Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 20 (1910)
Heft: 4

Artikel: Eine zürcherische Schulfrage
Autor: Bützberger, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-789092

Eine zürcherische Schulfrage.

Referat von Dr. F. Bützberger, Professor an der Kantonsschule Zürich, in der Versammlung des Schulkapitels Zürich in der Tonhalle am 15. Dezember 1909.

Die zürcherische Sekundarschule, die an das sechste Primarschuljahr anschliesst und drei Jahreskurse umfasst, will eine allgemeine Volksschule sein und vor allem auf das praktische Leben vorbereiten. Zugleich aber soll sie diejenigen Schüler, welche in die kantonale Handels- und Industrieschule übertreten, in den Stand setzen, die Aufnahmsprüfungen dieser Schulen bestehen und ihrem Unterrichte folgen zu können. Weil aber der Lehrplan der dritten Klasse der Sekudarschule in den mathematischen Fächern auf den Anschluss an die zweite Klasse der Industrieschule weder Rücksicht nimmt, noch nehmen kann, so ist der Übertritt aus der dritten Klasse der Sekundarschule in die zweite Klasse der Industrieschule mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Weder die Lehrer der Sekundarschulen, noch diejenigen der Industrieschule, können für dieselben verantwortlich gemacht werden; sie sind in der gesetzlich festgelegten Organisation der beiden Schulen begründet. Trotzdem haben diese Schwierigkeiten im Laufe der Jahre auf beiden Seiten eine gewisse, recht bedauerliche Verstimmung verursacht, die durch mancherlei Missverständnisse und durch die Verallgemeinerung von besondern Übelständen noch verschärft wurde. Es war daher sehr zu begrüssen, dass das Schulkapitel der Stadt Zürich eine gemeinsame Besprechung vorschlug, und es ist zu hoffen, dass sowohl die Hauptreferate vom 4. Dezember in der St. Johanniskirche, als auch unsere heutige Diskussion, dazu beitragen wird, jenes kollegialische Verhältnis und gegenseitige Vertrauen herzustellen, das zur Milderung der uns beidseitig belästigenden Übelstände so nötig ist.

Lassen Sie mich nun Ihnen aus meinen seit fast anderthalb Jahrzehnten besorgten Aufnahmeprüfungen einiges mitteilen, um damit unsere Wünsche und Vorschläge begründen zu können. Ich anerkenne gerne, dass ich dabei viel Gutes und Erfreuliches wahrgenommen habe. Gestatten Sie mir aber, heute insbesondere von den beobachteten Mängeln zu sprechen. Ich beschränke mich dabei auf das Typische, da ich wohl weiss, welches Unheil die Angst und Not einer Prüfung vor fremden Examinatoren in jungen Köpfen und Herzen stiften kann, und welche Enttäuschungen auch wir erfahren würden, wenn unsere Schüler die Maturitätsprüfung vor fremden Examinatoren bestehen müssten.

Wie Ihnen schon Hr. Prorektor Brandenberger mitgeteilt hat, sind wir im Rechnen mit den Aufnahmeprüfungen für die erste Klasse im allgemeinen zufrieden. Wenn etwa dreissig Schüler aus vielen, verschiedenen Schulen zu einer neuen Klasse zusammentreten, kann ja nicht alles klappen; aber durch eine gründliche Repetition gelingt es uns jeweilen bald, den Klassenwagen ins richtige Geleise zu bringen.

Zu einer kritischen Bemerkung veranlassen mich die Dreisatzrechnungen. Im mündlichen Rechnen wird nach dem Schluss auf „1" die Division sofort ausgeführt. Im schriftlichen Rechnen, wo man es meist mit grossen Zahlen zu tun hat, geht diese Division in der Regel nicht auf. Hier ist es ganz verfehlt, die Division sofort auszuführen, wie es leider so häufig geschieht; denn das Resultat wird entweder sehr ungenau oder erfordert zu viel Arbeit, und der grosse Vorteil des Verkürzens geht verloren. Ferner vermisste ich oft eine klare Auffassung der Frage, den sogen. Ansatz. Wenn der Wortlaut der Aufgabe nicht schon diesen Ansatz enthält, so halte ich ihn für sehr wünschenswert, gleichviel, ob man die Aufgabe mittelst eines Dreisatzes oder einer Proportion löse. Als zweckmässigste Darstellung des Dreisatzes halte ich die folgende:

$$\begin{array}{rl} 48\ m & —\ 156{,}8\ \text{Fr.} \\ 175\ „ & —\ \ ?\ \ „ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 48\ m & \\ 1\ „ & \dfrac{156{,}8\ .\ 175}{48}\ \text{Fr.} = 571{,}67\ \text{Fr.} \\ 175\ „ & \end{array}$$

Selbstverständlich muss man die Schüler diese Auflösung vollständig aussprechen lassen: 48 *m* kosten 156,8 Fr.; 1 *m* kostet den 48-sten Teil davon; 175 *m* kosten 175 mal so viel. Dass man dabei weniger schreiben muss, als bei der üblichen Darstellung, macht die Auflösung nicht schwerer, sondern leichter, da der Schüler seine Aufmerksamkeit besser aufs Denken und Sprechen konzentrieren kann, als wenn er sich dabei fast müde schreiben muss. Auch gewährt diese Darstellung hinreichend Platz zum Verkürzen.

