schon weil die bedeutendsten Philosophen von den Grundfragen der mathematischen Wissenschaften ausgegangen sind, um die Hauptzüge der Erkenntnistheorie festzulegen. Diese historische Tatsache hat ihren Grund jedenfalls darin, dass in der Mathematik aus gewissen der Erfahrung entnommenen Elementen ein Denkinstrument reiner logischer Struktur geschaffen ist, dessen Anwendung auf die Natur zu den grössten Erfolgen geführt hat. Der

*) Ausführung eines Referates, gehalten in Baden den 6. Oktober 1917 im Verein schweizerischer Mathematiklehrer.

**) In diesem Vortrage ist von allen Zitaten Umgang genommen. Die zugehörige Literatur findet sich angegeben in dem Aufsatz: K. Merz, Zur Erkenntnistheorie über Raum und Zahl aus Historischem der Steinerschen Fläche. (Separatabzug aus dem Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens.) Chur 1917.

Als erste und einfachste Anschauung sei das betrachtet, was man in einer genauen Zeichnung eine Gerade nennt. Das Lineal, das dazu verwendet wird, sei vom Auge geprüft, womit also auf den Weg des Lichtes abgestellt ist. Mit einer Kante des Lineals lässt sich die Zeichnungsfläche auf genügende Genauigkeit in ihrer Annäherung an eine Ebene prüfen. Der Punkt sei durch die Schnittstelle zweier Geraden veranschaulicht. Auch Kreise werden gezeichnet. Damit können nach den Lehren der Elementargeometrie und der projektiven Geometrie Zeichnungen hergestellt werden, die als mehr oder weniger gelungene Verwirklichungen des Inhaltes oder Objektes dieser Wissensgebiete gelten. Es entsteht nun die Frage: Was ist eigentlich die durch die Anschauung gegebene Gerade? Da ergibt sich die zweifache Schwierigkeit, dass sich die Gerade einmal nicht durch Worte definieren lässt und zum andern, dass die Anschauung selbst keine weitere Analyse durch die Sinne ermöglicht. Die Anschauung einer Geraden wird nur zerstört, wenn wir etwa zu weitgehende Vergrößerungen anwenden wollten. Bei der Betrachtung und Anerkennung einer gezeichneten Geraden ist also eine gewisse subjektive Täuschung vorhanden. Was als einfache, grundlegende Anschauung als eine Gerade angenommen wird, beruht auf komplizierten physiologischen und psychischen Vorgängen, von denen nur das Ergebnis, also ihre Synthese durch unser Bewusstsein als Gerade für die Geometrie in Betracht fällt. An der wirklich wahrgenommenen Anschauung einer Geraden haften aber noch störende Nebensächlichkeiten, die nie vollständig fortgeschafft werden können, so dass die reine Anschauung der Geraden das Ziel eines Grenzvorganges ist, von wirklichen Anschauungen, deren Ungenauigkeiten aber als immer mehr überwunden gedacht werden.

Das Ende dieses Grenzvorganges, der eigentlich nichts Wahrnehmbares mehr enthalten sollte, ist dann die leere oder blosse Form unserer subjektiven Auffassung. Diese Form, also der Gedanke der Geraden, ist somit etwas unserem Geiste subjektiv Eigentümliches, das wir entgegen den verwickelten Vorgängen in unseren Sinnesapparaten als etwas Einfaches für unsere Gedanken geschaffen haben. Der als ununterbrochen gesehene und gedachte Verlauf wird als Stetigkeit und die beliebige Fortsetzbarkeit der Geraden als unendliche Länge bezeichnet. Damit soll also erläutert sein, wie man zuerst zu der Anschauung überhaupt im ungenauen Sinne kommt und wie in der Reihe der immer genaueren Darstellungen der Geraden als ein in Wirklichkeit nicht erreichbarer Grenzfall die reine Anschauung der Geraden gesetzt wird. Der ganze Vorgang, durch den man zur Anschauung einer wirklichen Geraden kommt, kann in allen Einzelheiten beschrieben werden und nach diesen Vorschriften ist jeder imstande, durch die Erfahrung in der Richtung zur reinen Anschauung sich führen zu lassen. Wenn man im gewöhnlichen Sinne von der Geraden spricht, so versteht man darunter ein innerhalb der Reihe wirklich möglicher Fälle ausgeführtes Beispiel und sogar im Gedanken, an eine Gerade werden Erinnerungsreste an Bilder und Bewegungsvorgänge sich nicht vermeiden lassen.

Die Gerade als reine Anschauung ist also in keiner Wirklichkeit, auch nicht einmal in der gedanklichen, fassbar, sie besteht nur als Grenzfall; aber die Gerade ist immerhin doch etwas. An dieser Eigentümlichkeit der Geraden sei versucht, die Bedeutung von Wirklichkeit und Sein zu erläutern. Dem ganzen Vorgang des Zeichnens einer Geraden wird man nicht die Wirklichkeit absprechen wollen. Alle dabei beteiligten Dinge als Material und Instrumente und wir selbst bilden eine Gesamtheit physischer und psychischer Zustände, die Veränderungen unterworfen sind, die teils von uns abhängen, teils von uns unabhängig bedingt sind. Man nennt das einfach eine Tatsache, dass wir so handeln, solches dabei sehen und erzielen. Diese Vorgänge können in ihren Einzelheiten den Anlass zu unbegrenzt vielen Beobachtungen geben, vor welchen die Gerade nur als Schein besteht. Damit ist die Gerade aber zugleich dem ganzen Einfluss der Wirklichkeit entrückt, sie ist nicht wirklich, sie ist vielmehr nur an sich. Der ganzen Reihe der mit immer besserer Genauigkeit gezeichneten Geraden wird also Wirklichkeit zuerkannt, der Geraden im strengen Sinne als reine Anschauung aber absolutes Sein, das der Veränderlichkeit der Wirklichkeit gegenüber als etwas Un-

veränderliches steht. In unserem Sprachgebrauch umfasst das Sein als der weitere Begriff die ganze Anschauungsreihe samt der reinen Anschauung als Grenze, während die Wirklichkeit nur die Anschauungsreihe ohne die Grenze enthält, so dass diese selbst dem Sein im engeren Sinne angehört. In dieser Gegenüberstellung wird es begreiflich, wie man die ganze Wirklichkeit als etwas Unvollkommenes, nur als Schein betrachten kann, als eine Erscheinung, über der ein absolutes Sein herrscht, welches das Ziel aller Erkenntnis bildet.

