

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 25 (1915)
Heft: 3-4

Artikel: Die Bedeutung der Differential- und Integralrechnung für die Naturwissenschaften
Autor: Brandenberger, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-789302>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Bedeutung der Differential- und Integralrechnung für die Naturwissenschaften.

Vortrag,*) gehalten in der naturwissenschaftlichen Lehrervereinigung der Stadt Zürich.

Von Professor Dr. C. Brandenberger, Zürich.

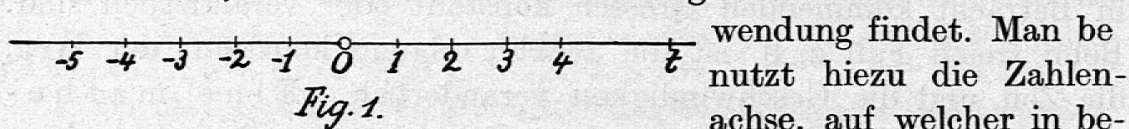
In der elementaren Mathematik werden die Grössen in bekannte und unbekante Grössen eingeteilt. Man pflegt die Bekannten mit den ersten, die Unbekannten mit den letzten Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen. In der höheren Mathematik unterscheidet man ausserdem zwischen konstanten oder festen und variabeln oder veränderlichen Grössen. Die ersten Buchstaben des Alphabetes bedeuten im allgemeinen konstante, die letzten veränderliche Grössen. Jeder Vorgang in der Natur zeigt, dass die in Betracht kommenden Grössen konstant oder veränderlich sind. Beim freien Fall z. B. ist die Beschleunigung konstant, der Weg, die Zeit und die Geschwindigkeit veränderlich. Eine mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme ist also nur dadurch möglich, dass das Element der Veränderlichkeit in die Mathematik aufgenommen wird.

Eine Grösse heisst konstant, wenn sie im Laufe einer Rechnung oder Untersuchung nur einen, veränderlich, wenn sie mehrere, unter Umständen unendlich viele Werte annimmt. Kosten 5 kg einer Ware 15 Fr., so kosten 7 kg derselben Ware 21 Fr.

*) Der Umstand, dass auch Zuhörer ohne Vorkenntnisse in der Infinitesimalrechnung und solche, die seit Jahrzehnten keine eigentlichen mathematischen Studien mehr betrieben hatten, meinen Ausführungen folgen und sich eine Vorstellung von der Bedeutung der Infinitesimalrechnung für die Naturwissenschaften bilden konnten, veranlasst mich, den aus dem Kreise der Zuhörer geäusserten Wunsch, ich möchte meinen Vortrag drucken lassen, zu erfüllen. Ausser den ersten Elementen der Algebra und den einfachsten Begriffen und Sätzen der Planimetrie sind für das Verständnis dieses Aufsatzes keine mathematischen Kenntnisse erforderlich. Ich habe versucht, die Grundgedanken der Differential- und Integralrechnung auch ohne das Hilfsmittel der Trigonometrie zu entwickeln. Wünschbar ist allerdings, dass der Leser bei der Lektüre die kleinen Rechnungen nachrechne und die Figuren auf kariertem Papier selber zeichne. — Wenn an der Mittelschule Differential- und Integralrechnung gelehrt wird, so soll es sich dabei nicht um die Vermittlung einer grossen Fertigkeit im Differenzieren und Integrieren als vielmehr darum handeln, dem Schüler an zahlreichen Beispielen die grosse Bedeutung der Infinitesimalrechnung für die reine und angewandte Mathematik vor Augen zu führen. Der Verfasser hofft, mit dieser Arbeit auch einen bescheidenen Beitrag zur Methodik des Mathematikunterrichtes an der Mittelschule geliefert zu haben.

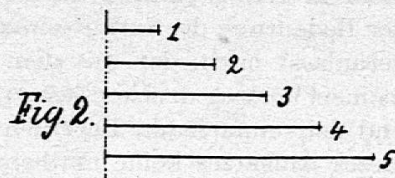
Veränderlich sind hier die Menge und der Wert der Ware; denn jede der beiden Grössen nimmt zwei Werte an. Konstant dagegen sind die Einheiten, mit welchen wir die Grössen messen (das Kilogramm, der Franken) und der Einheitspreis. — Bewegt sich ein Fussgänger gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von 5 km pro Stunde, so beträgt der Weg nach 0, 1, 2, 3, 4 Stunden der Reihe nach 0, 5, 10, 15, 20 km. Veränderlich sind in diesem Beispiele Zeit und Weg, konstant die Einheiten und die Geschwindigkeit. — Veränderlich sind ferner die Schülerzahl einer Klasse, meine Barschaft usw. Während sich aber Grössen dieser Art un stetig (sprungweise) ändern, ist die Veränderung des Weges oder der Zeit eine stetige. In der Folge werden wir uns nur mit stetig veränderlichen Grössen befassen.

Um verschiedene Werte einer Grösse miteinander leichter vergleichen zu können, stellt man die Grössen durch Strecken dar, ein Verfahren, das in der Schule und im täglichen Leben vielfach Ver-



wendung findet. Man benutzt hiezu die Zahlenachse, auf welcher in bekannter Weise die reellen Zahlen abgebildet sind (Fig. 1). Soll auf diese Art irgendeine Grösse graphisch dargestellt werden, so müssen wir in erster Linie festsetzen, welcher Wert der darzustellenden Grösse der Längeneinheit entspricht. Handelt es sich z. B. um die Zeit, so wird man die Zeiteinheit (1 Sekunde, 1 Minute, ...) durch die Längeneinheit versinnbildlichen. Entspricht die Längeneinheit etwa einer Sekunde, so stellen die Strecken $O 1$, $O 2$, $O 3$, ... $O t$ der Reihe nach die Zeiten 1, 2, 3, ... t Sekunden dar.

In Zeitungen, Atlanten u. a. O. findet man gelegentlich eine etwas andere Art der Darstellung der Werte einer Grösse durch Strecken. Es werden nämlich die Strecken, welche verschiedene Werte einer Grösse veranschaulichen, nicht auf derselben, sondern auf parallelen Geraden gezeichnet, und zwar so, dass die Anfangspunkte der Strecken auf einer zu den Strecken senkrechten Geraden liegen (Fig. 2). Verschiebt man die Strecken in Figur 2 in passender Weise, so geht Figur 2 in Figur 1 über,



In dem vorhin angeführten Beispiele von der Menge und dem Wert der Ware besteht zwischen den beiden veränderlichen Grössen „Menge der Ware“ und „Wert der Ware“ eine Beziehung: Jedem Wert der einen Grösse entspricht ein bestimmter Wert der andern

Grösse ; eine Änderung der einen hat eine Änderung der andern zur Folge. Besteht nun zwischen zwei Veränderlichen ein Zusammenhang von der Art, dass jedem Wert der einen Grösse ein bestimmter Wert der andern entspricht, so sagt man, die beiden Grössen seien voneinander abhängig, oder es sei jede Grösse eine Funktion der andern. Erteilen wir der Grösse „Menge der Ware“ den Wert 10 kg, so kann der entsprechende Wert der andern Grösse — 30 Fr. — berechnet werden. Die Grösse, der wir beliebige Werte beilegen, heisst die unabhängig Variable oder das Argument, die andere die abhängig Variable oder die Funktion. Beispiele: Die Menge der Ware ist eine Funktion des Wertes der Ware und umgekehrt der Wert der Ware eine Funktion der Menge der Ware. Beim freien Fall ist jede der Grössen Weg, Zeit, Geschwindigkeit eine Funktion jeder andern Grösse. Ebenso besteht ein funktionaler Zusammenhang zwischen Radius und Umfang eines Kreises, zwischen der Temperatur und der Länge eines Metallstabes, zwischen Höhe und Luftdruck usw.

Der funktionale Zusammenhang zweier Grössen kann auf drei Arten zum Ausdruck gebracht werden: durch eine Tabelle, durch eine Kurve oder durch eine Gleichung.