Wie trefflich bereitet der obige Ansatz zugleich die Lösung der Aufgabe mittelst einer Proportion vor, wenn man dort das Fragezeichen durch x ersetzt! Ich würde aber in der zweiten Klasse solche bürgerliche Rechnungen nur mit Dreisatz, also nicht mit Proportionen lösen; besser das eine gründlich, als beides mangelhaft.[1]) Dass die Schüler auf dieser Stufe die Proportionen noch nicht recht verstehen, erkennt man schon daran, dass sie gewöhnlich ganz verschiedenartige Grössen, wie z. B. Meter und Franken, zueinander ins Verhältnis setzen. Es fehlt ihnen eben der Begriff von den voneinander abhängigen, veränderlichen Grössen und die Übung im funktionalen Denken. Wie schon der Name „geometrische Verhältnisse und Proportionen“ andeutet, werden diese am besten als unmittelbare Vorbereitung der Lehre von den ähnlichen Figuren behandelt, welch letztere ihr Verständnis durch geometrische Veranschaulichung so sehr erleichtert und fördert. Man sollte daher die Verhältnisse und Proportionen der dritten Klasse zuweisen und aus dem Lehrstoff der zweiten Klasse auch den „Begriff der Proportionalität“ streichen, da es zwecklos ist, einen Begriff einzuführen, ohne ihn gehörig zu brauchen. Auch mit der „Einführung in die Ähnlichkeit“ würde ich die zweite Klasse verschonen; denn es kommt dabei, wie unsere Aufnahmeprüfungen zeigen, doch nichts heraus. Der ganze übrige Lehrstoff der zweiten Klasse, sogar die Berechnung des Kreises, kann ohne Proportionen und Ähnlichkeit ebenso gut behandelt werden, als mit dem, was diese Schüler davon wissen. Dagegen sind die Elemente der allgemeinen Arithmetik und Algebra für das Verständnis der Quadratwurzeln, für die Anwendungen des pythagoräischen Lehrsatzes, für die Lehre von den Proportionen und der Ähnlichkeit, kurz für die berechnende und beweisende Geometrie überhaupt ganz unentbehrlich. Die Elemente der Algebra sollten daher schon in der zweiten Klasse behandelt werden. Ich bin überzeugt, dass durch diese Abänderung des Lehrplans der mathematische Unterricht unserer Sekundarschulen viel erfolgreicher würde. Wenn ich in unserer ersten Klasse in Arithmetik, Algebra und Geometrie zu unterrichten habe, so widme ich gerne und mit Vorteil meine Stunden abwechselnd hauptsächlich dem einen dieser drei Fächer, wobei ich stets darauf bedacht bin, in der allgemeinen Arithmetik und Algebra vorzuarbeiten, weil dadurch die Geometrie und auch das kaufmännische Rechnen sehr erleichtert wird.

Gegen die Anwendung der Proportionen auf gewisse Aufgabengruppen des kaufmännischen Rechnens in der dritten Sekundarklasse und in der Kantonsschule habe ich nichts einzuwenden. Es wird aber auch die Lehre

---

[1]) Man vergleiche die Besprechungen dieser und vieler anderer Unterrichtsfragen in den ersten Bänden von Hoffmanns Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, insbesondere in Bd. 5 u. 6 (S. 257—262).

von den ähnlichen Figuren erfahrungsgemäss für die Schüler viel leichtei verständlich, wenn man mit Brüchen, statt mit Verhältnissen arbeitet. Im Druck zieht man die Verhältnisse deshalb vor, weil sie bequemer sind, als der zweizeilige Bruch, der viel Platz erfordert und den Druck verunstaltet, und ich glaube, dass man zur Vermeidung dieses Übelstandes die Verhältnisse und Proportionen viel mehr braucht, als zweckmässig ist, und dass man aus demselben Grunde den von Hrn. Prorektor Brandenberger beanstandeten schiefen Bruchstrich eingeführt hat.

Um die Fertigkeit der Kandidaten im Bruchrechnen zu prüfen, haben wir wiederholt Aufgaben von folgender Art gestellt:

$$\frac{(8\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4} + 6\frac{2}{3}) \cdot 3\frac{4}{5}}{7\frac{5}{6}} = ?$$

Auf Ihren Wunsch haben wir schon letztes Jahr auf solche Aufgaben verzichtet und werden dies auch in Zukunft gerne tun. Als Sekundarlehrer würde ich aber das Bruchrechnen unbedingt mit solchen Aufgaben repetitionsweise einüben und befestigen. Es ist sehr wertvoll, die Schüler auch an die richtige Ausführung solcher Dauerleistungen zu gewöhnen. Man darf sich nicht nur auf Aufgaben beschränken, bei denen man sozusagen bloss einen Zoll weit richtig zu denken und zu arbeiten braucht.

Oft bemerkt man einen schädlichen Hang zum blossen Dezimalbruchrechnen. Ich weiss nun wohl, dass es Kaufleute und Techniker gibt, die uns zurufen: „Fort mit den gemeinen Brüchen; man arbeitet ja heutzutage nur noch mit Dezimalbrüchen!" Mir scheint aber, man könnte uns ebenso gut sagen: „Fort mit dem Denken; man arbeitet ja nur noch nach der Schablone!" Halten wir also die gemeinen Brüche in Ehren, und behandeln wir sie gründlich, bevor wir die Dezimalbrüche einführen. Bei der Berechnung des Kreises ist z. B. der Wert $\pi = 3\frac{1}{7}$ nicht nur genauer, sondern auch bequemer, als der Wert $\pi = 3{,}14$, und bei den Prozent- und Promillerechnungen wird man doch nicht die Viertel und Achtel oder gar die Drittel und Sechstel in Dezimalbrüche verwandeln.