Diese Deutung für „die Gerade“ folgt auch aus dem Sprachgebrauch. Wir können unmöglich „die Gerade“ zeichnen, diese ist als etwas Einziges einer besondern Darstellung entrückt, und wenn von einer Geraden und mehreren Geraden die Rede ist, so wird schon über die Anschauung der Geraden an sich hinausgegangen zur Betrachtung gegenseitiger Lage im Raum. Ein Sammelname dagegen wie „das Lineal“ hat nur den Sinn, dass man unter wirklichen solchen Instrumenten irgendeines mit allen seinen zufälligen Nebenerscheinungen benutzen könne. Diesem Worte wird man kaum nach unserer Auffassung eine Idee zuordnen wollen. Auch einem abstrakten Ausdruck „die Genauigkeit“ wird man keine absolute Deutung geben, dieser Begriff kann nur verwendet werden an wirklich vorkommenden Vorgängen. Wir unterscheiden also ausdrücklich die reine Anschauung von dem Begriff. Dieser Unterschied wird in der Folge sich als gerechtfertigt erweisen, indem auf Grund der reinen Anschauung synthetische Urteile a priori ermöglicht sind, was von Begriffen im allgemeinen nicht gilt. Aber eine Analogie könnte dazu führen, in das Gebiet des absoluten Seins alle Begriffe aufzunehmen.

Das Wesen der reinen Anschauung kann aus ihrer Entstehungsweise weiter umschrieben werden. Diese Anschauung ist einerseits unserer Willkür entsprungen, indem wir wirkliche Vorgänge so anordnen, dass wir dieses Ziel erkennen. Der subjektive Anteil tritt somit als Forderung auf: „Ich will, dass die Gerade ist.“ Warum ist aber diese Willensrichtung entstanden? In der historischen Entwicklung können mancherlei triftige und zwingende Gründe dazu geführt haben, irgendwelche Dinge in geraden Linien anzuordnen. Für uns ist daraus der nächste Grund übrig geblieben, weil wir Geometrie treiben wollen, in welchem Hinblick die Forderung lautet: „Die Gerade soll sein.“ Mit dieser willkürlichen und beabsichtigten Festlegung der Anschauung haben wir unserem Denken eine bestimmte Vorschrift gemacht, die für unsere weitere Betrachtung als etwas Selbständiges uns gegenübertritt und damit zu einem Gegenstand

unserer Erkenntnis wird. In der reinen Anschauung einer Geraden vereinigen sich somit Vorschriften über wirkliche Vorgänge, die also der Erfahrung angehören müssen, mit der Tätigkeit unseres Denkens. In bezug auf die Wirklichkeit ist es eine nur subjektiv bestehende Form unserer Vorstellungstätigkeit, die aber für die weitere Gedanken-tätigkeit als Objekt genommen wird.

Für die Weiterführung unserer Betrachtung erinnern wir uns am besten an die Entstehung der projektiven Geometrie aus Strahlbüscheln und Punktreihen. Der allgemeine Grundsatz, der dabei zur Anwendung kommt, ist der gegenseitiger Zuordnung oder Verknüpfung, welche der Erfahrung des Sehens nachgebildet ist. Die Grundlage wird von einer Anzahl einfachster Fälle gebildet, die voneinander unabhängig sind. Die Ebene erscheint als eine bestimmte Gesamtheit von Geraden, der Raum als die Gesamtheit aller Geraden in der Anschauung überhaupt. Zur Geraden tritt als Denktätigkeit die Konstruktion, in welcher der Willkür ein grosser Spielraum eröffnet wird, der einzig durch die Entstehung von Widersprüchen abgegrenzt wird. Die reine Anschauung der Geraden wird also dem allgemeinen logischen Denkmechanismus überlassen, durch welchen Absicht und Phantasie des Geometers zusammengesetzte Gebilde der Anschauung schaffen. Alle Ergebnisse entstehen als synthetisch gebildete Begriffe, mit allen durch den Gang der Konstruktion zuge- teilten Bedingungen. Weil also diese Begriffe unsrem Willen entsprungen sind und ausser der auch von uns gesetzten reinen Anschauung keine weiteren Bestandteile enthalten, so können daraus dann nachträglich noch ohne Einfluss der Erfahrung andere notwendige Beziehungen geschlossen werden, als die durch die Konstruktion besonders hervorgehobenen. Die reine Anschauung wird daher wie die logische Verknüpfung als eine Form unseres Denkens bezeichnet, die vor aller Erfahrung als ihre Bedingung a priori besteht. Nur wenn wir in diesen Formen unsere Vorstellungen anordnen, ist Erkenntnis möglich. Ihre Bestätigung in der Wirklichkeit ist dann nachträglich durch Erfahrung angenähert möglich in der wirklichen Ausführung der Konstruktion.

Nun wird man sich aber doch noch besonders fragen, ob denn der ganze, einzige, dreidimensionale Raum, in welchem alle Wirklichkeit vor sich geht, nur als eine subjektive Anschauung angenommen werden muss, der irgendwelche andere transzendente Ordnung entspricht. Für die Gerade wurde dies verständlich gemacht durch einen Grenzvorgang; es wurde ihr absolutes Sein zuerkannt, weil sie an sich

der weiteren Willkür unserer Forschung entrückt ist und unserem weiteren Denken Forderungen stellt. Sollte nicht konsequenterweise der Raum überhaupt als subjektive Anschauung genommen werden? Aber es ist auch bekannt, dass wenn man mit dem Subjektivismus konsequent weiter fährt, man zum grössten Unsinn als Solipsismus kommt.