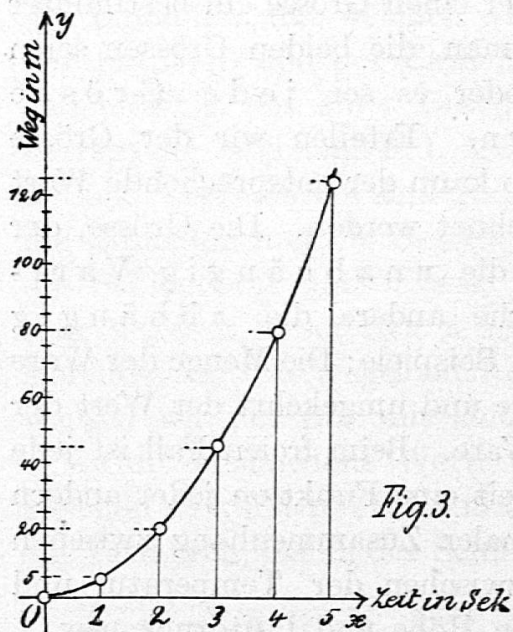
Wir erläutern die drei Darstellungsmethoden an dem Beispiele des freien Falles. Fällt ein Körper im luftleeren Raum, so kann experimentell festgestellt werden, dass er zurücklegt hat

nach 1 Sekunde rund	5 m	=	5.1^2 m	(genauer $4,9$ m = $\frac{g}{2}$ m)
„ 2 „ „	20 m	=	5.2^2 m	
„ 3 „ „	45 m	=	5.3^2 m	
„ 4 „ „	60 m	=	5.4^2 m	
„ 5 „ „	125 m	=	5.5^2 m	

nach t Sekunden rund $5.t^2$ m

Offenbar gelangt in dieser Zahlentabelle die zwischen Zeit und Weg bestehende Beziehung zum Ausdruck. Um ein anschaulicheres Bild vom Verlaufe dieser Funktion zu gewinnen, zeichnen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Fig. 3). Auf der wagrechten, der sog. Abszissen- oder x -Achse, stellen wir in der vorhin geschilderten Art die Zeit dar. Alsdann errichten wir in den Endpunkten der Zeitstrecken, senkrecht zu diesen, die zugehörigen Wegstrecken, d. h. wir tragen auf Loten zur x -Achse, von dieser aus, Strecken ab, die den entsprechenden Wegwert veranschaulichen. Die Zeit wird also wie in Figur 1, der Weg wie in Figur 2 durch Strecken dargestellt.

Nun ändert sich die Zeit stetig und nicht wie in der Tabelle, sprungweise von 0 bis t Sekunden. Bestimmen wir für jeden Moment den



Weg und führen jedesmal die Konstruktion aus, so ist der Ort der Endpunkte der unendlich vielen Wegstrecken eine Kurve — in unserm Falle eine Parabel —, die uns ein anschauliches Bild vom Verlaufe der Funktion gibt. Die Methode der graphischen Darstellung, die wir eben erläutert haben, ist für Wissenschaft und Praxis von grösster Bedeutung. Sie wird vom Naturforscher zur Darstellung der Ergebnisse wissenschaftlicher Untersuchungen benutzt, doch weiss auch der einfache Handwerker, was das Steigen und Fallen der Kurven

bedeuten. „Die Darstellung von Funktionen durch Kurven eröffnet eine neue Welt von Vorstellungen und lehrt den Gebrauch einer der fruchtbringendsten Methoden, durch welche der menschliche Geist seine eigene Leistungsfähigkeit erhöhte“ (E. Du Bois-Reymond).

Um endlich die Abhängigkeit der beiden Grössen Zeit und Weg auf die dritte Art, durch eine Gleichung, auszudrücken, bezeichnen wir, wie dies bereits geschehen ist, einen beliebigen Wert der Zeit mit t und den zugehörigen Wert des Weges mit s . Dann zeigt die Tabelle, dass zwischen diesen Grössen die Gleichung besteht

$$s = 5 \cdot t^2,$$

wo s und t veränderliche Grössen sind. Diese einfache Gleichung fasst nicht nur alle Aussagen der Tabelle, sondern unendlich viele Angaben zusammen. Sie gestattet, zu jedem Wert von t den entsprechenden Wert von s , und zu jedem Wert von s den zugehörigen Wert von t zu berechnen. Da mit Hilfe dieser Gleichung die Kurve in Figur 3 konstruiert werden kann, nennt man sie auch „die Gleichung jener Kurve“ und die Kurve „das Bild jener Gleichung“. Wir betonen, dass diese kurze, die Erscheinung in ihrem ganzen Verlaufe beschreibende Darstellung nur durch Einführung des Momentes der Veränderlichkeit ermöglicht wurde.

Schon der elementare Mathematikunterricht befasst sich mit der Aufgabe, Gleichungen zu ermitteln, die den Zusammenhang voneinander abhängiger Grössen wiedergeben. Beispiele: Der Inhalt

I des Quadrates ist eine Funktion der Seite s ; in der Planimetrie wird gezeigt, dass diese Beziehung durch die Gleichung $I = s^2$ ausgedrückt werden kann. Die drei Winkel eines ebenen Dreieckes sind voneinander abhängig; das Abhängigkeitsgesetz lautet: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. — Der Zins z , den das Kapital k in t Tagen bei $p\%$ bringt, ist eine Funktion von k , t und p ; in der Arithmetik wird nachgewiesen, dass dieser Zusammenhang in der Gleichung

$$z = \frac{k p t}{36000}$$

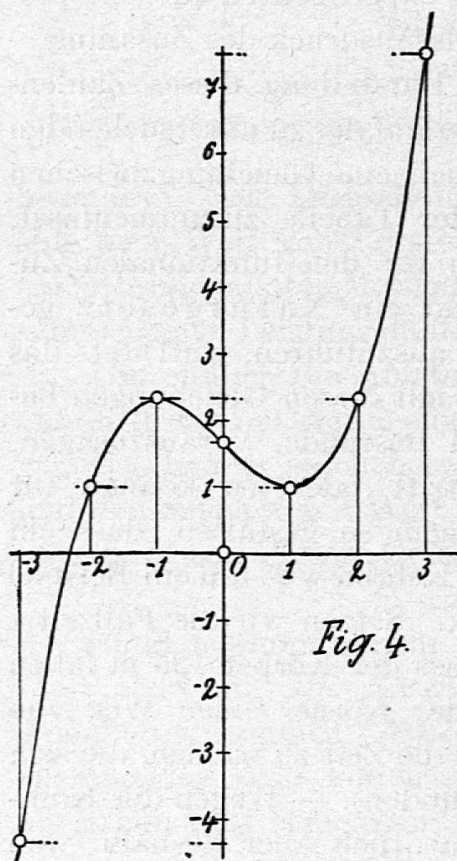
zum Ausdruck kommt.

Soll der funktionale Zusammenhang, der zwischen den Veränderlichen x und y besteht, untersucht werden, so schlägt man im allgemeinen folgenden Weg ein: Wir erteilen der einen Variablen, z. B. x , bestimmte Werte und ermitteln experimentell die entsprechenden Werte von y . So gewinnen wir als Ausdruck des Zusammenhangs eine Tabelle. Durch graphische Darstellung dieses Zahlenmaterials finden wir eine Kurve, die den Verlauf der zu untersuchenden Funktion veranschaulicht. Gelingt es endlich, eine Gleichung zwischen x und y zu finden, die die Angaben der Tabelle zusammenfasst, deren Bild also die Kurve ist, so haben wir den funktionalen Zusammenhang vollständig aufgedeckt und ein Naturgesetz gefunden. Auch diesen letzten Schritt noch auszuführen, wird stets das Bestreben des Naturforschers sein. Denn mit diesen Gleichungen beherrschen wir die Natur, d. h. wir sind imstande, vorauszusagen, was unter bestimmten Bedingungen eintritt, oder wir können auf Grund dieser Gleichungen die Bedingungen so gestalten, dass ein zum voraus gegebenes Ergebnis eintritt. Kehren wir, um ein Beispiel zu geben, zum Fallgesetz $s = 5 t^2$ zurück. Setzen wir die Fallzeit $t = 5$ Sek., so können wir voraussagen, dass der Körper 125 m fallen wird. Wünschen wir umgekehrt, dass der Körper einen Weg von 80 m zurücklege, so haben wir als Fallzeit die Zeit zu wählen, die sich aus der Gleichung $80 = 5 t^2$ ergibt (4 Sekunden). — Wegen der Kompliziertheit der Naturerscheinungen, namentlich aber deshalb, weil eine Grösse im allgemeinen nicht eine Funktion einer, sondern mehrerer Veränderlichen ist, ist die Darstellung des Zusammenhangs von Veränderlichen durch Gleichungen bis heute nur in einfachen Fällen gelungen. Ist man nicht imstande, die Gleichung anzugeben, die einer Naturerscheinung völlig entspricht, so konstruiert man häufig eine Näherungsformel, d. h. eine möglichst einfach gebaute Gleichung, die möglichst genau mit den experimentellen Erfahrungen im Einklange steht.