Man sollte meinen, dass hier in Zürich unter dem direkten Einfluss des Polytechnikums die vorbereitenden Schulen besonders zweckmässig eingerichtet seien. Dass dies nicht der Fall ist, beweist schon die bedauerliche Tatsache, dass der schweizerische Schulrat mit unserer Industrieschule keinen Vertrag schliessen will und unser Maturitätszeugnis nur auf Zusehen hin anerkennt und zwar deshalb, weil wir keinen Unterbau haben. Die Schüler und Lehrer der Industrieschule leiden sehr unter diesem Mangel, der manche Beschwerde über zu grosse Anforderungen verursacht. Es gelingt uns auch nur, unser Lehrziel zu erreichen, wenn namentlich die Schüler der Stadt aus der zweiten Sekundarschulklasse in unsere erste Klasse eintreten. Die Erfüllung dieses Wunsches ist für unsere Schule geradezu eine Existenzbedingung, während sie von dem einzelnen Sekundarlehrer ein geringes Opfer fordert, für das ihm übrigens sowohl die Schüler, als auch wir sehr dankbar sind. Für intelligente Schüler vom Lande wird der Übertritt aus der dritten Sekundarschulklasse in unsere zweite Klasse durch Nachhülfskurse ermöglicht.

Wenn ein Vergleich mit auswärtigen Schulverhältnissen, z. B. mit den bernischen Sekundarschulen, gestattet ist, so sehen wir diese in Algebra und Geometrie weit mehr leisten, als die zürcherischen. Gewiss arbeiten die zürcherischen Sekundarlehrer ebenso gewissenhaft und fleissig, als die bernischen. Dass aber diese mehr erreichen, dass der originelle Sekundarschulinspektor Landolt mit Recht so stolz auf seine auch von ausländischen Schulmännern anerkannten Schulen sein durfte, das verdanken diese vor allem ihrer vortrefflichen Organisation. Im Kanton Bern erfolgt der Übertritt in die Sekundarschule schon nach dem vierten Schuljahr und zwar auf Grund einer ziemlich strengen Prüfung oder Probezeit. Die bernische Sekundarschule kann also ihr Lehrziel mit einer auserwählten Schülerschaft in fünfjährigem, ungebrochenem Unterricht verfolgen. Neben ihr bestehen grosse, blühende Primarschulen, deren Besuch keine Unehre ist. Manche derselben haben in den obern Klassen auch Französisch als Unterrichtsfach aufgenommen. Der Zudrang zu den bernischen Sekundarschulen ist auch deshalb geringer, weil sie nicht unentgeltlich sind; immerhin muss deswegen kein intelligenter, armer Schüler auf den Besuch verzichten, da durch Gewährung von Freistellen, Stipendien und Unterstützung von Sekundarschulvereinen für solche in zuvorkommender Weise gesorgt wird. Die Unentgeltlichkeit der zürcherischen Sekundarschulen ist eine schöne und gute soziale Einrichtung; aber sie wird vielfach missbraucht. Es ist ein verfehltes Ideal, alle Schüler durch dieselben Schulen hindurch pressen und schleppen zu wollen; darunter leiden sowohl die guten, als auch die schwachen Schüler; unsere Jugend wird verflacht und unser Volk in seiner Konkurrenzfähigkeit im internationalen Wettkampf geschädigt.

Schon die kleinern bernischen Sekundarschulen haben das Fachlehrersystem wenigstens in dem Umfang, wie es Hr. Prorektor Brandenberger für die zürcherischen Schulen vorgeschlagen hat. In den grössern Ortschaften, wie z. B. in Langenthal, haben die Sekundarschulen ein vollständig ausgebildetes Fachlehrersystem. Sie sind eigentliche Progymnasien und bereiten in vorzüglicher Weise auf die Mittelschulen vor, ohne dass die ins praktische Leben übertretenden Schüler irgend welchen Nachteil davon hätten; im Gegenteil, sie gewinnen nur dabei; denn sie lernen denken. Auch wird niemand beweisen können, dass die bernischen Sekundarschüler oder die Schüler unseres untern Gymnasiums schlechter erzogen seien, als die zürcherischen Sekundarschüler; denn dies ist, wie die Erfahrung lehrt, durchaus nicht der Fall. Und wenn man von „argen Verstössen gegen die Disziplin" reden will, so hat gerade in unserer Stadt das Klassenlehrersystem davon prozentual gewiss nicht weniger auf dem Kerbholz, als das Fachlehrersystem. Auf der Sekundarschulstufe ist es heutzutage einem Lehrer einfach unmöglich, in allen Fächern meisterhaft zu unterrichten. Die Erziehung hängt aber ganz wesentlich von der Arbeit des Lehrers und der Schüler ab. Warum sollte nun ein Klassenlehrer, der in manchen oder einzelnen Fächern begreiflicherweise nur ein Stümper ist, besser erziehen können, als mehrere tüchtige Fachlehrer?