Die Frage für den Raum überhaupt muss also für sich selbst entschieden werden, ohne Verwendung des Ergebnisses für die Gerade. Man muss sich also fragen: Kann der Raum auch als Ziel eines Grenzprozesses betrachtet werden, können Vorgänge oder Experimente der Wirklichkeit angegeben werden, aus denen in immer vollkommeneren Ausführungen die Anschauung des Raumes folgt? Das ist aber, ohne dabei die Gerade selbst wieder zu verwenden, nicht möglich. Wenn wir als Modell eines mathematisch gedachten Gebildes Faden spannen oder Stäbe legen, so können wir daraus reine Anschauungen von Kurven oder Flächen uns bestimmt denken, aber nur unter Benutzung der schon gesetzten Geraden, was aber neu ist, über die Gerade an sich hinaus geht, nämlich die gegenseitige Lage der Stäbe zu einander im Raume, können wir direkt in unserem Vorstellungsvermögen nicht genau auffassen, sondern nur als eine unbestimmte Lagebeziehung in unserer Wahrnehmung erkennen und zwar ausser durch das Auge noch zur Verdeutlichung durch Bewegung der Hand. Das Sehen, bei welchem der Gegenstand als ruhend, als Sein beurteilt wird, wird durch die tastende Erfassung des Raumes ergänzt. Es besteht also das Bestreben, etwas Subjektives in den Raum hineinzutragen. Der Schein des flächenhaften Bildes der Wirklichkeit wird durch die wenigstens gedachte eigene Bewegung erweitert. Das zeigt auch die Unterscheidung von rechts und links, die nur subjektiv bestimmbar ist. Es ist eigentümlich, dass diese Lagebezeichnung von rechts und links in der Philosophie auftritt als Beweis für die Subjektivität des Raumes, während sie von Mathematikern als Grund dagegen verwendet wird. Wenn wir aber ein absolutes Raumgebilde als Ziel eines Grenzprozesses wirklicher Vorgänge definieren, so kann der Raum, in welchem alle Wirklichkeit abläuft und dessen Teile allen physischen Vorgängen wenigstens, als wesentlich zugehörig, uns unmöglich als nur subjektiv erscheinen. Der Raum wird damit als Mittel erkannt, in welchem die wirklichen Vorgänge objektiv stattfinden und nicht bloss als ein Schema, in welchem wir die Vorstellungen anordnen, weil wir nicht dahinter kommen können, wie eigentlich das Schauspiel der Welt angeordnet ist.

Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass der Geometer für sich die reine Anschauung eines Raumes sich konstruiert, da es ihm nicht gelingt, gleichsam in einer Empfindung den Raum genau zu erfassen. Er entnimmt der Erfahrung die einfachsten Lagebeziehungen der Geraden im Raum und baut sich daraufhin in sicherer, festgefügtter Weise den dreidimensionalen Raum der projektiven Geometrie, den Raum des absoluten, ruhenden Seins als Inbegriff aller in ihm ruhender, geometrischen Gebilde, die durch die gegenseitige Zuordnung unseren Gedanken unterworfen sind, so dass ihre Darstellung möglich ist. Damit unterscheiden wir den Raum der Wirklichkeit von dem idealen Raum des Geometers. Es entsteht daraus sofort die Frage, ob die Struktur des idealen Raumes mit der des wirklichen Raumes übereinstimmt. Das ist aber bereits eine Frage der Physik, denn nur genaue Messungen können hier zu einem Ergebnis führen. Somit entsteht aber die Notwendigkeit, sich anschaulich geometrisch mit dem physikalischen Messen von Strecken auseinanderzusetzen, und es muss ein Vorgang in Betracht gezogen werden, den die Geometrie des absoluten Seins zu umgehen sucht, nämlich die Bewegung. Die Erfahrung wird dadurch noch weitgehender zur Grundlage der Geometrie verwendet, indem eine Hypothese eingeführt werden muss, dass nämlich ein als Mass zu verwendender Stab sich bei Bewegungen nicht ändert oder dem Vorgang der Konstruktionen angepasst, ist es die Hypothese von der unveränderten Übertragbarkeit der Zirkelöffnung. In geometrischen Ausdrücken umschrieben sei es die Kongruenz von Strecken gleicher Länge in beliebiger Lage im Raum. Man könnte diese Hypothese auch die von der Homogenität des Raumes nennen. In dem sogenannten leeren Raum, in welchem keine Kraftwirkungen bestehen, liegt kein Grund vor, an der bewegten Strecke Änderungen anzunehmen. Es soll nun der Versuch dargelegt werden, die elementare Geometrie aufzubauen, ausgehend von dieser Bewegungshypothese, was gleichbedeutend ist mit der Festlegung einer bestimmten Massgeometrie, nämlich der euklidischen Geometrie. Diese Hypothese ist jedenfalls so anschaulich oder evident als das Parallelenaxiom und ausserdem hat diese Grundlage den Vorteil, sich begrifflich genau an den praktischen Gang der Konstruktionen anzuschliessen, was pädagogisch sehr vorteilhaft ist.

