

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 19 (1909)
Heft: 5

Artikel: Über den Aufbau der Geometrie
Autor: Grossmann, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-788962>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über den Aufbau der Geometrie.¹⁾

Von Prof. Dr. M. Grossmann, Zürich.

Zwei Erscheinungen drängen sich auf, wenn man die historische Entwicklung der exakten Wissenschaften überblickt: einmal der Einfluss der allgemeinen kulturellen Zustände auf die Forschung, dann aber eine gelegentliche Änderung der Richtung des Forschungstriebes, eine Verlegung des Schwerpunktes des Interesses von einer Epoche zur andern. Auf Perioden tatenreichen und fruchtbaren Entdeckens folgen Perioden der Sammlung und Sichtung des gewonnenen Materials und der kritischen Prüfung der Grundlagen. Die Abhängigkeit der einzelnen exakten Wissenschaften voneinander zeigt sich in einem mehr oder weniger deutlich ausgeprägten zeitlichen Parallelismus dieser Erscheinungen in ihrer Geschichte.

Auch die Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert lässt das Aufeinanderfolgen einer mehr schöpferischen und einer mehr kritischen Periode erkennen. Von bescheidenen Ansätzen ausgehend, sind in der ersteren durch Ausgestaltung der synthetischen und der analytischen Forschungsmethode ganze Wissensgebiete neu entstanden: die projektive und die darstellende Geometrie, die Theorie der geometrischen Verwandtschaften, die Lehre von den algebraischen Kurven und Flächen und den Anwendungen der Invarianten- und Gruppentheorie, die Differentialgeometrie usw.

Dieser Bereicherung der Geometrie, die in ihrer Geschichte beispiellos dasteht, folgte ihre Vertiefung. Das Ergebnis der kritischen Forschungen der letzten Jahrzehnte gewährt einen klaren Einblick in die Grundlagen der Geometrie und lässt eine Fülle von Zusammenhängen der geometrischen Sätze erkennen.

¹⁾ Dieser Aufsatz ist die Ausarbeitung eines Vortrages, den der Verfasser am 22. Mai 1909 vor der „Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen“ in Bern gehalten hat.

Die Anfänge der Kritik gehören allerdings nicht dem letzten Jahrhundert an, sondern lassen sich zurückverfolgen bis zu den ersten Kommentatoren des Euklid. Gegenstand der Kritik war in erster Linie das Parallelenaxiom des Euklid¹⁾. Der Inhalt dieses Postulates wurde zwar nicht angezweifelt, aber auch nicht als einleuchtend genug angesehen, um unbewiesen unter die Grundsätze aufgenommen zu werden. Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie, die im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts fast gleichzeitig und im wesentlichen unabhängig voneinander durch Bolyai, Lobatschefsky und Gauss erfolgte, liess die Erfolglosigkeit aller Beweisversuche begreifen. Es ergab sich, dass das euklidische Parallelenaxiom ersetzt werden könne durch ein anders lautendes, dessen logische Konsequenzen mit unserer Anschauung ebenso gut verträglich sind wie die Sätze der euklidischen Geometrie. Riemann erkannte später noch die Möglichkeit einer dritten Geometrie, die gleichberechtigt neben die zwei schon bekannten trat.

Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts war man also im Besitz von drei geometrischen Systemen, deren Sätze zwar verschieden lauten, aber mit unserer Erfahrung, der nur ein kleines Gebiet des Raumes zur Verfügung steht, trotzdem im Einklang bleiben.

So ist in den Geometrien von Lobatschefsky, von Euklid und von Riemann die Winkelsumme im ebenen Dreieck bzw. kleiner, gleich oder grösser als zwei Rechte. Die Ausmessung der Winkel eines Dreiecks gestattet keine Entscheidung zugunsten eines der drei Systeme; denn man kann beweisen, dass in den beiden nichteuklidischen Geometrien der Unterschied ε der Winkelsumme von zwei Rechten der Fläche F des Dreiecks proportional ist:

$$\varepsilon = \lambda \cdot F,$$

wo λ jedenfalls eine sehr kleine Zahl ist. Daher ist dieser Unterschied ε auch bei den grössten Dreiecken, die uns zur Verfügung stehen, noch so klein, dass keine Messung genau genug ist, um ihn erkennen zu lassen.²⁾

Nun haben die geometrischen Figuren aber auch Eigenschaften, die von der besonderen Form, die man dem Parallelenaxiom geben kann, unabhängig sind, d. h. es gibt geometrische Sätze, die in allen drei Systemen gleich lauten.