Ohne Zweifel hat die Mathematik als Hilfswissenschaft der Naturwissenschaften die Aufgabe, eine möglichst grosse Zahl von Funktionen zu untersuchen. Die vom Mathematiker bewiesenen Eigenschaften der Funktionen werden vom Naturforscher als Eigenschaften der Naturerscheinungen gedeutet. Interessant ist dabei, wie Probleme der verschiedensten Wissenszweige auf dieselbe Funktion führen. So tritt die Funktion $y = e^x$ ($e = 2,7 \dots$) in folgenden Gebieten auf: Zinseszins- und Rentenrechnung, Änderung des Holzbestandes eines Waldes, Bevölkerungsbewegung, Wachstum von Pflanzen, barometrische Höhenmessung, Abkühlung von Körpern, chemische Reaktion usw.

Soll eine Funktion untersucht werden, so sehen wir von der realen Bedeutung der Veränderlichen vollständig ab. Liegt z. B. die Funktion

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x + 1\frac{2}{3}$$

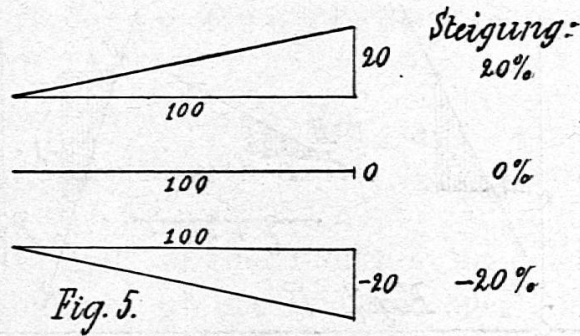


vor, so fragen wir in erster Linie: Wie ändert sich y , wenn wir x stetig wachsen lassen von $-\infty$ bis $+\infty$? Wir erteilen x eine grössere Zahl von Werte, z. B. 0, 1, 2, 3, ... $-1, -2, -3, \dots$ und berechnen die entsprechenden Werte von y . Stellen wir die Funktion graphisch dar (Fig. 4), so können wir an Hand der Kurve übersehen, wie y sich ändert, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst. Wir können die Bereiche angeben, für welche die Funktion positiv oder negativ wird, für die sie wächst oder abnimmt, wir können ferner „die Stellen“, d. h. die Werte von x bezeichnen, für die die Funktion grösste oder kleinste Werte annimmt u. s. f.

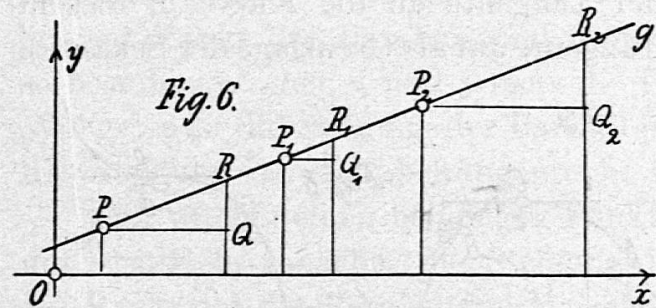
* * *

Für die nun folgenden Entwicklungen ist der Begriff der Steigung einer Geraden von grösster Wichtigkeit. Bekanntlich versteht man im täglichen Leben unter der Steigung einer Strasse das Verhältniss der Höhenänderung zum entsprechenden horizontalen Fortschritt.

Eine Strasse hat eine Steigung von $p\%$, besagt, dass man p m höher kommt, wenn man sich 100 m horizontal vorwärts bewegt. Die Steigung ist positiv, null oder negativ, je nachdem die Strasse steigt, wagrecht verläuft oder fällt (Fig. 5).



Um nun die Steigung einer Geraden zu definieren, ziehen wir durch einen beliebigen Punkt P (Fig. 6) der Geraden parallel zur x -Achse die Strecke PQ von beliebiger Länge und durch den Endpunkt Q , parallel zur y -Achse, die Strecke QR . Als Steigung der Geraden definieren wir das Verhältnis $QR:PQ$,



d. h. das Verhältnis aus der Höhenänderung zum entsprechenden horizontalen Fortschritt, oder das Verhältnis der Ordinatendifferenz und der Abszissendifferenz der beiden Punkte P und Q . Die Steigung der Geraden ist offenbar weder von der Lage des Punktes P noch von der Länge der Strecke PQ abhängig, sie ist für alle Punkte der Geraden konstant. Denn nach planimetrischen Sätzen ist $\triangle PQR \sim \triangle P_1Q_1R_1 \sim \triangle P_2Q_2R_2$ u. s. f. Jede Steigung bestimmt eine Richtung und jede Richtung eine Steigung.

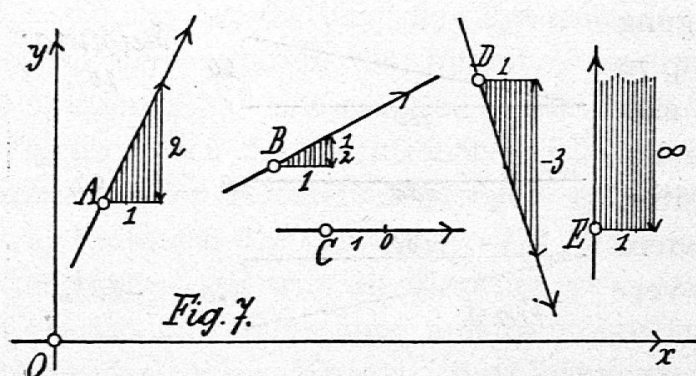
Zur Übung zeichne man

- a) durch A die Gerade mit der Steigung 2,
- b) „ B „ „ „ „ „ $\frac{1}{2}$,
- c) „ C „ „ „ „ „ „ 0,
- d) „ D „ „ „ „ „ „ - 3,
- e) „ E „ „ „ „ „ „ ∞

(Setzt man den horizontalen Fortschritt = 1, so ist die Höhenänderung dem Zahlwerte nach gleich der Steigung. Fig. 7.)

Aus diesen Ausführungen ergeben sich folgende Sätze:

Ist die Steigung positiv, so verläuft die Gerade von links unten nach rechts oben, und zwar um so steiler, je grösser die Steigung ist.



Ist die Steigung negativ, so verläuft die Gerade von links oben nach rechts unten, und zwar um so steiler, je kleiner die Steigung ist.

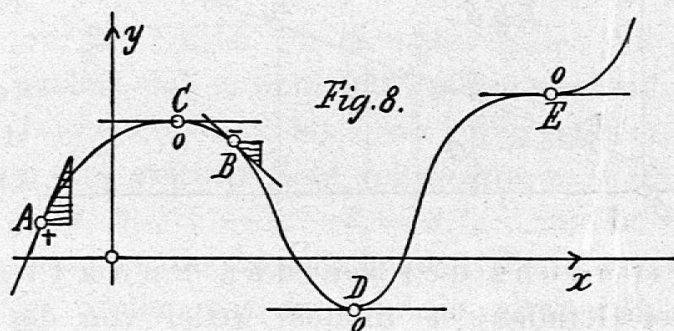
Ist die Steigung 0, so verläuft die Gerade von links nach rechts,

also wagrecht.

Ist die Steigung ∞ , so verläuft die Gerade von oben nach unten, also senkrecht.

Unter der Steigung einer Kurve im Punkte A verstehen wir die Steigung der Tangente an die Kurve in diesem Punkte. (Dabei fassen wir die Tangente auf als Grenzlage der Sekante).

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so bleibt die Steigung konstant, durchläuft er dagegen eine krumme Linie, so ändert sich die Steigung von Punkt zu Punkt, etwa so, wie bei einem Wege durch Hügelland (Fig. 8).



Unter der Voraussetzung, dass die unabhängig Variable x wächst, dass also die Kurve von links nach rechts durchlaufen wird, gelten offenbar folgende Sätze:

Ist die Steigung einer Kurve an einer Stelle positiv (A), so steigt die Kurve, die Funktion nimmt zu. Je grösser die Steigung ist, um so stärker steigt die Kurve, um so rascher wächst die Funktion.

Ist die Steigung einer Kurve an einer Stelle negativ (B), so fällt die Kurve, die Funktion nimmt ab. Je kleiner die Steigung ist, um so stärker fällt die Kurve, um so rascher nimmt die Funktion ab.

Ist die Steigung einer Kurve an einer Stelle Null (C, D, E), so verläuft die Kurve wagrecht. Dabei sind drei Möglichkeiten denkbar:

a) die Kurve besitzt einen höchsten Punkt, die Funktion einen grössten Wert (C);

b) die Kurve besitzt einen tiefsten Punkt, die Funktion einen kleinsten Wert (D);

c) die Kurve besitzt eine Art Terrasse (E).

In der als Steigung der Kurve bezeichneten Grösse besitzen wir also ein Mass für das Wachsen einer Funktion, d. h. ein Mittel zur Beantwortung der Fragen, ob eine Funktion an einer bestimmten Stelle wächst oder abnimmt, ob das Wachsen oder Abnehmen ein rasches oder langsames ist u. s. f.