Diese Grundlage der elementaren Geometrie sei durch folgende Sätze angedeutet: 1. Strecken, die zur Deckung gebracht werden können, sind gleich lang. 2. Durch Drehung einer Strecke

in einer Ebene um den einen ihrer Endpunkte beschreibt der andere Endpunkt einen Kreis. 3. Kreise mit gleichen Radien sind kongruent. 4. Zu einem Dreieck kann ein kongruentes gezeichnet werden mit Hülfe des Abtragens der Seitenlängen unter Verwendung von Kreisbogen. 5. Zeichnet man an einer Geraden kongruente Dreiecke in der Lage, dass sie durch Verschiebung längs der Geraden zur Deckung gebracht werden können, so nennt man je zwei der entsprechenden Seiten, die ausser jener Geraden liegen, parallel. 6. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke ist die Gleichheit von gleichliegenden Winkeln an parallelen Geraden festgesetzt.

Diese sechs Sätze bilden die Grundlage, auf der die Planimetrie in gewohnter Weise aufgebaut werden kann. Diese Grundlage hat den formellen Nachteil, dass mit Beginn schon Kreis, Dreieck und ein Kongruenzsatz vorkommen, bevor die Winkel im allgemeinen auftreten. Der rein logisch vollführte Aufbau nach Euklid hat aber den weit grösseren Nachteil, dass die Bewegungshypothese nur verhüllt in den Kongruenzsätzen auftritt und das Parallelenaxiom in seiner eigentlichen Bedeutung als zur Ausscheidung der einfachsten Massgeometrie dienend, von anderen möglichen Geometrien, nicht direkt erkennbar ist. Damit hat sich ein praktisch didaktisches Ergebnis gezeitigt aus dem Versuch, erkenntnistheoretisch die Bedeutung von Sein und Bewegung für die Geometrie zu ergründen. Man könnte also etwa sagen, dass aus der allgemeinen Geometrie des Seins erst die Bewegung anschaulich die verschiedenen besonderen Massgeometrien hervortreten lässt.

Aus Anschauungspostulaten über die Gerade und aus der Bewegungshypothese über die Strecke wurde die euklidische Geometrie abgeleitet. Durch Abtragung der Einheitsstrecke können Masszahlen eingeführt werden, wodurch die kartesische Koordinatengeometrie sich direkt an die konstruktive Geometrie anschliesst. Hier soll nun aber unter Vermeidung der analytischen Methode der Weg zu den nichteuklidischen Geometrien aus der Anschauung angedeutet werden. Dazu muss die angenommene einfache Bewegungshypothese fallen gelassen und die Änderung der Strecke bei einer Bewegung als zulässig betrachtet werden. Nach der Relativitätstheorie ist diese Annahme sogar physikalisch möglich. Man wird also, um eine bestimmte geometrische Fassung des Problems zu erreichen, Begriffe aus der projektiven Geometrie verwenden, wo unserer Anschauung nach offenbar ungleiche Strecken als in einem allgemeineren Sinne gleich zu beurteilen wären, aber allerdings so, dass bei besonderen

Grenzfällen die gewöhnliche Gleichheit aus der allgemeineren sich wieder ergeben würde, womit also die einfachste Hypothese als besonderer Fall eingeschlossen wäre. Dazu nimmt man in einer Ebene zwei beliebige Strecken an und innerhalb ihrer Endpunkte auf jeder zwei Punkte in gleichem Doppelverhältnis zu jenen Endpunkten und setzt diese erhaltenen beiden inneren Strecken als einander gleich. Den Anlass zu dieser Annahme kann die scheinbare Verkürzung in der Perspektive geben. Lässt man dann jene Endpunkte ins Unendliche rücken, so folgt daraus Gleichheit der Teilstrecken im besonderen euklidischen Sinne. Die Endpunkte der zuerst angenommenen Strecken sind die Masspunkte, durch welche der absolute Kegelschnitt geht, welcher in den nichteuklidischen Geometrien das Unendliche der Ebene bildet. Bewegungen sind dann Kollineationen, welche diesen Kegelschnitt in sich überführen. Wird der absolute Kegelschnitt als sehr gross angenommen, so nähern sich die Massverhältnisse den euklidischen. Beim Übergang von einer nichteuklidischen Geometrie zur euklidischen entsteht aber nicht direkt Kongruenz, sondern vorerst Ähnlichkeit.

Die frühere allgemeine Frage über die Struktur des Raumes lässt sich jetzt also etwas bestimmter dahin fassen. ob der wirkliche Raum durch die euklidische Geometrie oder durch eine dieser nichteuklidischen Geometrien wieder gegeben wird. Noch andere denkbare Idealgeometrien dürften wegen ihrer Kompliziertheit und wegen Singularitäten kaum in Betracht fallen. Trotzdem kann aber eine allgemeinere absolute Fläche als zweiter Ordnung nicht zum vorneherein abgewiesen werden, also etwa eine convexe transzendente Fläche. Die Bewegungshypothese müsste schliesslich noch zugeben, dass die Gerade bei der Bewegung nicht erhalten bleibt, sondern in beliebige Kurven übergeht. Der Raum der Wirklichkeit könnte einen für unser Denken unerschöpflichen Reichtum der Beziehungen in sich bergen. Damit tritt aber die euklidische Geometrie nur um so eindringlicher in ihrer Bedeutung als Anschauungsform unseres Denkens hervor. Jede andere Geometrie können wir nur in dieser uns veranschaulicht denken. Ausserdem liegen keine Gründe aus der Erfahrung vor, die euklidische Geometrie in der Betrachtung der Wirklichkeit korrigieren zu müssen.

Mit der Einführung des Messens in die Geometrie ist zugleich ein bestimmtes Verfahren gegeben, zu einem unendlich fernen Punkte zu gelangen, dessen Lage der Anschauung vorerst nur als etwas unbestimmt räumlich nicht Erreichbares erscheint, nämlich durch das

Abtragen von Strecken, indem man z. B. eine Strecke als Mass fortgesetzt unbegrenzt oft auf einer Geraden aneinander setzt. Damit ist aber auch der Begriff der unendlich grossen Zahl schon verwendet, die nur in der euklidischen Geometrie zugleich der anschaulichen Auffassung der unendlichen Ferne zugeordnet ist. Damit ist der umfassende Begriff der Zahl, der bisher absichtlich vermieden wurde, in seiner Bedeutung für die Geometrie berührt.