Selbstverständlich muss auch beim Fachlehrersystem jede Klasse einen sogen. Klassenlehrer haben, der über ihr Betragen, ihre Strafen, Absenzen und Hausaufgaben besonders wacht, an dem sich seine Kollegen und die Schüler bei eintretenden Schwierigkeiten wenden können. Mit einem gut geführten Klassenbuch gelingt es dem Klassenlehrer oder der Schulaufsicht leicht, die Hausaufgaben auf ein richtiges Mass zu reduzieren und die Schüler vor Überanstrengung zu schützen. Das Fachlehrersystem mit seinem anregenden Wechsel ist auch viel kurzweiliger und interessanter als das Klassenlehrersystem. Und wenn einer der Fachlehrer ungeschickt oder nachlässig ist, so ist das lange nicht so schlimm, als wenn ein Klassenlehrer, auf den allein die Schüler zwei bis drei Jahre lang angewiesen sind, seiner Aufgabe nicht gewachsen ist. Trotz aller Vorzüge des Fachlehrersystems möchte ich es aber nicht gewaltsam und unvermittelt eingeführt wissen. Die ältern Lehrer, die nun einmal an das Klassenlehrersystem gewöhnt sind und es vorziehen, mögen ungestört dabei bleiben; aber für die jüngern Lehrer sollte bei ihrer Ausbildung und Anstellung das Fachlehrersystem ganz entschieden in Aussicht genommen werden. Eine Dreiteilung der Fächer in eine sprachlich-historische, eine mathematisch-naturwissenschaftliche und eine Kunstfächergruppe ist bei gutem Willen leicht einzuführen. Sie würde die wesentlichsten Mängel unseres Sekundarschulunterrichtes heben. Die Lehrer würden zum vornherein in ihrem Unterrichtsgebiet tüchtiger; sie würden sich auch viel eher und besser weiterbilden und vervollkommnen, als jetzt, wo sie in allen Fächern streben sollten; denn auch in der Lehrkunst gilt das Wort: „Wer rastet, der rostet!“

Wir kennen alle die vorzüglichen „Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra“ von Hrn. Dr. Gubler. In jeder guten bernischen Sekundarschule wird der Übungsstoff der zwei ersten Hefte nach den „Aufgaben von D. Ribi“ gründlich durchgearbeitet. In den zürcherischen Sekundarschulen lehnt man dies zum voraus als unmöglich ab. So lange aber die Algebra so wenig gepflegt wird, wie hier, kann auch von einem erfolgreichen Unterricht in der beweisenden und berechnenden Geometrie nicht die Rede sein. Die Aufnahmeprüfungen in Algebra und Geometrie für unsere erste Klasse haben mich in meinen Anforderungen so bescheiden gemacht, dass ich längere Zeit ganz darauf verzichtete und nur im Rechnen prüfte.

Gestatten Sie mir, Ihnen auch hier an einigen typischen Beispielen zu zeigen, was wir zu tadeln und zu wünschen haben. Da gedenke ich zunächst der Formel für die Kreisfläche $J = r^2 \pi$. Fast jeder Kandidat kannte diese Formel; aber fast keiner konnte sie begründen. Dazu ist eben ein wenig Algebra nötig; zudem erschweren die Lehrbücher den Beweis mittelst der Indizesbezeichnung der ungleichen Bogen in ganz unnötiger Weise. Teile man doch lieber den Kreisumfang u in n gleiche und so kleine Bogen b, dass jeder als gerade angesehen werden kann; alsdann ist $u = nb$. Verbindet man nun die Teilpunkte mit dem Mittelpunkt, so wird die Kreisfläche in n kongruente, gleichschenklige Dreiecke mit der Grundlinie b und der Höhe r zerlegt. Der Inhalt der Kreisfläche ist also:

$$J = n \cdot \frac{b\,r}{2} = \frac{nbr}{2} = \frac{ur}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Wir sind gewiss alle darin einig, dass das blosse Auswendiglernen von etwas Unverstandenem nichts nützt. Ob nun ein Schüler die Formel $J = r^2 \pi$ auswendig gelernt habe oder nicht, ist für sein späteres Fortkommen gleichgültig; denn wenn er einmal als Praktikus damit Geld verdienen kann, so wird er sich dieselbe sofort merken. Aber dankbar wird er der Schule sein, wenn sie ihm nicht nur den innern Grund dieser Formel geoffenbart, sondern ihn auch in den Stand gesetzt hat, daraus die praktisch viel wichtigere Formel $J = \frac{d^2 \pi}{4}$ oder gar noch die Formel $J = \frac{u^2}{4\pi}$ abzuleiten; denn in der Praxis kann man meist nur den Durchmesser und bisweilen auch nur den Umfang messen.

Ganz analog verhält es sich mit der berühmten Heronschen

F o r m e l für die Dreiecksfläche. Wenn ich z. B. die Aufgabe stelle, die Fläche eines Dreiecks aus seinen drei Seiten 8, 7 und 5 *m* zu berechnen, so werde ich oft mit der Formel von Heron überrascht, aber nie auch nur durch eine Andeutung ihres Beweises erfreut, noch weniger mit dem, was ich eigentlich erwarte. Wenn aber ein Kandidat die zur Seite 8 gehörige Höhe h zieht, die zwei dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke beachtet, die Stücke der Seite 8 mit x und $(8-x)$ bezeichnet und nun setzt:

$$h^2 = 7^2 - (8-x)^2 = 5^2 - x^2, \text{ woraus}$$
$$x = \frac{5}{2} \text{ und } h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

dann imponiert er mir, weil ich sehe, dass er den pythagoräischen Lehrsatz anwenden kann.

Man erkennt hieraus auch, wie viel leichter sich die Rechnung mit besondern, als mit allgemeinen Zahlen gestaltet, weil sich eben die gleichartigen Glieder auf Monome reduzieren lassen. Es ist überhaupt sehr zu empfehlen, solche Rechnungen immer zuerst mit einfachen Zahlenbeispielen durchzuführen, bevor man sie literal formuliert.