¹⁾ Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, so treffen sich die beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert.

²⁾ Als historische Einführung in die nichteuklidische Geometrie eignet sich Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie, Leipzig, B. G. Teubner, 1908 (Wissenschaft und Hypothese, Bd. IV).

Ausgehend von der euklidischen Elementargeometrie hatten nämlich Poncelet, Möbius, Steiner u. a. einen besonderen Zweig der Geometrie, die Geometrie der Lage, entwickelt; diese betrachtet die Verknüpfung von Punkten, Geraden und Ebenen zu Figuren und entwickelt Sätze, die nur wieder solche Verknüpfungen beurteilen, ohne dabei Massverhältnisse zu berücksichtigen. Metrische Begriffe, wie Entfernungen, Winkel, Flächen, Kreise usw. spielen in der reinen Geometrie der Lage keine Rolle. Die historische Entwicklung der Geometrie der Lage liess die Unabhängigkeit ihrer Sätze von metrischen Begriffen nicht erkennen, weil im Aufbau die Sätze der Planimetrie und der Trigonometrie ausgiebig verwendet wurden. Aber eine von der Elementargeometrie unabhängige Entwicklung der Geometrie der Lage ist möglich und wurde zum erstenmal von v. Staudt versucht,³⁾ ohne dass seine Deduktionen lückenlos, einwandfrei gewesen wären. Später hat Klein bemerkt, dass der v. Staudtsche Gedankengang auch das Parallelenaxiom nicht notwendig erfordere, und dass daher die Geometrie der Lage als gemeinsame Grundlage aller drei Geometrien müsse dienen können.

Ich will versuchen, an dieser Stelle einen wissenschaftlichen Aufbau der Geometrie zu skizzieren, der zuerst die Geometrie der Lage begründet, dann zur Einführung metrischer Begriffe schreitet, um schliesslich zu den drei möglichen geometrischen Systemen zu führen. Die Kürze der mir zur Verfügung stehenden Zeit gestattet keine ausführliche Beweisführung aller notwendig werdenden Sätze; doch wird es möglich sein, die einzelnen Axiomgruppen und ihre Tragweite anzugeben und so einen Einblick in das ganze System zu gewähren. Eingehender werde ich mich nur mit der wichtigen Frage der Einführung analytischer Methoden in die Geometrie befassen.

Die Punkte, Geraden und Ebenen sind die Bausteine der Geometrie. Eine einwandfreie Definition des Punktes und der Geraden ist nicht möglich. Es kann sich nur darum handeln, eine Erläuterung dieser Begriffe auf Grund der Erfahrung zu geben. Die erkenntnis-theoretische Unbrauchbarkeit der auch heute noch im Unterrichte gelegentlich versuchten Definitionen erhellt am besten aus dem Umstande, dass nirgends im Lehrgebäude auf den Inhalt der gegebenen Definition zurückgegriffen wird. Hätte der Schüler nicht eine durch ungezählte Beobachtungen befestigte Vorstellung vom Punkte und der Geraden, so könnte sie ihm auch durch keine Definition vermittelt werden. Die „mathematische Präzision“, die in vielen Lehrgängen von den ersten Begriffen an zu geben versucht

³⁾ G. K. Ch. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg, 1847.

wird, ist daher nur eine scheinbare und nur geeignet, Verwirrung zu stiften. Den Unterricht in der Elementargeometrie im Sinne derartiger Einwendungen einer erneuten Prüfung zu unterziehen, ist eine berechtigte Forderung. Das vor kurzem erschienene Werk von Thieme stellt einen wertvollen Versuch dar, den geometrischen Unterricht mit den Ergebnissen der kritischen Forschung in Einklang zu bringen.⁴⁾ Punkt und Gerade sind also als primitive Begriffe in die Geometrie einzuführen, und zum wissenschaftlichen Aufbau ist nur die Postulierung der Existenz von Dingen, die man Punkte und Geraden nennt, nötig. Dagegen kann die Ebene in bekannter Weise (durch den Projektionsprozess) aus Punkten und Geraden erzeugt werden. Die gegenseitigen Verknüpfungsmöglichkeiten der Punkte, Geraden und Ebenen sind zum Teil als Axiome zu postulieren, während sie sich zum andern Teil als Lehrsätze durch Deduktion ergeben.