Um den Begriff der Zahl darzulegen, kann man von dem allgemeinen Verfahren ausgehen, das die Naturwissenschaften anwenden, um Dingbegriffe zu setzen. Die Wirklichkeit bietet der Forschung in jeder Erscheinung eine unübersehbare Menge von Einzelheiten dar, die alle bis an ein Ende zu führen tatsächlich einfach unmöglich ist. Daher werden von den möglichen Vorstellungen unwillkürlich oder nach Absichten Teile vernachlässigt, indem durch Wortbezeichnungen einzelne Beobachtungen hervorgehoben werden. Jeder Begriff führt also eine gewisse Anschliessung von Eigenschaften aus, die für den betreffenden Fall ausser Betracht kommen. Wird nun dieser Vorgang der Begriffsbildung immer weiter geführt, so werden alle wahrnehmbaren Eigenschaften ausgeschlossen und es bleibt schliesslich ein Ding, das überhaupt keine Eigenschaften mehr haben soll. Dadurch werden alle Dinge unterscheidbar von einander und es bleibt nur noch der allgemeine Beziehungsbegriff der Anzahl übrig. Aus dem ursprünglichen Zählen an den Fingern bildeten sich die Zahlwörter und damit eine einzig festgelegte Reihe, welche die Rolle einer reinen Anschauung übernimmt. Jede Zahl tritt vorerst als Ordnungszahl auf und ist für sich einzig in ihrer Art infolge der Anordnung in der Reihe, wodurch auch die ganze Zahlenreihe an sich als einzig gesetzt wird, unabhängig gedacht von Raum und Zeit. Diese Zahlen können erst nach Identität und noch nicht nach Gleichheit beurteilt werden. Die natürliche Zahlenreihe erscheint als die absolute Ordnung, die noch besteht, wenn von allen Dingeigenschaften abgesehen wird und sie ist damit aller Willkür enthoben. Der Begriff der Ordnung oder Anordnung ist allerdings auch allgemein, wenn wir z. B. an die Anordnung unserer Bekleidungsstücke denken, so tun wir das ohne Hülfe einer Zahl, aber da sind es vielfach beachtete Eigenschaften der Dinge, die uns die Übersicht geben. Aber aus einem solchen allgemeinen Ordnungsbegriff die Zahlenreihe abzuleiten enthält einen direkten Widerspruch, da für die Zahlenreihe die unterscheidenden Merkmale der Dinge eben wegfallen sollen.

Die Reihe der Ordnungszahlen dient also dazu, um irgendeiner Menge, gleichgültig welcher Dinge, zugeordnet zu werden und es fallen nur Zuordnungsmöglichkeiten in Betracht und deren Vergleichen. Solche Untersuchungen finden sich in der Mengenlehre. Um zu einer Grössenlehre zu gelangen, muss den Dingen irgendeine Eigenschaft gelassen werden, nach welcher sie untereinander verglichen werden können. Eine Einheit kann nur wirklich als physikalisch verwendbar bestehen und der Begriff die Einheit ist nur ein Sammelbegriff, der die Bedeutung hat, dass in dem betreffenden Fall eine der wirklich bestehenden Einheiten genommen werden kann, gleichgültig welche. Die Einheit an sich ist überhaupt nicht. Am einfachsten denkt man sich Strecken als Einheiten und stellt die Zahlreihe und Zahlwerte durch einen Massstab anschaulich dar. Es entsteht nun die Frage, ob die Rechnungsregeln, vorerst der durch Ziffern bestimmten Zahlen, unmittelbar aus der Mengenlehre entstanden gedacht werden können, also hier im besondern aus der Reihe der Ordnungszahlen oder ob es nötig ist, vorerst jede Zahl als aus gleichen Einheiten zusammengesetzt anzunehmen, wie man sich die Zahlwerte gewöhnlich denkt.

In Wirklichkeit lernt man natürlich das Rechnen immer mit Hülfe anschaulicher Grössenwerte und es handelt sich hier nur um eine nachträgliche Anordnung der Vorgänge nach logischen Gesichtspunkten. Da kann man das Rechnen mit ganzen Zahlen vorerst als Zuordnungsverfahren in der Reihe der Ordnungszahlen betrachten, als eine Art hin und her Bewegung in dieser Reihe, wie z. B. das Einmaleins gewusst wird und es lassen sich auch Bruchergebnisse deuten, indem dem einzelnen Ding mehrere aufeinanderfolgende Zahlen zugeordnet, also Ordnungszahlen höherer Ordnung eingeführt werden. Damit sei die Begründung angedeutet, wie die Rechnungsoperationen aus der reinen logischen Verknüpfung entspringen und die allgemeinsten Beziehungsgesetze darstellen, die in willkürlich vorgenommener Synthese einzig mit der Einschränkung durch Widerspruch entstehen, also nur sich selbst nicht wieder aufheben sollen. Die allgemeine Arithmetik bringt erkenntnistheoretisch nichts wesentlich neues dazu, indem die Bezeichnung der Grössen durch Buchstaben zwar die Zahlwerte unbestimmt erscheinen lässt und die Art der Verknüpfung der Zahlen übersichtlich und allgemein angibt, welchen allgemeinen Formeln aber immer der Sinn der wirklichen Ausführung in Zahlwerten unterliegt. Eine Formel hat nicht den Zweck, ausser das Gebiet zahlenmässig ausführbar gedachter Rech-

nungen zu gelangen und sollte ein Symbol in dieser Absicht gesetzt werden, so müsste es sich auf irgendwelches anschauliche Material beziehen, etwa auf Raumteile. Jede durch Ziffern bestimmt angegebene Zahl ist etwas für sich Einziges, indem sie eine bestimmte Stelle in der absoluten Ordnungsreihe angibt und erst durch die Verwendung der Buchstaben entsteht der Zahlbegriff, indem dadurch irgendeine Zahl durch ein Zeichen gemeint sein kann. Die Formeln sind daher als Sammelbegriffe zu betrachten für Beziehungsbegriffe der Zahlen.