Die Perle der elementaren Geometrie ist der p y t h a g o r ä i s c h e L e h r s a t z, der sog. Magister Matheseos, der bei den alten Indern schon im 8. Jahrhundert v. Chr. nachweisbar ist. Wie oft haben wohl schon ehemalige Schulkameraden bei festlichen Anlässen seiner gedacht und versucht, ihn wieder zu beweisen! Dabei zeigen sich die nämlichen Schwierigkeiten, wie bei unsern Aufnahmeprüfungen, Schwierigkeiten, an denen auch unsere Lehrbücher schuld sind. Diese enthalten meist den Euklidschen Beweis, den S c h o p e n h a u e r mit Recht als „Mäusefallenbeweis“ verspottet hat, da er in ganz unnötiger und erkünstelter Weise die fraglichen Flächen zuerst halbiert und dann wieder verdoppelt. Man hat 46 verschiedene Beweise dieses Satzes gesammelt; welcher von denselben eignet sich am besten für den ersten Unterricht?

Zur Entscheidung dieser Frage muss man sich bewusst sein, dass die Geometrie nicht eine Zusammenstellung heterogener Kunststücke, sondern die natürliche und fruchtbare Entwicklung einiger weniger Grundgedanken sein soll. Alsdann wird man den pythagoräischen Lehrsatz nicht isoliert, sondern in Verbindung mit den zwei andern Flächensätzen lehren, mit denen er erst ein brauchbares Ganzes bildet.

Zu diesen drei Sätzen gelangt man am einfachsten und natürlichsten folgendermassen: Man errichte über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks A B C die Quadrate Q Q_1 Q_2 und ziehe C L $\perp$ A B, so wird das Hypotenusenquadrat Q in zwei Rechtecke R_1 und R_2 zerlegt. Es ist nun $Q_1 = R_1$ und $Q_2 = R_2$ (1. Flächensatz). Verlängert man nämlich D A, L K und J H, so entsteht das Parallelogramm A C U N $= P_1$ und es ist $Q_1 = P_1$. Da $\triangle$ A B C $\cong$ $\triangle$ A N J, so ist A N = A B = A D, also auch $R_1 = P_1$ und daher $Q_1 = R_1$. Ebenso wird gezeigt, dass $Q_2 = R_2$; somit ist $Q_1 + Q_2 = Q$ (2. Flächensatz). Errichtet man auch über den Seiten A K und C K Quadrate, und wendet den 2. Flächensatz auf das Dreieck A C K an, so erhält man:

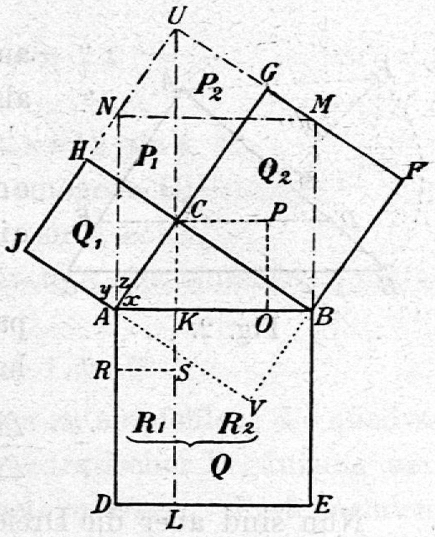

Fig. 1.

$$\begin{aligned} \text{Quadrat } CKOP &= \text{Quadrat } Q_1 - \text{Quadrat } AKSR \\ &= \text{Rechteck } R_1 - \text{Quadrat } AKSR \\ &= \text{Rechteck } DLSR = RD.RS \end{aligned}$$

Da aber R D = B K und R S = A K, so folgt hieraus:

$$CK^2 = AK.\,KB \text{ (3. Flächensatz).}$$

Obiger Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes ist rein geometrisch, erfordert keine neuen Hülfslinien und umfasst zugleich die Beweise der zwei andern Flächensätze. H. Thieme schreibt ihn in seinem Buch „Die Elemente der Geometrie“, das berufen ist, das gleichnamige vortreffliche Buch von R. Baltzer zu ersetzen, irrtümlicher Weise dem 1847 in Berlin verstorbenen A. Goepel zu, dessen Beweis im 4. Band von Grunerts Archiv vielmehr auf einer sehr interessanten Zerlegung inhaltsgleicher Dreiecke und Parallelogramme in kongruente Flächenstücke beruht. Unser Beweis ist anderthalb Jahrtausende älter; er ist ein Spezialfall des Satzes von Pappus, der die Summe zweier beliebiger Parallelogramme über zwei Seiten eines beliebigen Dreiecks in ein Parallelogramm über der dritten Seite verwandelt. Um so merkwürdiger ist es, dass er bis dahin in keines der vielen mir bekannten Schulbücher aufgenommen worden ist.

Zeichnet man das Quadrat A B M N und verlängert J A und F B bis zum Schnitt V, so erhält man jene Beweisfigur, zu welcher die Inder nur schrieben: „Schau!“ Subtrahiert man nämlich vom Quadrat U F V J entweder das Hypotenusenquadrat A B M N oder die Kathetenquadrate Q_1 und Q_2, so bleibt gleich viel Rest.

Schiesslich gestatten Sie mir noch, zwei von ihnen beanstandete Aufgaben zu lösen und dieselben damit zu rechtfertigen. Ich habe keine derselben gestellt und kann daher objektiv urteilen. Unter den Prüfungs-

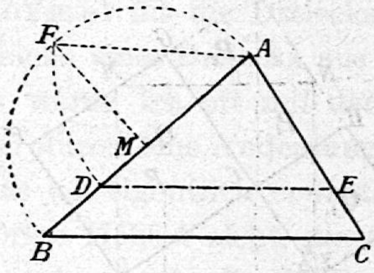

Fig. 2.

aufgaben für unsere zweite Klasse befand sich als letzte und schwerste folgende:

Man soll die Fläche eines Dreiecks A B C durch eine Parallele zu einer Seite halbieren.