Diese Verknüpfungssätze der Geometrie der Lage zeichnen sich aus durch ihre ausnahmslose Gültigkeit. (Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, haben immer einen gemeinsamen Punkt, zwei Ebenen immer eine gemeinsame Gerade usw.) Die Möglichkeit dieser ausnahmslosen Gültigkeit wurde von Pasch in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“, 1882, dargetan, dessen Theorie der uneigentlichen Elemente (Punkte, Gerade und Ebenen) die Ausnahmen beseitigte. Auch die euklidische Elementargeometrie hat sich ja der Einführung uneigentlicher (das bedeutet in diesem Falle unendlich ferner) Punkte, Geraden und Ebenen bedient, um nichtschneidenden Geraden einer Ebene, nichtschneidenden Ebenen usw. gemeinsame Elemente zuzuweisen, d. h. Ausnahmefälle der Verknüpfung zu beseitigen. Folgende Überlegung ist der Angelpunkt der Theorie der uneigentlichen Elemente. Es seien a und b zwei Geraden, die in einer Ebene liegen. Ist ein Schnittpunkt S beider bekannt oder nachweisbar, so geht die Schnittgerade c der Ebenen (P, a) und (P, b) , die ein ausserhalb der Ebene (a, b) liegender Punkt P mit den beiden Geraden bestimmt, durch den Schnittpunkt S . Ist Q ein zweiter Punkt ausserhalb der Ebene (a, b) und nicht in c gelegen, so geht auch die Schnittgerade d der Ebenen (Q, a) und (Q, b) durch S und a, b, c, d bilden die Strahlen eines Bündels, dessen Scheitel S ist. Haben dagegen a und b keinen nachweisbaren Schnittpunkt, so kann man trotzdem zeigen, dass die wie oben konstruierten Geraden c und d in einer Ebene liegen, d. h. dass die vier Geraden a, b, c, d so liegen, als ob sie einem Bündel angehören würden. Man wird daher sagen dürfen, vier derartige

⁴⁾ H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, Leipzig, B. G. Teubner, 1909.

Gerade bilden ein uneigentliches Bündel und diesem einen uneigentlichen Scheitel S zusprechen, der allen vier Geraden gemeinsam ist. Fortgesetzte Betrachtungen dieser Art führen zu den uneigentlichen Geraden und Ebenen und gestatten, alle Ausnahmefälle der Verknüpfung auszumergen.

Für den Aufbau der Geometrie der Lage ist diese Theorie der uneigentlichen Elemente übrigens gar nicht notwendig: man postuliert einfach die ausnahmslose Gültigkeit der Axiome der Verknüpfung und überlässt die Unterscheidung der eigentlichen und uneigentlichen Elemente den drei geometrischen Systemen, die späterhin aus der Geometrie der Lage hervorgehen.

Die folgenden Entwicklungen stützen sich lediglich auf die Axiome der Verknüpfung; es soll gezeigt werden, wie weit man mit diesen allein auskommt und insbesondere untersucht werden, ob eine Begründung der analytischen Geometrie mit ihrer alleinigen Hülfe möglich ist.

Von grundlegender Bedeutung für die Geometrie der Lage ist der Satz von Desargues über perspektivische Dreiecke.