Von grundlegender Bedeutung ist die Unabhängigkeit der Analysis von Dingen, an denen noch irgendwelche Eigenschaft übrig bleiben soll und somit ihr Ursprung aus den reinen Zuordnungsmöglichkeiten. Denn sollte noch irgendeine Eigenschaft der Dinge nötig sein, so könnten die zuerst in Betracht fallenden Massverhältnisse nur die geometrischen sein, wodurch eine Unterordnung unter die Geometrie entstehen würde, was nicht möglich ist. Beide Gebiete der Mathematik, Geometrie und Analysis, sind also in ihrem ersten allgemeinen Aufbau noch unabhängig von Grössenwerten, wie sie durch Annahme einer Einheit entstehen und beruhen einerseits nur auf einer reinen Anschauung, nämlich der Geraden, bzw. der Zahlreihe als Dinge und anderseits auf den allgemeinen Gesetzen der Verknüpfung oder Beziehungsetzung, die in ihren Ergebnissen so weit Geltung haben, als sie ohne Widerspruch in sich ausgeführt werden. Der Widerspruch ist nicht a priori erkennbar, sondern erst aus der Erfahrung des wirklich abgelaufenen Denkvorganges. Der Gang der Erkenntnis wird durch den Irrtum eingeschränkt. Um also dem gemeinsamen Ursprung von Geometrie und Arithmetik nachzuforschen, müsste nach den formalen logischen Gesetzen aller Zuordnung gesucht werden. Wenn man aber der Logik alle besonderen Denkformen entzieht und schliesslich nach dem letzten Grunde aller Ordnung überhaupt fragt, muss man transzendente Prinzipien als Voraussetzung aller Möglichkeit einer Erkenntnis in Betracht ziehen. Die Wissenschaft gibt an, wie gedacht werden muss, um die Wirklichkeit nach Gesetzen verstehen zu können, also welche Vorstellungsverknüpfungen Geltung haben für unser Denken. Damit ist aber die Wirklichkeit in ihrer tatsächlichen Erscheinungsweise nicht erfasst, die Begriffsbildungen nehmen ihr geradezu das weg, was ihr angehört, was nämlich für die Gedanken als unwesentlich absichtlich fortgelassen wird. Wir suchen die Wirklichkeit damit gleichsam zu überwinden. Um aber nicht etwa hier die Meinung zuzulassen, dass wir uns damit ausser die Wirklichkeit begeben, sei ausdrücklich bemerkt, dass natürlich

unser Denken an und für sich auch ein Teil der Wirklichkeit ist, der psychische im Gegensatz zum übrigen physischen. Ein absolutes Sein muss also auch ausser dem tatsächlich erfolgenden Denken liegen als Grund einer absoluten Gesetzlichkeit. Die Wahrheit kann damit nicht als eine gedankliche Abbildung der Wirklichkeit betrachtet werden. Man wird die euklidische Geometrie nicht als falsch bezeichnen, wenn die physische Erfahrung sie nicht bestätigt in irgendeiner Messung, und ein Fehler in der Geometrie kann nur in ihr selbst nachgewiesen werden. Wahrheit ist also die Erkennung allgemeiner Gültigkeit bestimmter Vorstellungsverbindungen. Diese zu bilden ist das Ziel der einzelnen Wissenschaften, die auf der Überzeugung von der Möglichkeit sicherer Erkenntnis beruhen.

Doch kehren wir wieder zur besonderen Betrachtung von Raum und Zahl zurück und heben nochmals als gemeinsame Struktur von Geometrie und Arithmetik die gesetzmässige Verknüpfung von elementaren Dingen hervor, einerseits der Geraden in ihren Lagen und anderseits der Zahlen, als Merkmale zu Mengen von Dingen an sich, in den Rechnungsoperationen. Den logischen Aufbau in beiden Gebieten, das allgemeine Ordnungsgesetz, von dem wir bei jedem Schritt uns geleitet wissen und das wir nur in den tatsächlich erfolgenden Verbindungen der Elemente zu Raum- oder Zahlengebilden anerkennen können, ist die schliessliche Denkform, deren wir an sich als inhaltsleer auch von jeder reinen Anschauung, nicht bewusst werden können und die als das, was denkt, als erkenntnistheoretisches Subjekt, ein absolutes Sein ist. Das Wesen dieses Seins erschliesst sich dem Denken in den als wahr anzuerkennenden Vorstellungsverknüpfungen und der anschaulichen Darstellung ihrer Ergebnisse. Aus der Arithmetik ergeben sich die Ordnungsgesetze begrifflich allgemein in der Analysis und aus der Geometrie werden sie anschaulich erkennbar.

Wie die Ordnungsgesetze begrifflich mit Hülfe der Zahlen und anschaulich als Raumgebilde in unser Denken treten, zeigt in besonders übersichtlicher Weise die analytische Geometrie im Parallelismus von Rechnung und Konstruktion, indem vorerst die Zahlen sich den Punkten einer Geraden zuordnen lassen. Dies ist in bestimmter Weise schon in der projektiven Geometrie möglich ohne die Voraussetzung von Massstrecken. Sobald aber die Zahlen Strecken messen, werden sie zu Zahlgrössen und ihre Bedeutung bezieht sich auf anschauliche Dinge. Als erster Gegensatz zwischen der anschaulichen Geraden und der aus der Methode der Begriffsbildung entstandenen

Zahl tritt der von Stetigkeit und Unstetigkeit hervor. Die Zahl ist aus der absichtlichen Trennung der Gesamtheit der Wirklichkeit in einzelne Dinge entsprungen, daher kann mit ihr die Unstetigkeit nie überwunden werden, auch nicht in der gedanklichen Vorstellung der Punktreihe, und es sind Ergebnisse unendlich fortsetzbarer Rechnungen als Grenzwerte zu Hülfe zu nehmen, um die Lücken zwischen den rationalen Zahlen zu schliessen und das Zahlkontinuum der anschaulichen Geraden nachzubilden. Die anschauliche Wirklichkeit entzieht sich gleichsam der vollständig ausführbaren begrifflichen Darstellung.