Es wird sich nun vor allem darum handeln, zu zeigen, wie die Steigung berechnet werden kann. Dies soll an dem Beispiel

$$(1) \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

geschehen, also an der Funktion, auf die z. B. der freie Fall führt. Das Bild dieser Funktion ist die Parabel in Fig. 9. Ist P ein beliebiger Punkt der Parabel, sind ferner x und y seine Koordinaten, so besteht zwischen x und y stets die Gleichung (1). Nun fragen wir: Wie gross ist die Steigung der Parabel im Punkte P, d. h. wie gross ist die Steigung der Parabeltangente in diesem Punkte?

Wir wählen einen beliebigen Punkt R der Parabel als Hilfspunkt und ermitteln zunächst die Steigung der Sekante PR. Bewegt sich ein Punkt auf der Parabel von P nach R, so ist der horizontale Fortschritt dieses Punktes gleich der Differenz der Abszissen, die überwundene Höhenänderung gleich der Differenz der Ordinaten der beiden Punkte P und R. Man pflegt den horizontalen Fortschritt (Abszissendifferenz, Argumentänderung) mit Δx , die Höhenänderung (Ordinatendifferenz, Funktionsänderung) mit Δy zu bezeichnen. (Δx , gelesen „Delta x“ bedeutet: Differenz zweier x , $D = \Delta$. — Δx und Δy sind nicht Produkte, sondern untrennbare Zeichen, wie z. B. $\sin x$, $\log x$ usw.) Der Punkt R hat die Koordinaten $(x + \Delta x)$ und $(y + \Delta y)$. Da R auf der Parabel liegt, gilt die Gleichung

$$(2) \quad y + \Delta y = \frac{1}{4}(x + \Delta x)^2.$$

Subtrahieren wir von (2) die Gleichung (1), so erhalten wir für die Höhenänderung den Ausdruck

$$\Delta y = \frac{1}{4}(x + \Delta x)^2 - \frac{1}{4}x^2, \text{ oder}$$

$$(3) \quad \Delta y = \frac{1}{2}x \cdot \Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2.$$

Dividieren wir beide Seiten von (3) durch den horizontalen Fortschritt Δx , so folgt als Steigung der Sekante PR

$$(4) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\Delta x.$$

(In unserer Figur ist $x = 3$, $\Delta x = 2$, also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, die Steigung der Sekante $PR = 2$, was richtig ist, weil der horizontale Fortschritt $PQ = 2$ und die Höhenänderung $QR = 4$ ist.)

Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Quotient zweier Differenzen und wird daher *Differenzenquotient* genannt. Sein Wert ist also gleich der Steigung der Sekante.

Dreht sich nun die Sekante um den Punkt P in dem Sinne, dass sich R immer mehr dem Punkte P nähert, so nennt man die Gerade in dem Momente, in dem R mit P zusammengefallen ist, die *Tangente* der Parabel im Punkte P . Während dieser Drehung werden die Differenzen Δx und Δy immer kleiner und in dem Moment, in dem die Gerade Tangente wird, gleich Null. Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ändert sich ebenfalls und nimmt für $\Delta x = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Um den wahren Wert dieses Ausdruckes, d. h. die Steigung der Tangente zu finden, lassen wir Δx , von der Zahl 2 — welchen Wert Δx in Figur 9 hat — ausgehend, nach Null streben, etwa dadurch, dass Δx die endlose Wertereihe

$$2; 0,2; 0,02; 0,002; 0,0002; \dots$$

durchläuft. Wir berechnen die Werte, die $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für die Glieder dieser Reihe annimmt (nach 4) und finden, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Zahlenreihe

$$2; 1,55; 1,505; 1,5005; 1,50005; \dots$$

durchläuft, also gegen 1,5 strebt. Denselben Wert erhalten wir, wenn wir in dem Ausdrucke für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Delta x = 0$ setzen und den so erhaltenen Ausdruck $\frac{1}{2}x$ für $x = 3$ auswerten. Man bezeichnet nun den Wert, gegen welchen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ strebt, oder, was dasselbe ist, den Wert, den der Ausdruck für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ annimmt, wenn $\Delta x = 0$ wird, mit $\frac{dy}{dx}$, und man nennt diesen Wert den *Differentialquotienten* oder die *Ableitung* der Funktion $y = \frac{1}{4}x^2$. Der Differentialquotient der Funktion $y = \frac{1}{4}x^2$ ist also $\frac{1}{2}x$. Er ist wieder eine Funktion von x , die mit y' oder $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet wird. Zusammenfassend können wir schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\}_{\Delta x = 0} = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot \Delta x \right\}_{\Delta x = 0} = \frac{1}{2}x.$$

Das Beispiel zeigt uns die Bedeutung des Differentialquotienten für die Konstruktion von Kurven. Die Parabel (Fig. 9) ist nach (1) aus Punkten konstruiert worden. Nun sind wir auch imstande, in jedem Punkte noch die Tangente an die Kurve zu legen; denn die Steigung der Tangente in dem Punkte mit der Abszisse x ist $\frac{1}{2}x$. Der Punkt K z. B. hat die Abszisse (-5) und die Ordinate $6\frac{1}{4}$. Die Steigung der Tangente in K ist $\frac{1}{2} \cdot (-5) = -2\frac{1}{2}$. In der folgenden Tabelle ist für eine Reihe von Punkten die Abszisse x , die Ordinate y und die Steigung der Tangente $\frac{dy}{dx}$ angegeben.

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	1	1
3	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$
4	4	2
5	$6\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
6	9	3
-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
-2	1	-1
-3	$2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-4	4	-2
-5	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-6	9	-3

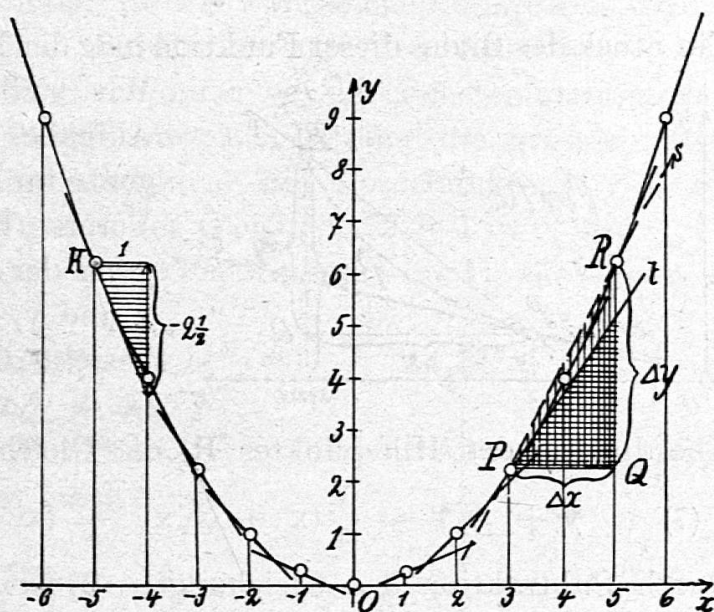


Fig. 9.

Soll also der Verlauf der Funktion

$$(4) \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

untersucht werden, so berechnen wir als Hilfsfunktion ihren Differentialquotienten, nämlich die Funktion

$$(5) \quad y' = \frac{1}{2}x.$$

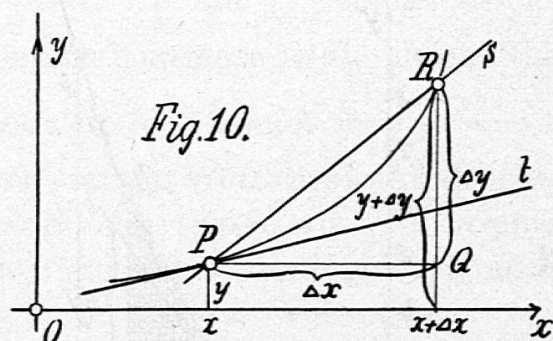
Zu jedem Wert x_0 liefert (1) den Funktionswert, zu jeder Abszisse eines Punktes P_0 die entsprechende Ordinate. Dagegen zeigt uns (1) nicht, wie die Funktion an der Stelle x_0 sich ändert, ob sie wächst oder abnimmt und in welchem Masse dies geschieht, oder geometrisch gesprochen, sie liefert uns die Tangente an die Kurve in P_0 nicht.

Aufschluss darüber gibt Gleichung (5). Denn je nachdem $\frac{1}{2} x_0$ positiv oder negativ ist, nimmt die Funktion an jener Stelle zu oder ab, und aus der Grösse des absoluten Wertes von $\frac{1}{2} x_0$ schliessen wir auf die Intensität der Veränderung an der Stelle x_0 . Ferner ist der Wert, den y' für $x = x_0$ annimmt, die Steigung der Tangente an die Parabel im Punkte P_0 .