Lösung: Man nehme an, die zu B C parallele Gerade D E, welche die Dreiecksfläche halbiert, sei gefunden, alsdann ist:

$$\frac{\triangle\ ABC}{\triangle\ ADE} = \frac{2}{1} \quad (1)$$

Nun sind aber die Dreiecke A B C und A D E ähnlich. Ihre Flächen verhalten sich also, wie die Quadrate zweier homologer Seiten. Setzt man daher $AB = c$ und $AD = x$, so ist auch:

$$\frac{\triangle\ ABC}{\triangle\ ADE} = \frac{c^2}{x^2} \quad (2)$$

Die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) sind gleich, also auch die rechten, woraus folgt:

$$\frac{2}{1} = \frac{c^2}{x^2} \text{ oder } 2\ x^2 = c^2 \text{ oder } x^2 + x^2 = c^2$$

Die Strecke x ist daher die Kathete eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit der gegebenen Hypotenuse c und wird mit dem Halbkreis über dem Durchmesser A B konstruiert, wie die Figur zeigt.

Sie erkennen daraus, dass alles, was zu dieser Lösung gebraucht wird, einfach, praktisch wichtig und im Lehrpensum der Sekundarschule enthalten ist. Mit dieser Aufgabe wurde also weder etwas zu Schweres, noch etwas Ungesetzliches verlangt und zwar um so weniger, da vor derselben noch eine genügende Anzahl leichtere Aufgaben zur Erwerbung der besten Note stand. Übrigens ist es nicht nur das gute Recht, sondern auch die Pflicht eines Examinators, neben eine hinreichende Anzahl leichterer Aufgaben auch eine schwierigere zu setzen, mit welcher er allfällige hervorragende Fähigkeiten wahrnehmen kann.

Auch die folgende schöne Prüfungsaufgabe des Seminars Küsnacht wurde beanstandet. Man berechne tg x aus:

$$3\ \sin^2 x + \cos 2x = 1\tfrac{5}{12}\ \sin 2x$$

Ich will an Stelle der besondern Koeffizienten, die so gewählt sind, dass die Rechnung rational aufgeht, allgemeine Koeffizienten setzen und Ihnen zeigen, wie leicht sogar die Lösung der allgemeinen Aufgabe ist, aus:

$$m \sin^2 x + \cos 2x = n \sin 2x$$

$\operatorname{tg} x$ zu berechnen. Setzt man nämlich:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ und } \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

so folgt die in bezug auf $\sin x$ und $\cos x$ homogene Gleichung:

$$(m - 1) \sin^2 x + \cos^2 x = 2 n \sin x \cos x$$

woraus man durch Division durch $\cos^2 x$ für $\operatorname{tg} x$ die einfache, quadratische Gleichung erhält:

$$(m - 1) . \operatorname{tg}^2 x - 2 n . \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Ich benutze diesen Anlass, um neuerdings zu empfehlen, die quadratischen Gleichungen zunächst nur mittelst quadratischer Ergänzung und nicht mit einer auswendig gelernten Formel zu lösen. Erst nachdem jeder Schüler die quadratische Ergänzung leicht und sicher ausführen kann, lässt man am besten zu der Grundform $ax^2 + bx + c = o$ die Auflösung:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

auswendig lernen. Sobald die Koeffizienten a, b, c grosse Zahlen oder Polynome sind, berechne man zuerst mit einem Koeffizientenschema die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$. Will man Sicherheit erlangen, so hüte man sich wohl, die Schüler mehr als eine Formel auswendig lernen zu lassen. Falls der Koeffizient von x den Faktor 2 hat, wie in unserem Beispiel, so denke man sich zuerst die Gleichung durch 2 dividiert, führe aber die Division nur beim mittlern Koeffizienten aus, wie folgendes Schema zeigt:

$$\begin{array}{c|c} a & \frac{m-1}{2} \\ b & -n \\ c & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \\ D = n^2 - (m - 1) \\ D = n^2 + 1 - m \end{array}$$

Es ist daher:

$$\operatorname{tg} x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 1 - m}}{m - 1}$$

Setzt man hierin $m = 3$ und $n = \frac{17}{12}$, so folgt:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{17}{12} \pm \sqrt{\frac{289}{144} - 2}}{2} = \frac{17 \pm 1}{24}$$

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{3}{4} \text{ und } \operatorname{tg} x_2 = \frac{2}{3}$$