An den Punkt heften sich die unvereinbaren, weil in ihrer Entstehung aus entgegengesetzten Vorstellungsmitteln entstandenen, Gegensätze von Anschauung und Begriff. Denn einerseits sucht man den Punkt aus der Anschauung zu erklären durch fortgesetzte Verkleinerung eines wirklichen Körpers, also durch einen Grenzfall, während er anderseits nur durch negative Urteile, nämlich durch Ausschliessung aller wirklich möglichen Beobachtungen begrifflich bestimmt ist. In der Idee des Punktes ist der Begriff des letzten Dinges, an welchem alle wirklichen Eigenschaften fehlen, formal gefasst, indem es durch die Gesamtheit der ausschliessenden Urteile eindeutig bestimmt ist und hier also ein Begriffsergebnis wie ein Ding in die Gedankenverbindungen eintritt. Erst durch die Bewegung, wobei aber Raum und Zeit als Anschauungen mitwirken und der Punkt eine Kurve beschreibt, erschleicht sich gleichsam dieses Unding einer Anschauung wieder die Selbstverständlichkeit seiner Existenz im Raum. Dieser Vorgang wird mathematisch durch die stetigen Funktionen geleitet. Besondere Untersuchungen über Messbarkeit und Stetigkeit führt die nichtarchimedische Geometrie aus.

Diese Schwierigkeiten, welche nicht nur die elementare Mathematik übergeht, sondern auf welche auch die historische Entwicklung der höheren Wissenschaft erst nachträglich eingetreten ist, erklären sich also aus erkenntnistheoretischen Gründen. Mit ihrer Überwindung, die eigentlich nur eine genaue Darlegung ihres Bestandes ist, beschäftigen sich besondere Zweige der mathematischen Wissenschaften, die in der Vertiefung der Grundbegriffe ihre Erfolge finden.

Indem die analytische Geometrie die Formeln der allgemeinen Arithmetik verwendet, kann sie durch diese Sammelbegriffe ihre Ergebnisse allgemein und in sehr übersichtlicher Weise darstellen. Eine gezeichnete Figur ist immer das Bild eines besonderen, verwirklichten Falles und nur in der vorausgesetzten Möglichkeit beliebiger Ausführung oder wie man auch sagen könnte in gewisser Be-

weglichkeit der Figur liegt die Zuerkennung der gedachten Allgemeinheit. Die synthetische Geometrie findet in der Sprache durch Beschreibung der Konstruktion die allgemeine Darstellung, aber jede wirkliche, auch gedankliche Ausführung bedingt die in Erscheinung-tretung in einem an sich einzigen Beispiel. Die Enge oder die Einzigkeit jeder Ausführung erkaufte den Vorteil der übersichtlichen Anschauung durch den Verzicht auf alle blossen Möglichkeiten. Der Begriff eines Kegelschnittes z. B. findet seine Bestimmung entweder in der Beschreibung einer Konstruktion, welche die Möglichkeit jeder seiner Arten enthält oder in einer Gleichung. In keiner besonderen Ausführung aber, sei es auch durch bestimmt gesetzte Zahlwerte, vermag der Inhalt des Begriffes vollständig veranschaulicht zu werden, indem nur ein Teil der Eigenschaften der Kurve reell auftritt, der andere jedoch als imaginär bezeichnet wird. Der Begriff ist also gleichsam zu reich, um in allen seinen Gestaltungsmöglichkeiten auf einmal zu erscheinen. Darin liegt die Überlegenheit der analytischen Darstellung, die auf den allgemeinen Zahlenbeziehungen beruht, wodurch alle Anschauung als von übergeordneten Gesetzen bestimmt erscheint. Die aus der Wirklichkeit der Sinne entstehende reine Anschauung wird damit aus Beziehungsgesetzen erklärt, und innert der Mathematik vollführt sich damit eine nochmalige Überwindung der räumlichen Erscheinung durch von Raum und Zeit unabhängige, rein logische Denkmittel, indem die in Verknüpfung gebrachten Dinge als jeden Inhaltes leer, nur noch in der Form von Dingen übrig bleiben.

Im Vorwärtsschreiten von den anschaulichen Anfängen der Geometrie bis zu den allgemeinsten Betrachtungen über Funktionen vollführt also die Mathematik in ihrem Gebiete den Gang, welchen die Philosophie in der Gesamtheit der Welt sucht, nämlich die Überwindung aller Einzelheiten der Wirklichkeit durch die höchsten das All durchdringenden Normen. Die Anschauung oder allgemeiner die Erfahrung erweist sich dabei als Führerin durch die vielfältigen Möglichkeiten logischer Verknüpfungen zur Konstruktion eines Ideengebäudes. Damit ist ein Parallelismus angedeutet, wie er sich schliesslich in jeder Wissenschaft finden lassen wird, da er nur der Ausdruck jeder Gedankenrichtung ist, nämlich die Erkennung der Anschauung und ihre Beherrschung durch den Begriff. Wie die Mathematik aus Geometrie und Analysis sich bildet in gegenseitiger Förderung ihrer Entwicklung, so lässt sich in Verallgemeinerung auf das All parallel deuten die Beziehung zwischen den objektiv physischen Vorgängen und den subjektiv psychischen, oder zwischen

Aussenwelt und Gedankenwelt. Dem vielfältigen Reichtum und der Unbeengtheit der Gedanken, entsprechen die vieldimensionalen Mannigfaltigkeiten und den in sich bedingten, in den Raum gezwungenen Erscheinungen, der durch die Sinne auf uns wirkenden Aussenwelt, entsprechen die anschaulichen geometrischen Gebilde, die als teilweise Verwirklichungen allgemeinerer Gesetzmässigkeiten gelten.