Die Bedeutung des Differentialquotienten und das Verfahren, nach welchem er berechnet wird, soll noch an einem zweiten Beispiel dargetan werden. Gegeben sei die Funktion

$$(6) \quad y = \frac{1}{3} x^3 - x + 1 \frac{2}{3}.$$

Ein Stück des Bildes dieser Funktion mag der Bogen PR sein (Fig. 10).



Wir stellen uns wiederum die Aufgabe, die Steigung der Tangente im Punkte P zu ermitteln. Vorerst berechnen wir die Steigung der Sekante PR. Zwischen x und y , den Koordinaten von P besteht Gleichung (6), zwischen $(x + \Delta x)$ und $(y + \Delta y)$, den

Koordinaten des Hilfspunktes R, die Gleichung

$$(7) \quad y + \Delta y = \frac{1}{3} (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) + 1 \frac{2}{3}.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (6) und (7) und Division des Ergebnisses durch Δx ergibt sich als Steigung der Sekante der Differenzenquotient

$$(8) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^2 + x \cdot \Delta x + \frac{1}{3} (\Delta x)^2 - 1.$$

Dreht sich die Sekante PR um P, bis R mit P zusammenfällt und die Gerade PR Tangente wird, so streben Δx und Δy gegen 0, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aber gegen die Zahl hin, in die der Ausdruck für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (rechte Seite von 8) übergeht, wenn $\Delta x = 0$ gesetzt wird. Dieser Wert heisst wieder die Ableitung oder der Differentialquotient der Funktion (6) und wird mit y' oder $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet. Es ist also

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\}_{\Delta x = 0} = \left\{ x^2 + x \cdot \Delta x + \frac{1}{3} (\Delta x)^2 - 1 \right\}_{\Delta x = 0} = x^2 - 1.$$

Der Differentialquotient der Funktion (6) ist also die Funktion

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = y' = x^2 - 1$$

Erteilen wir x einen beliebigen Wert, etwa 2, so liefert (6) den Wert der Funktion (die Ordinate des Punktes und damit den Punkt), Gleichung (9) aber die Richtung der Tangente. Für $x = 2$ wird $y = 2\frac{1}{3}$, $y' = 3$ (Fig. 11). Da der Differentialquotient positiv ist, wächst die Funktion an der Stelle $x = 2$, und da er den Wert 3 hat, ist jede kleine

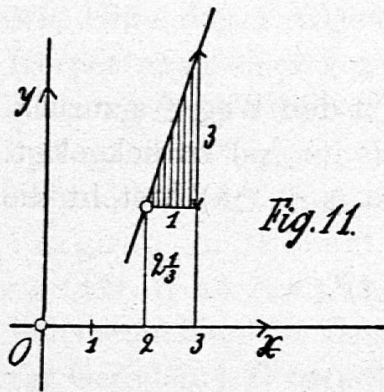


Fig. 11.

Änderung der Funktion ungefähr das Dreifache der entsprechenden Änderung von x . — Sollen alle Punkte bestimmt werden, in welchen die Kurve die Steigung 3 hat, so ist die Gleichung $x^2 - 1 = 3$ aufzulösen. Man findet, dass es zwei solche Punkte gibt, nämlich die Punkte mit den Abszissen ± 2 . Endlich können wir die höchsten und tiefsten Punkte der Kurve oder die grössten und

kleinsten Werte der Funktion suchen. Für diese Punkte ist $y' = 0$. Ihre Abszissen sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 1 = 0$, also ± 1 . Die Funktion (6) wird für $x = +1$ ein Minimum ($= 1$), für $x = -1$ ein Maximum ($= 2\frac{1}{3}$).

In der folgenden Tabelle ist zu mehreren Werten von x der entsprechende Wert der Funktion (nach 6) und der Ableitung (nach 9)

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	$1\frac{2}{3}$	-1
1	1	0
2	$2\frac{1}{3}$	3
3	$7\frac{2}{3}$	8
-1	$2\frac{1}{3}$	0
-2	1	3
-3	$-4\frac{1}{3}$	8

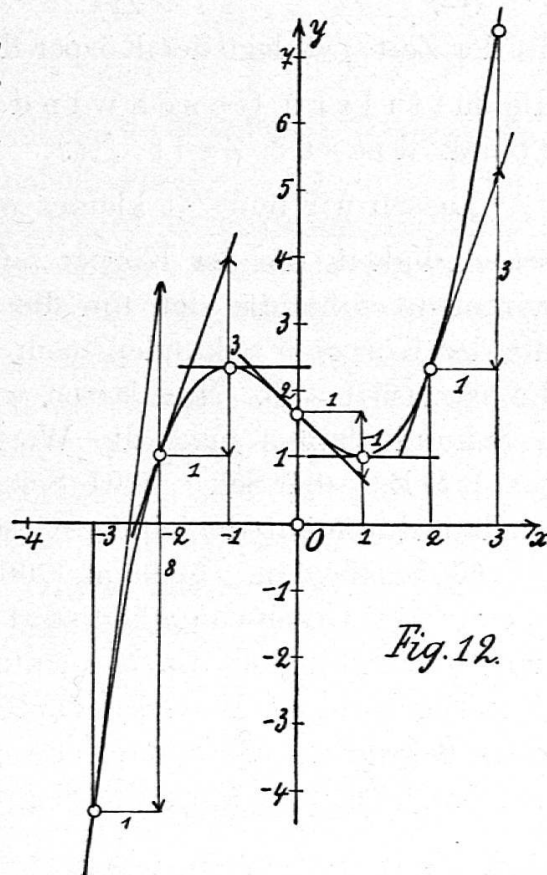


Fig. 12.

berechnet und auf Grund der Tabelle das Bild der Funktion (6) aus Punkten und Tangenten konstruiert worden (Fig. 12).

Wir behandeln noch zwei Beispiele, in welchen die Variablen eine reale Bedeutung haben.

I. Freier Fall. Wie früher, bezeichnen wir den Weg, den der Körper in einem bestimmten Zeitpunkt, etwa t Sekunden nach Beginn der Bewegung, zurückgelegt hat, mit s . Dann gilt die Gleichung (Seite 152).

$$(10) \quad s = 5 \cdot t^2.$$

Legt der Körper in der nun folgenden Zeit Δt den Weg Δs zurück, so hat er in $(t + \Delta t)$ Sekunden den Weg $(s + \Delta s)$ zurückgelegt. Zwischen der Zeit $(t + \Delta t)$ und dem Wege $(s + \Delta s)$ besteht die Gleichung

$$(11) \quad s + \Delta s = 5 \cdot (t + \Delta t)^2.$$

Subtraktion von (11) und (10) ergibt:

$$\Delta s = 10t \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2.$$

Dividieren wir beiderseits durch Δt , so erhalten wir den Differenzenquotienten

$$(12) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t.$$

In der Zeit Δt legt der Körper den Weg Δs zurück; somit ist $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit des Körpers während dieser Zeit Δt .

Lassen wir nun Δt kleiner werden, so nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ der Geschwindigkeit, die der Körper „in dem Momente t “ besitzt. Angenommen, es handle sich um die Bestimmung der Geschwindigkeit, die der Körper 6 Sekunden nach Beginn der Bewegung erreicht hat. Es ist also $t = 6$. Nun lassen wir Δt , das ursprünglich dem Wert 1 Sekunde haben mag, die Wertereihe durchlaufen

1 Sek., 0,1 Sek., 0,01 Sek., 0,001 Sek., 0,0001 Sek. ...

Alsdann durchläuft die mittlere Geschwindigkeit die folgende Wertereihe

65 m, 60,5 m, 60,05 m, 60,005 m 60,0005 m ...

Die mittlere Geschwindigkeit strebt also offenbar nach dem Wert 60 m, der Geschwindigkeit im Momente $t = 6$.