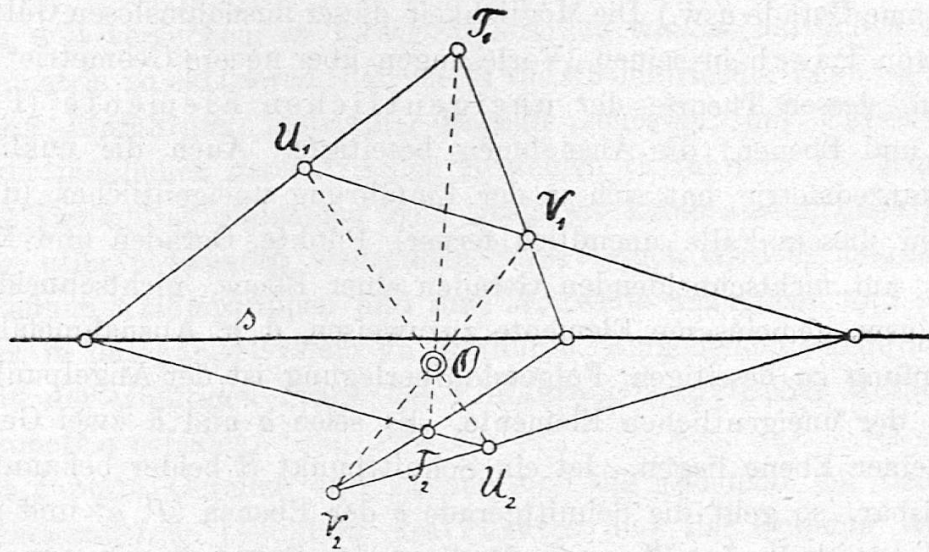


Fig. 1.

Wenn zwei Dreiecke $T_1 U_1 V_1$ und $T_2 U_2 V_2$, die in zwei verschiedenen oder in der gleichen Ebene liegen, so aufeinander bezogen sind, dass die Schnittpunkte entsprechender Seiten in derselben Geraden s liegen, so gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen und denselben Punkt O (Fig. 1).

Sind nämlich erstens die Ebenen der beiden Dreiecke voneinander verschieden, ist also s ihre Schnittgerade, so sind die Geraden $T_1 T_2$, $U_1 U_2$, $V_1 V_2$ die Schnittgeraden der drei Ebenen $T_1 U_1 T_2 U_2$, $U_1 V_1 U_2 V_2$,

$V_1 T_1 V_2 T_2$ und gehen also durch einen Punkt O . Auf diesen ersten Fall zurückführbar ist der zweite, bei welchem die Ebenen der beiden Dreiecke zusammenfallen. Ebenso einfach ist die Umkehrung des Satzes zu beweisen.

Es mögen nun sechs Punkte $A, B, C; D, E, F$, die von einer Geraden aus den Gegenseiten eines vollständigen Vierecks geschnitten werden, eine quadrangulare Gruppe genannt werden, was symbolisch mit $Q(A, B, C; D, E, F)$ bezeichnet sei (Fig. 2). Ist insbesondere $B = E$ und $C = F$, so heiße die Gruppe eine harmonische.⁵⁾

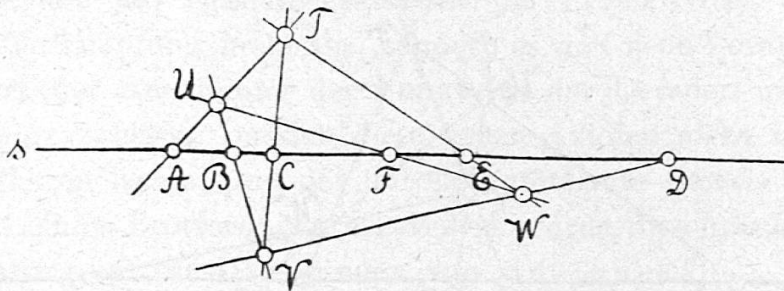


Fig. 2.

Aus dem Satz von Desargues folgt dann:

Sind in einer quadrangularen (insbes. harmonischen) Punktgruppe alle Punkte bis auf einen bestimmt, so ist es auch dieser eine.

Denn die beiden vollständigen Vierecke $T_1 U_1 V_1 W_1$ und $T_2 U_2 V_2 W_2$, die zur Konstruktion des letzten Punktes der Gruppe herangezogen werden (Fig. 3), sind perspektiv gelegen, weil sich fünf Paare entsprechender Seiten auf der Geraden s (dem Träger der quadrangularen Gruppe) schneiden. Zur Konstruktion des letzten Punktes einer quadrangularen Gruppe kann also irgendein vollständiges Viereck verwendet werden, von dem fünf Seiten in vorgeschriebener Weise durch die fünf gegebenen Punkte gehen; die sechste Seite bestimmt den fehlenden Punkt.

Projiziert man Fig. 2 von irgendeinem ausserhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte aus auf irgendeine andere Ebene, so erkennt man:

Die Projektion einer quadrangularen (insbes. harmonischen) Punktgruppe ist wieder eine quadrangulare (bzw. harmonische) Punktgruppe.