Nun ist aber jede Erfahrung, auch die einfachste Tatsache, sobald sie uns bewusst wird, erkenntnistheoretisch ein in eine bestimmte Form gebrachter Inhalt oder also, in Analogie zur Analysis gebracht, jede Erkenntnis tritt als fertige Funktion in unser Bewusstsein, geschaffen durch Einfluss und Zwang des Lebens. Die praktische Vernunft rechnet gleichsam unbewusst und kennt nur Ergebnisse. Die Philosophie kommt nachträglich dazu und fragt, was sind denn das für Funktionen und wie kommt man logisch dazu. Wie eine fertige algebraische Form in der analytischen Geometrie an anschaulichen Figuren erklärt wird, so sind die allgemeinen der Sprache entnommenen philosophischen Begriffe in der Wirklichkeit zu deuten, doch begegnet hier der Analyse der Philosophie die grosse Schwierigkeit, dass statt blosser Rechnungsregeln verwickelte Erfahrungen der Funktion zugrunde liegen.

In kurzer Zusammenfassung sei nochmals hervorgehoben, in welcher Weise hier eine Grundlage der Mathematik erkenntnistheoretisch zu bieten versucht wurde und zwar vornehmlich wie sie für eine elementare Betrachtungsweise dienlich und förderlich sein kann. Von der Geraden wurde ausgegangen als Vertreterin der Anschauung. Die natürliche Zahlenreihe wurde als Ausdruck der absoluten Anordnung erklärt, in welcher Raum und Zeit als unwesentlich gesetzt werden. Der Punkt wurde als letztes formal gesetztes Ding gedeutet, welches an die Gerade geheftet, die Zahl an diese überträgt, noch ohne den Begriff der Grösse. Diese letzten Reste der Erfahrung, Gerade, Zahl, Punkt, als reine innere Anschauungen bezeichnet, werden dem willkürlichen Spiel der logischen Verknüpfungen unterworfen, das die Prüfung der Erfahrung durch die Macht des Widerspruches einschränkt auf den sich selbst nicht aufhebenden als wahr und gültig anzuerkennenden Inhalt der Wissenschaft. Dabei fällt aber nicht erst die äussere Erfahrung in Betracht, sondern schon die innere des wirklich ausgeführten Gedankenganges. Sobald aber zu einer experimentellen äusseren Bestätigung geschritten wird, ist eine physikalische Hypothese nötig in der Annahme von Grössenbeziehungen und zwar an erster Stelle von Streckenmessungen.

Der elementare Unterricht, der eine fruchtbare Anwendung der Erfahrung, die überzeugende Macht der Anschauung zunutze ziehen muss, wird daraufhin die Mathematik immer als Grössenlehre beginnen und damit den historischen Gang der Entwicklung nachahmen.

Eine höhere Betrachtungsweise, die den schon gewonnenen Bau der Wissenschaft zu überblicken bestrebt ist und die, statt einer jugendlichen Entwicklung, wohl bereits eher einer, man könnte sagen, überreifen Beschaulichkeit eigen ist, wird in einem logischen System den Ausdruck letzter und tiefster Erkenntnis suchen. Innert diesen äussersten Wegen, dem Haften an der Erfahrung und der reinen Logik, wird sich die entwicklungsreiche Wissenschaft in glücklicher Selbstverständlichkeit beider Mittel bedienen, um die Menge des Wissens zu mehren.

Wie sehr auch die Darlegungen dieses Vortrags noch der Ausführungen in den Einzelheiten bedürfen, so möchte er doch die Beziehungen der Mathematik zur Philosophie soweit ausgeführt zeigen, um den allgemeinen Bildungswert mathematischer Denkweise zu beleuchten.

LITERARISCHES.

Begriff der Arbeitsschule. Von *Georg Kerschensteiner*. 3. Aufl. Leipzig 1917, B. G. Teubner. 198 S. mit 5 Taf. Fr. 2. 80, gb. M. 4. 30.

Die landläufige Pädagogik vergisst immer, dass ein bloss interessant gemachter Gegenstand bei weitem nicht jene Kräfte im allgemeinen auslöst wie ein vom eigensten Interesse ergriffener Gegenstand. Sobald einmal die „Selbsttätigkeit“ aus dem innersten Bedürfnis auf die Erzeugung eines Objekts entsprungen ist, dann ergreift sie alles, was mit der rechten Erzeugung notwendig verbunden werden kann, Rechnen, Zeichnen, ja selbst Lesen und Schreiben mit der gleichen Wucht der nach Erfüllung des Bedürfnisses drängenden ganzen Seele. — Dieser Satz (S. 197) ist kennzeichnend für die Auffassung des Arbeitsbegriffes, den Dr. Kerschensteiner in der 3. Aufl. dieses Büchleins noch schärfer herausarbeitet als zuvor. Leute seines Schlages sind nie fertig. Beachtenswert ist neben mancherlei Verbesserungen und Ergänzungen für die Neuauflage die Darstellung der Versuchsschulen in München, die im Anhang beigelegt ist. Da ist ein Bild der Arbeit gegeben. Interessiert den einen besonders der Ausgang vom Wortbild fürs Lesen (nach amerikanischem Muster), so sagt einem andern die starke Benützung der Holzarbeit zu. Ob der Leser den mehr allgemeinen Erörterungen oder den praktischen Versuchen, die das Buch schildert, folge, er wird das Buch wiederum sehr anregend finden. Eine Grundlage für Diskussion in kleinern Arbeitszirkeln wie fürs Einzelstudium.