Allgemein ist die Geschwindigkeit v , die der Körper t Sekunden nach Beginn der Bewegung erlangt hat, die Zahl, gegen welche die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ hinstrebt, wenn Δt (und Δs) $\rightarrow 0$ wird. Wir bezeichnen diesen Grenzwert als Differentialquotient des Weges nach der Zeit, $\frac{ds}{dt}$, und finden ihn dadurch, dass wir in der rechten Seite von (12) $\Delta t = 0$ setzen. Es ist also

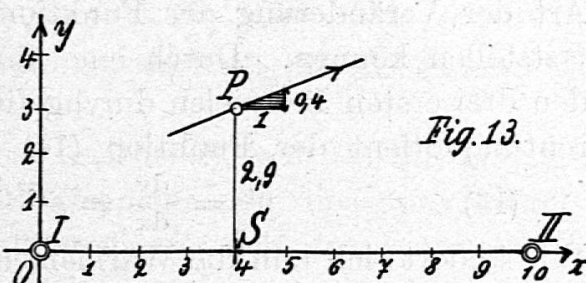
$$v = \left. \frac{\left\{ \frac{\Delta s}{\Delta t} \right\}}{\Delta t = 0} \right|_{\Delta t = 0} = \frac{ds}{dt} = \left. \left\{ 10t + 5 \cdot \Delta t \right\} \right|_{\Delta t = 0}, \text{ somit}$$

$$(13) \quad v = 10t.$$

Der Vorgang, den wir als freien Fall bezeichnen, ist in seinem ganzen Verlaufe gegeben durch Gleichung (10). Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich der Weg ermitteln, den der Körper nach einer gegebenen Zeit zurückgelegt hat. Die Gleichung (13) gibt uns die Geschwindigkeit, die der Körper in einem bestimmten Zeitpunkt erreicht hat; sie orientiert uns darüber, wie der Weg sich in diesem Momente ändert, wie sich der Vorgang in diesem bestimmten Augenblicke vollzieht.

II. Wärmestrahlung (Fig. 13)*. I und II seien zwei Wärmequellen, die den Abstand 10 voneinander besitzen. Normal

zur Geraden I II befände sich in S ein kleines, längs der Geraden verschiebbares Scheibchen. Hat dieses von I (II) die Entfernung l , so mag es von der Wärmequelle I (II) pro Sekunde 10 (80) Wärmeeinheiten empfangen. Man untersuche die Abhängigkeit der Wärmemenge y , die das Scheibchen von I und II erhält, von der Lage des Scheibchens.



Wir verwenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Als x-Achse benutzen wir die Gerade I II, positiv nach rechts, als y-Achse das Lot zu I II im Punkte I, positiv nach oben. Die Lage des Scheibchens ist bestimmt durch seine Abszisse x . Das physikalische Gesetz, das zur Anwendung kommt, besagt, dass die Wärmemenge, die das Scheibchen in der Sekunde empfängt, umgekehrt proportional ist dem Quadrat des Abstandes des Scheibchens von der Wärmequelle. Hat das Scheibchen von I den Abstand x , so ist sein Abstand von II gleich $(x - 10)$. Die Wärmemenge y_I (y_{II}), die S in dieser Lage von I (II) pro Sekunde erhält, ergibt sich aus der Proportion

$$y_I : 10 = 1^2 : x^2; \quad y_{II} : 80 = 1^2 : (x - 10)^2;$$

somit $y_I = \frac{10}{x^2}$ $y_{II} = \frac{80}{(x - 10)^2}$

Folglich ist die Gesamtwärmemenge y , die das Scheibchen pro Sekunde empfängt,

$$(14) \quad y = \frac{10}{x^2} + \frac{80}{(x - 10)^2}$$

* Vgl. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften. Leipzig, Veit & Comp.

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die Wärmemenge berechnen, die das Scheibchen in jeder Lage erhält ; dagegen können wir nicht entscheiden, wie sich die Wärmemenge an der betreffenden Stelle ändert, ob sie, wenn das Scheibchen z. B. von links nach rechts verschoben wird, beim Durchgang durch jene Stelle wächst, abnimmt und wie stark die Veränderung ist. An der Stelle $x = 4$ z. B. liefert Gleichung (14) die Wärmemenge 2,9, die in Fig. 13 durch die Ordinate $S P$ veranschaulicht ist. Für $x = 5$ ist die Wärmemenge 3,6, also grösser. Daraus kann man aber nicht schliessen, dass die Wärmemenge für $x = 4$ wächst, denn es könnte ja zwischen $x = 4$ und $x = 5$ die Funktion y ein Minimum besitzen.

Wie in den drei vorhergehenden Fällen ist auch hier der Differentialquotient der Funktion (14) das Mittel, mit welchem wir die Art der Veränderung der Funktion (14) an jeder beliebigen Stelle feststellen können. Durch eine ähnliche Rechnung, wie wir sie in den drei ersten Beispielen durchgeführt haben, ergibt sich als Differentialquotient der Funktion (14) die Funktion

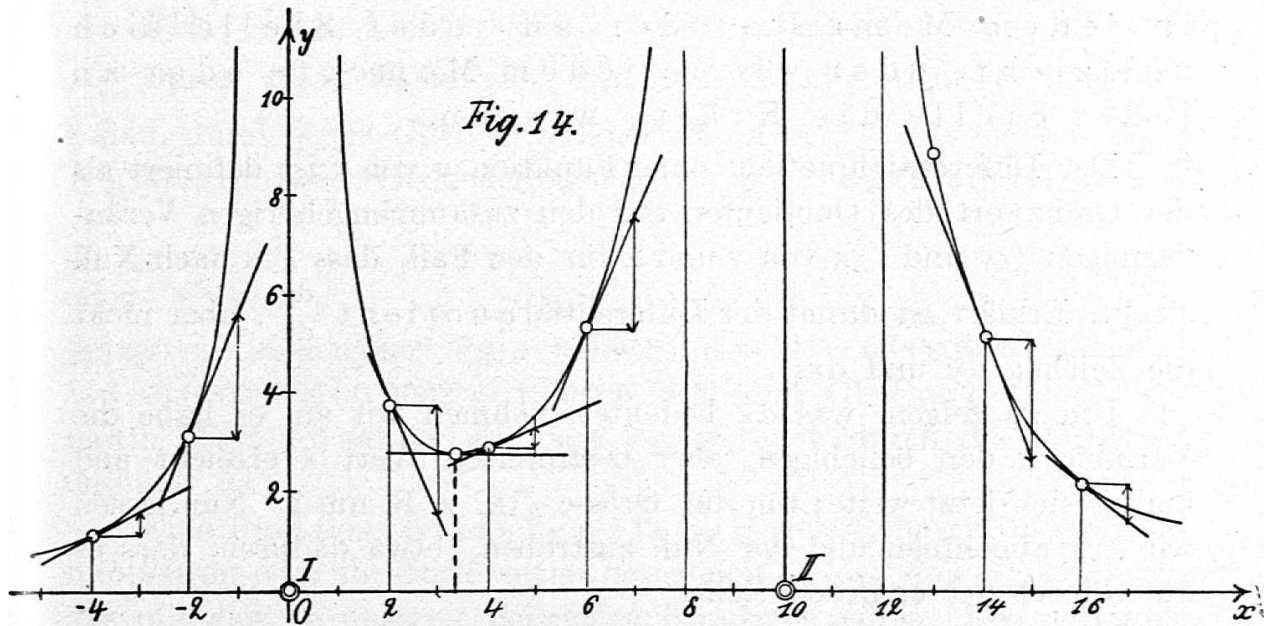
$$(15) \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{20}{x^3} - \frac{160}{(x-10)^3}.$$

Wie ändert sich nun die Wärmemenge beim Durchgang des Scheibchens durch die Stelle $x = 4$? Für $x = 4$ wird $\frac{dy}{dx} = 0,4$. Aus dem positiven Vorzeichen dieser Zahl folgt, dass die Wärmemenge bei einer Verschiebung des Scheibchens nach rechts an der Stelle $x = 4$ wächst. Mit Rücksicht auf den Wert, den y für $x = 9$ annimmt (80), muss das Wachsen als ein langsames bezeichnet werden ; denn bliebe die Zunahme von $x = 4$ an proportional der Zunahme von x , so ergäbe sich als Wert von y im Punkte $x = 9$ der Wert 4,9 statt 80. Wie die Figur 14 zeigt, ist die Steigung der Tangente an die Kurve in dem Punkte mit der Abszisse 4 in der Tat verhältnismässig klein.

Von besonderem Interesse ist die Frage, für welche Stelle zwischen I und II die Wärmemenge am kleinsten ist. Da die Wärmequelle II 8 mal stärker ist als I, muss die Stelle der minimalen Wärmemenge offenbar näher bei I als bei II liegen. Die Wärmemenge ist für denjenigen Wert von x am kleinsten, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, also für die Wurzeln der Gleichung

$$-\frac{20}{x^3} - \frac{160}{(x-10)^3} = 0.$$

Man findet leicht $x = 3\frac{1}{3}$ als Abszisse des Scheibchens, wenn es die kleinste Wärmemenge, nämlich 2,7 Einheiten pro Sekunde, erhält.



In dem entsprechenden Kurvenpunkte verläuft die Tangente waagrecht (Fig. 14).

Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, welches für verschiedene Lagen des Scheibchens die Wärmemenge ist, die es pro Sekunde von beiden Wärmequellen erhält und wie sich die Wärmemenge ändert, wenn das Scheibchen, von links nach rechts sich bewegend, durch jenen Punkt hindurchgeht. In Figur 14 endlich ist die Kurve, die den Verlauf der Funktion (14) veranschaulicht, nach den Angaben dieser Tabelle aus Punkten und Tangenten konstruiert worden. Wie früher, liefert auch hier die erste Kolonne die Abszisse, die zweite die Ordinate des Kurvenpunktes und die dritte die Tangente an die Kurve in diesem Punkte.