Solch schöne und leichte Aufgaben sollte man nicht beanstanden. Ihr Hauptreferent hat mit anerkennenswerter Offenheit erklärt, dass er und seine nähern Kollegen die erste Aufgabe selbst nicht haben lösen können. Ich irre wohl nicht in der Annahme, dass sich noch mancher Klassenlehrer im geometrischen Unterricht in derselben unangenehmen Lage befindet und es daher vorzieht, auf das Lösen von Konstruktionsaufgaben möglichst zu verzichten. So begreiflich dies unter den gegenwärtigen Verhältnissen ist, so schlagend beweist es die Notwendigkeit der Einführung des Fachlehrersystems. Auch wird dadurch das Urteil Ihrer Herren Referenten über unsern Unterricht recht illusorisch. Wer von der Geometrie so wenig versteht, sollte jedenfalls in seinem Urteil über Andere vorsichtiger sein, als diejenigen, die behaupten: „Die Geometrie sei bei uns teilweise in eine Tüftelei ausgeartet; man suche umsonst nach einer ehrlichen Anwendung einer geometrischen Wahrheit. Die Konstruktion dominiere derart, dass die eigentliche Geometrie erdrückt werde.“ Wir beantworten diese Vorwürfe mit einer freundlichen Einladung zum Besuch unserer Unterrichtsstunden und zur Prüfung der von uns verfassten Lehrmittel; dann wird man zu einem andern Urteil gelangen. Wir opfern unter Hintansetzung unserer wissenschaftlichen Arbeit unsere Zeit und Kraft zu sehr der Schule, als dass es uns nicht gelingen sollte, unsern Unterricht zweckmässig zu gestalten. Und dass wir es nicht vergessen, uns mit den Schwierigkeiten des ersten geometrischen Unterrichtes abzufinden, dafür ist in unsern untern Klassen reichlich gesorgt. Wenn hier einzelne Schüler unserem Unterricht nur mit Mühe und angestrengtem Fleiss folgen können, so ist das nicht unsere Schuld; denn wir erhalten aus unserem untern und dem freien Gymnasium und auch aus einzelnen Sekundarschulen, welche die Algebra und Geometrie eifrig pflegen, stets eine grössere Anzahl gut vorbereiteter Schüler. Für diese ist unser Unterricht in der ersten Zeit eine blosse Wiederholung und wir müssen dafür sorgen, dass sie sich nicht zu sehr langweilen. In allen Klassen suchen wir durch angewandte Aufgaben aus dem praktischen Leben, der Physik, Geodäsie, Nautik, Astronomie usw. unsere Schüler von der Wichtigkeit der Mathematik zu überzeugen; aber das darf uns nicht hindern, unserem Lehrziel auch mittelst der näherliegenden und bis zu einem gewissen Grade unentbehrlichen theoretischen Aufgaben zuzustreben. Ein Mathematiklehrer, der nur angewandte, praktische Aufgaben behandeln wollte, würde sein Lehrziel gründlich verfehlen, was die Erfahrung schon wiederholt bestätigt hat. Auch die Behauptung, dass unser Lehrbuch der Geometrie von Spieker für uns zum Abgott geworden sei, ist unrichtig. Dass es kein schlechtes Buch is, beweisen schon seine vielen Auflagen und seine grosse Verbreitung. Aber wir wissen wohl, dass es im Text etwas veraltet und in den Aufgaben einseitig ist und suchen diese Mängel durch unsern Unterricht gut zu machen.

Wenden wir uns endlich zum geometrischen Zeichnen. Der Lehrplan schreibt mit Recht in den beiden untern Klassen in erster Linie geometrische Konstruktionen vor. Diese sind aber nicht immer „in kräftigen Linien", sondern bisweilen ganz oder teilweise in möglichst feinen Linien auszuführen. Ich halte es sogar für zweckmässig, die Schüler zunächst nur mit Bleistift und erst dann mit Tusch und Reissfeder zeichnen zu lassen, wenn sie saubere und genaue Bleistiftzeichnungen ausführen können. Eine recht schädliche Rolle spielt das Ornamentzeichnen, mit dem viel Zeit nutzlos verplempert wird. Dass es für die Anfänger zu schwierig ist, erkennt man schon an ihren vielen ungenauen und grellfarbenen Helgen. Schwache Schüler mögen am Nachahmen schöner, farbiger Zeichnungen ihre törrichte Freude haben; aber guten Schülern verleidet dieses gedankenlose Kopieren von Ornamenten recht bald, und auch der Lehrer muss sich dabei langweilen, ähnlich wie bei gewissen Partien der Buchhaltung, wenn man diese nicht möglichst kurz zu erledigen sucht. Zu dem Zwecke sollte die für die Hand des Schülers bestimmte Anleitung zur Rechnungs- und Buchführung von jeder Hauptart ein ganz ausgeführtes, kurzes Musterbeispiel enthalten, wie z. B. der obligatorische bernische Leitfaden für Rechnungs- und Buchführung von Ferdinand Jakob.

Als Übungsstoff im geometrischen Zeichnen der ersten Klasse eignen sich die planimetrischen Fundamentalkonstruktionen und ihre Anwendung auf rein geometrische und angewandte Aufgaben vorzüglich. Die Schüler haben grosse Freude daran, und sie lernen gerade wegen der Einfachheit der Figuren und der mannigfaltigen Proben besser und genauer zeichnen, als mittelst der Ornamente. Da sie übrigens gerne zeichnen und sich das Mechanische dieser Konstruktionen spielend aneignen, so kann man in diesen Zeichnungsstunden sehr viel zu einem tiefern Verständnis jener Konstruktionen beitragen und den Unterricht in der Geometrie in der wirksamsten Weise fördern. Wer im Bau- und Maschinenzeichnen oder im Vermessungswesen produktiv arbeitet, der erfährt, dass sich dabei die mannigfaltigsten geometrischen Aufgaben aufdrängen, die nur von demjenigen gelöst werden können, der sich in der Schule eine gewisse Übung angeeignet hat. Die scheinbar nur theoretische Schularbeit, die wir so sehr empfehlen, ist also zugleich von dem grössten praktischen Wert. Und wenn die Schüler einmal diese geometrischen Konstruktionen schön, genau und verständnisvoll ausführen können, dann ist für sie das Kopieren von Ornamenten u. dgl. ganz leicht und selbstverständlich.

Die „Ansichten“ oder Parallelprojektionen von Gegenständen, welche der Lehrplan schon für die erste Klasse vorschreibt, würde ich erst in der zweiten Klasse behandeln, wo sie in so natürlicher und notwendiger Weise mit dem Unterricht in der Stereometrie in Beziehung gesetzt werden können. Als Darstellungsmethode kann hier nur die von Holzmüller in seiner „Vorbereitenden Einführung in die Raumlehre“ und in seiner „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ skizzierte zur Anwendung kommen. Selbstverständlich muss man sich auf die Darstellung der stereometrischen Grundformen, ihrer einfachsten Kombinationen und Modelle beschränken, dagegen auch Ansichten einfacher, technischer Objekte ausführen. Auch im Planzeichnen würde ich Mass halten und in beiden obern Klassen nur einfache, aus dem planimetrischen Unterricht, oder einer eigenen kleinen Vermessung hervorgehende Pläne zeichnen. Das blosse Kopieren von noch so schönen Plänen scheint mir fast wertlos zu sein. Viel anregender und nützlicher wären in der dritten Klasse die vielen, aus der Lehre von der Ähnlichkeit folgenden wichtigen geometrischen Konstruktionen, ohne welche diese Lehre zu abstrakt und daher erfolglos bleibt.

Die „Darstellung von Gegenständen im Grundriss, Aufriss und Schnitten“ wird man in der Sekundarschule behandeln müssen, solange man diese Aufgabe nicht den Fortbildungsschulen übertragen kann; aber auch hier muss man Mass halten. Wenn man sich auf ganz einfache geometrische und technische Objekte in den bequemsten Stellungen zu den beiden Tafeln, auf Ansichten von oben und vornen und auf tafelparallele Schnitte beschränkt, so wird man auf das Verständnis und auf ein gewisses selbständiges Arbeiten der Schüler hoffen dürfen. Dagegen wird kein Sachverständiger glauben, dass unsere Sekundarschüler mit ihren bescheidenen geometrischen Kenntnissen die vielen Zeichnungen begreifen, die sie uns alljährlich über darstellend-geometrische Probleme, schiefe ebene Schnitte und Durchdringungen, Drehungen geometrischer und technischer Objekte ohne jede Angabe der Drehachsen, Transformationen, ganz raffinierte Parallelprojektionen, ja sogar Zentralprojektionen und Polarperspektiven vorweisen. Das sind lauter Dinge, die wir an der Industrieschule erst in den obern Klassen, und auch da nicht ohne Schwierigkeit behandeln können. Früher wurden in den Sekundarschulen unseres Landes nach farbenreichen und kunstvollen Vorlagen architektonische und Maschinen-Gemälde kopiert, um damit den Besuchern der Zeichnungsausstellungen imponieren zu können. Auch dieser Schwindel ist noch nicht ganz überwunden. Wir Lehrer sollen wissen, was unsern Schülern frommt, was sie leisten und verstehen können, und wir sollen auch den Mut haben, schädlichen Wünschen des Publikums entgegenzutreten. All dieses unverstandene Zeichnen, dieses blosse Kopieren, nützt nicht nur nichts, sondern es schadet; denn das Zeichnen ist kein blosser Zeitvertreib, keine Erholung; es strengt im Gegenteil sehr an und ermüdet, namentlich im Winter bei künstlicher und schlechter Beleuchtung.

Hochgeehrte Versammlung! Zwei grosse Dichter und Menschenkenner haben den Satz aufgestellt: „Die meisten Menschen hören da auf zu denken, wo das Denken anfängt schwierig und fruchtbar zu werden.“ Wir Lehrer haben hinreichend Gelegenheit, die Richtigkeit dieses Satzes schon an der Jugend zu erfahren, und wir betrachten es als unsere vornehmste Pflicht, unsern Schülern über diese Bequemlichkeit hinwegzuhelfen. Dazu eignet sich nun die beweisende, berechnende und konstruierende Geometrie ganz vorzüglich. Es bleibt der Sekundarschule auch gar nichts anderes übrig, als diese mit Ernst und Erfolg zu pflegen; denn die bloss propädeutische Geometrie, die elementare Formenlehre und die einfachsten Messungen und Berechnungen besorgt schon die Primarschule in befriedigender Weise. Jede Sekundarschule aber ist eine angemessene Pflege der Algebra und Geometrie schon ihrem Namen schuldig. Und die zürcherische Sekundarschule insbesondere schuldet eine Hebung und Verbesserung ihres algebraischen und geometrischen Unterrichtes auch dem Andenken unseres verehrten Meisters Pestalozzi, der mit seinen vortrefflichen Lehrern Schmid, Maurer, Leuzinger, Egli und Steiner gerade in dieser Richtung so vorbildlich und bahnbrechend gewirkt hat.

Aber der erste Unterricht in der beweisenden Geometrie ist recht schwierig, viel schwerer, als man gewöhnlich glaubt. Die Hauptschwierigkeit verursacht die Frage: Was soll und kann bewiesen werden und was nicht? Wenn irgendwo, so muss der Lehrer hier über dem Lehrbuch stehen. Er muss die Algebra und das geometrische Zeichnen in den Dienst der Geometrie ziehen und kann den Unterricht erst dann recht anziehend und fruchtbar gestalten, wenn er den Lehrstoff geistig so durchgearbeitet hat, als ob er ihn selbst hätte erfinden müssen. Dazu hat aber der Klassenlehrer, der alle oder fast alle Fächer unterrichten muss und oft gar keine besondern mathematischen Studien gemacht hat, weder Geschick, noch Zeit, noch Lust. Dazu bedarf es jener Befähigung und Begeisterung, welche nur dem Fachmann eigen sind, der nicht an der Quelle sitzen geblieben, sondern hinausgefahren ist auf den Strom der Wissenschaft, und der nun zu den Elementen zurückgekehrt, diese von einer höhern Warte aus beurteilen und lehren, und das Wesentliche vom Unwesentlichen unterscheiden kann.