Die beiden Beispiele geben uns einen Begriff von der grossen Bedeutung der Differentialrechnung für die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme: Wird eine Erscheinung durch eine Gleichung in ihrem ganzen Verlaufe (genau oder angenähert) beschrieben, so besitzen wir in der Differentialrechnung ein Mittel, um zu erfahren, wie die Entwicklung

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	∞	∞
2	3,8	- 2,2
4	2,9	0,4
6	5,3	2,4
8	20,1	20,0
10	∞	∞
12	20,1	- 20
14	5,1	- 2,5
16	2,2	- 0,7
- 2	3,1	2,6
- 4	1,1	0,4

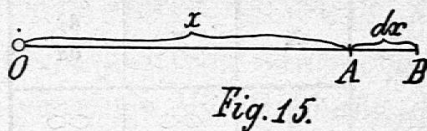
in jedem Momente oder an jeder Stelle sich vollzieht, oder wie in jedem Momente oder an jeder Stelle die Kräfte wirken.

Der Differentialquotient einer Funktion y von x ist definiert als der Grenzwert des Quotienten aus den zusammengehörigen Veränderungen Δy und Δx von y und x für den Fall, dass Δx nach Null strebt. Erklärt ist damit der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, aber nicht die Zeichen dy und dx .

Um zu zeigen, was dx bedeutet, nehmen wir an, es habe die Variable x den beliebigen, aber bestimmten Wert x erreicht und ändere sich jetzt weiter um die Grösse Δx , z. B. um 2. Nun lassen wir Δx abnehmen und der Null zustreben, etwa dadurch, dass es die Glieder der endlosen Reihe

$$(I) \quad 2; 0,2; 0,02; 0,002; 0,0002 \dots$$

durchläuft. Will man dieses Verhalten des Zuwachses Δx zum Ausdruck bringen, so schreibt man nicht Δx , sondern dx und nennt diese Grösse „das Differential von x “. Das Differential der veränderlichen Grösse x ist also ein nach Null strebender Zuwachs der Veränderlichen. dx wird durch (I) genau, durch jedes Glied von (I) angenähert dargestellt. Die Annäherung ist um so grösser, je weiter wir in (I) nach rechts gehen. Jetzt wird der Leser mit Ausdrücken wie „ dx ist eine



sehr kleine“ oder eine „unendlich kleine Grösse“ auch eine Vorstellung verbinden. In den Figuren (15) und (16) sind Differentiale gezeichnet, aber nicht diese selbst, sondern Näherungswerte.

Ist y eine stetige Funktion von x , und durchläuft Δx die Reihe I, so wird auch Δy eine gewisse Reihe durchlaufen. Für die Funktion (1) $y = \frac{1}{4}x^2$ z. B. ist die Reihe die folgende:

$$(II) \quad 4; 0,31; 0,0301; 0,003001; 0,00030001; \dots$$

(Sie wird mittelst Gleichung (3) gefunden.) Auch dy wird unendlich klein und ist durch die Reihe II genau, durch jedes Glied angenähert dargestellt. Wir werden in unsern Betrachtungen über die Integralrechnung sehen, dass es sich bei den Anwendungen der Integralrechnung in erster Linie immer darum handelt, zu dem Differential dx des Argumentes das entsprechende Differential dy der Funktion anzugeben (Seite 169).

Dividieren wir endlich II und I gliedweise durcheinander, so gewinnen wir die Reihe

(III) 2; 1,55; 1,505; 1,5005; 1,50005; ...

Durch diese Reihe wird der Differentialquotient y' oder $\frac{dy}{dx}$ genau, durch jedes Glied angenähert dargestellt. Für jedes Trippel von Näherungswerten der Grössen dx , dy und y' besteht die Gleichung

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

oder $dy = y' \cdot dx$.

Setzen wir angenähert $dx = 0,0002$, also $dy = 0,00030001$, so wird $y' = 0,00030001 : 0,0002 = 1,50005$, während Gleichung (5) als genauen Wert 1,5 ergibt, der, wie gesagt, auch durch die Reihe III definiert ist.

Eine Funktion differenzieren heisst, ihren Differentialquotienten oder ihr Differential berechnen. Nach einem Verfahren, das mit dem in unseren Beispielen benutzten völlig übereinstimmt, entwickelt die Differentialrechnung eine Reihe von Sätzen zur Bildung des Differentialquotienten von Funktionen. Die Handhabung dieser Regeln, d. h. das Differenzieren, ist überaus einfach. Wir geben einige Beispiele, die wir später verwenden werden, und bitten den Leser, die in den Gleichungen 16—19 enthaltenen Sätze in Worte zu fassen.

a)	Funktion y	b)	Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$	c)	Differential dy
(16)	x^n		nx^{n-1}		$nx^{n-1}dx$
(17)	ax^n		anx^{n-1}		$anx^{n-1}dx$
(18)	a		0		0
(19)	$x^n + x^m$		$nx^{n-1} + mx^{m-1}$		$nx^{n-1}dx + mx^{m-1}dx$

Seite 158 fanden wir als Differentialquotienten der Funktion $\frac{1}{4}x^2$ die Funktion $\frac{1}{2}x$. Die in Gleichung (17) enthaltene Regel liefert denselben Wert, nämlich $\frac{1}{4} \cdot 2x^1 = \frac{1}{2}x$.

* * *

Die Operation, durch die zu einem gegebenen Differentialquotienten oder Differential die ursprüngliche Funktion wieder gefunden werden kann, heisst **I n t e g r a t i o n**. Differenzieren und Integrieren sind also inverse Operationen, wie z. B. Addieren und Subtrahieren. Das Operationszeichen der Integration ist ein langgezogenes S, \int . Wir können nämlich, wie wir erläutern werden, das Integral als eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen

Größen auffassen (Summe, $S = \int$). Derselbe Gedanke liegt in der Stereometrie der Volumenberechnung mit dem Cavalierischen Prinzip zu Grunde.

Aus Gleichung (16 c) folgt

$$(16') \quad y = \int nx^{n-1}dx = x^n + C;$$

denn das Differential von $(x^n + C)$ ist nach 19, 16 und 18 $nx^{n-1}dx$. Die konstante Grösse C ist unbestimmt und heisst *I n t e g r a t i o n s - k o n s t a n t e*. Ebenso folgt aus (17) und (19)

$$(17') \quad \int anx^{n-1}dx = ax^n + C.$$

$$(19') \quad \int (nx^{n-1}dx + mx^{m-1}dx) = x^n + x^m + C.$$

Diese Formeln der Integralrechnung benutzen wir in den folgenden Beispielen, um die Bedeutung dieser Wissenschaft vor Augen zu führen.

1. Beispiel (Fig. 16a). Gegeben sei ein Kreis mit dem veränderlichen Radius x . Seine Fläche F ist eine Funktion von x . Nun setzen wir voraus, dass wir die Formel $F = \pi x^2$ nicht kennen und stellen uns die Aufgabe, den unbekanntem Zusammenhang zwischen F und x zu ermitteln.

Angenommen, der Radius habe wachsend die Grösse x erreicht. Lassen wir ihn von diesem beliebigen aber bestimmten Werte x aus um

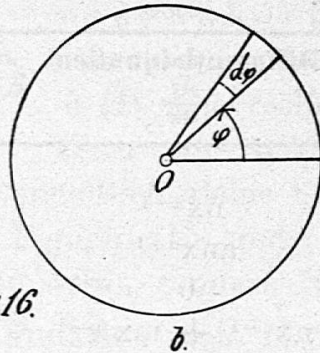
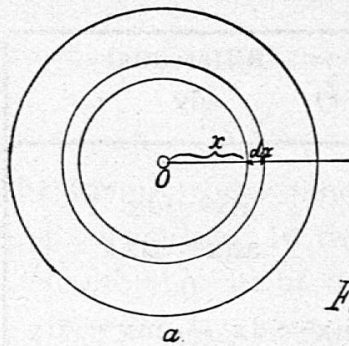


Fig. 16.

sein Differential dx weiter wachsen, so wächst die Funktion F um ihr Differential dF . Das Differential ist ein Kreisring mit den Radien x und $(x + dx)$, dessen Breite nach Null strebt.* Ist der Ring ausserordentlich

schmal geworden, so darf er als Rechteck mit der Grundlinie $2\pi x$ und der Höhe dx aufgefasst und berechnet werden. Damit finden wir als Differential der Kreisfläche

$$dF = 2\pi x \cdot dx,$$

und nach Formel (17¹) durch Integration

$$F = \int 2\pi x \cdot dx \quad \text{oder}$$

$$(20) \quad F = \pi x^2 + C.$$

Die unbekannte Konstante C wird in folgender Weise bestimmt. Die Gleichung (20) liefert F für jeden Wert von x . Für $x = 0$ ist offenbar $F = 0$. Setzen wir die Werte $x = 0$ und $F = 0$ in (20)

* In Fig. b ist ein anderer Weg zur Herleitung der Formel $F = \pi x^2$ angedeutet.

ein, so folgt $0 = \pi \cdot 0 + C$, also $C = 0$. Damit ist der funktionale Zusammenhang, der zwischen Kreisradius und Kreisfläche besteht, bestimmt; er ist gegeben durch die Gleichung $F = \pi x^2$.

An diesem Beispiele wollen wir noch zeigen, inwiefern das Integral als Summe aufgefasst werden kann.

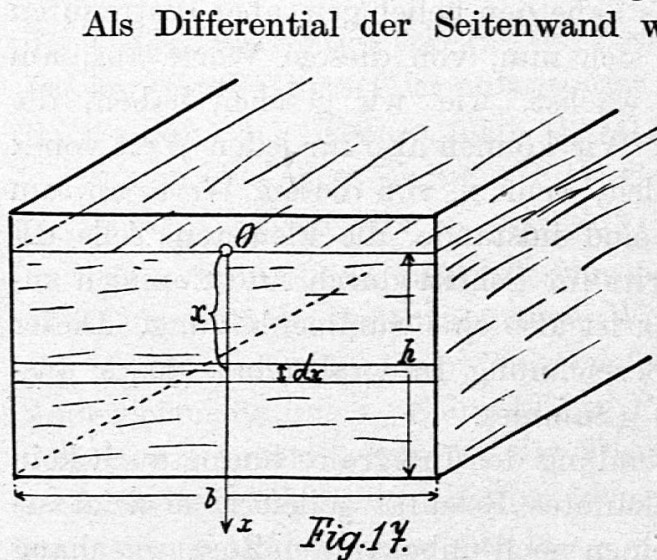
Angenommen, der Radius habe den beliebigen, aber bestimmten Wert x erreicht und ändere sich nun, von diesem Werte aus, um sein Differential dx . Dann wächst, wie wir gesehen haben, die Funktion um $dF = 2\pi x dx$. Wir können also für jeden Wert von x feststellen, um wieviel F wächst, wenn x , von diesem Werte an, um dx weiter wächst, oder wir sind imstande, die kleinsten Teile dF anzugeben, aus denen F Schritt für Schritt durch Addition sich zusammensetzt. Die Integration ist also eine Summenbildung. Dieser Auffassung entspricht die Bezeichnung Integral (ein Ganzes ausmachend) und das Zeichen \int (Summe).

Hat uns diese erste Anwendung der Integralrechnung auch kein neues, sondern ein längst bekanntes Resultat geliefert, so zeigt sie doch, wie wir mit ihrer Hilfe einen noch unbekanntem Zusammenhang zwischen Veränderlichen finden können.

Es sei ganz allgemein y eine unbekannte Funktion von x . Wir sind nicht imstande, zu jedem Wert von x den entsprechenden Wert von y anzugeben. In vielen Fällen dagegen gelingt es, für jeden Augenblickszustand (x, y) festzustellen, um wieviel y sich von da ab ändert, wenn x sich um dx , d. h. um eine sehr kleine und schliesslich um eine unendlich kleine Grösse weiter ändert, m. a. W. es gelingt, zum Differential dx der unabhängig Variablen das zugehörige Differential dy der Funktion anzugeben (siehe S. 166). Die Möglichkeit dieser Feststellung liegt in dem Umstande begründet, dass viele Naturerscheinungen einfachere Verhältnisse aufweisen, wenn man sich auf die Betrachtung sehr kleiner und schliesslich unendlich kleiner Veränderungen beschränkt, als wenn man den ganzen Verlauf der Erscheinung ins Auge fasst. Liegt nun für dy ein Ausdruck vor, so liefert Integration die Funktion y selbst, allerdings noch behaftet mit einer additiven unbekanntem Konstanten C . Die Bestimmung von C gelingt, wenn man zu einem Wert von x den entsprechenden Wert von y anzugeben vermag. Bei der Berechnung der Kreisfläche z. B. hat sich die Ermittlung von C darauf gestützt, dass für $x = 0$ auch $F = 0$ ist. Oder: Beim freien Fall ist bekannt, dass der Zeit $t = 0$ der Weg $s = 0$ entspricht. Man pflegt diese Daten als „Anfangsbedingungen“ zu bezeichnen.

Wir lassen zur Erläuterung des Gesagten noch ein Beispiel aus der Physik und ein Beispiel aus der Chemie folgen.

1. Bestimmung des Druckes P einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht γ auf eine rechteckförmige senkrechte Wand (b, h). Figur 17. Schleusentor.



Als Differential der Seitenwand wählen wir das sehr schmale Rechteck, dessen Mittelpunkt den Abstand x vom Flüssigkeitsspiegel hat. Es ist $dF = b \, dx$. Wir berechnen das Differential des Druckes, d. h. den Druck der Flüssigkeit auf dF . Nach einem hydrostatischen Gesetze ist dieser Druck gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule von der Grundfläche dF und der

Höhe x . Bezeichnen wir das Differential des Druckes P mit dP , so ist

$$dP = b \, dx \cdot x \cdot \gamma.$$

Integration gibt

$$P = \int b \gamma x \, dx = \frac{b \gamma x^2}{2} + C.$$

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, berücksichtigen wir, dass für $x = 0$ auch $P = 0$ ist. Damit wird $0 = 0 + C$, d. h. $C = 0$. Der Druck auf die ganze Wand ist also

$$P = \frac{b \gamma h^2}{2}.$$

Das Beispiel zeigt, wie mit Hilfe der Integralrechnung die Wirkungen der Kräfte auf die kleinsten Teile eines Körpers zur Gesamtwirkung auf den ganzen Körper summiert werden können.

2. Bei einer chemischen Reaktion mögen sich a gr eines ersten Stoffes mit β gr eines zweiten verbinden. Ursprünglich seien vom ersten Stoff a gr, vom zweiten b gr vorhanden. Nach t Sekunden sollen sich x gr der Verbindung gebildet haben. Dazu waren offenbar notwendig

$$\frac{a x}{a + \beta} \text{ gr des ersten und } \frac{\beta x}{a + \beta} \text{ gr des zweiten Stoffes.}$$

Somit sind t Sekunden nach Beginn der Reaktion noch vorhanden

$\left(a - \frac{\alpha x}{\alpha + \beta}\right)$ gr des ersten und $\left(b - \frac{\beta x}{\alpha + \beta}\right)$ gr des zweiten Stoffes.

Geht die Reaktion ohne wesentliche Wärmeentwicklung vor sich und bleiben die beiden Stoffe immer in Berührung miteinander, so darf man annehmen, dass die Menge dx , die im Zeitelement dt sich bildet, proportional ist sowohl zu den noch vorhandenen Stoffmengen wie auch zur Dauer des Zeitelementes dt . Nennen wir den Proportionalitätsfaktor μ , so ist

$$dx = \mu \left(a - \frac{\alpha x}{\alpha + \beta}\right) \left(b - \frac{\beta x}{\alpha + \beta}\right) dt.$$

Die Integralrechnung lehrt die Integration dieser Gleichung, d. h. sie zeigt, wie man aus der Wirkung der Kräfte in den kleinsten Zeiteilchen schliessen kann auf die Wirkung der Kräfte in jeder Zeitspanne.

Zum Schlusse fassen wir unsere Ausführungen in folgende Sätze zusammen:

Die Differential- und Integralrechnung oder die Infinitesimalrechnung ist die Lehre von den zusammengehörigen Veränderungen der Grössen. Für die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme ist die Infinitesimalrechnung von grösster Bedeutung und kann überall da zur Anwendung kommen, wo es sich um stetige Veränderungen der Grössen handelt. Die Differentialrechnung lehrt, wie man, bei Kenntnis des ganzen Verlaufes einer Erscheinung, schliessen kann auf die Wirkung der Kräfte an einer bestimmten Stelle (Beispiel: Wärmestrahlung) oder in einem bestimmten Momente (Beispiel: freier Fall); die Integralrechnung zeigt, wie die Wirkungen der Kräfte auf die kleinsten Teile eines Körpers (Beispiel: Schleusentor) oder die Wirkungen der Kräfte in kleinsten Zeiteilchen (Beispiel: Chemische Reaktion) zur Gesamtwirkung summiert werden können.