Die Geometrie der Lage beschäftigt sich mit denjenigen Eigenschaften der geometrischen Figuren, die beim Projektionsprozess erhalten bleiben.

⁵⁾ Ich entnehme diese Definition der inhaltsreichen Abhandlung: Veblen and Young, A Set of Assumptions for Projectiv Geometry, American Journal of Mathematics, Vol. XXX, 1908.

Punktreihen, die durch fortgesetzte Projektionen auseinander hervorgehen, sind von Poncelet projektive Punktreihen genannt worden. Aus der ausnahmslosen Gültigkeit der Verknüpfungssaxiome geht hervor, dass die Projektivität zweier Punktreihen eine umkehrbar-eindeutige Beziehung zwischen den beiden Punktreihen ist; doch darf man nicht jede umkehrbar-eindeutige Beziehung als Projektivität ansprechen, wie dies gelegentlich früher geschah. Diese Ponceletsche Definition der Projektivität eignet sich sehr wohl für die Herleitung der Geometrie der Lage aus der Elementargeometrie. Bekanntlich lässt sich leicht beweisen, dass vier

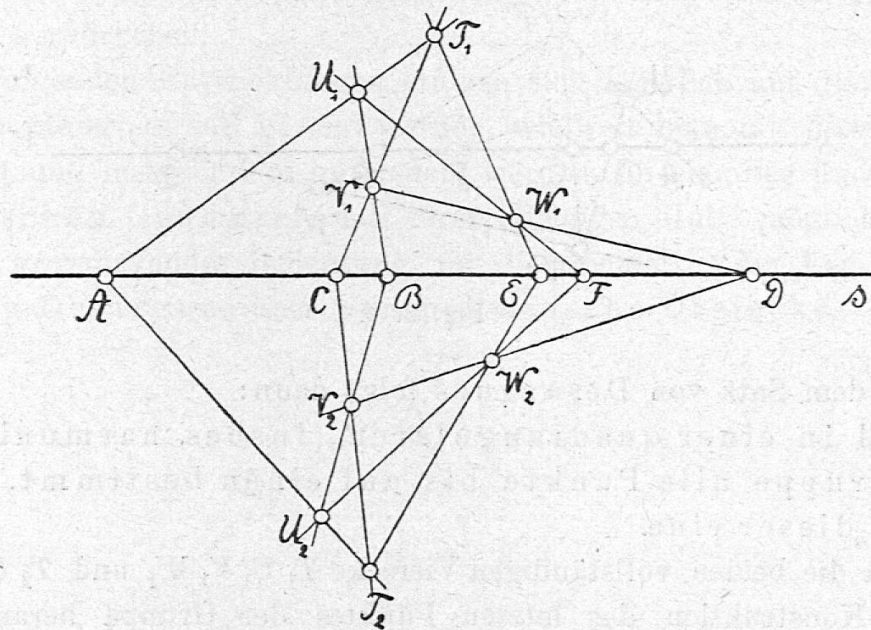


Fig. 3.

Punkte der einen Reihe das gleiche Doppelverhältnis haben wie die vier entsprechenden der andern. Daraus folgt dann weiter, dass die Projektivität zweier Punktreihen bestimmt ist durch drei Paare entsprechender Punkte und ergibt sich die bekannte Konstruktion weiterer Paare entsprechender Elemente. Verzichtet man dagegen auf die Elementargeometrie, so erweist sich die Ponceletsche Definition der Projektivität als wenig brauchbar (vgl. übrigens die Anm. 7 auf S. 9).

v. Staudt schlug daher eine andere, inhaltsreichere Definition vor. Da beim Projektionsprozess harmonische Gruppen erhalten bleiben, so entsteht die Frage, ob die Projektivität zweier Punktreihen definiert werden könne als eine derartige Beziehung der Punkte beider Reihen, bei der jeder harmonischen Gruppe der einen eine harmonische Gruppe der andern entspricht. v. Staudt versuchte in der Tat den Beweis des nach ihm benannten Fundamentalsatzes der Projektivität, wonach eine derartige Beziehung zweier Punktreihen durch drei

Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt ist, ohne allerdings, wie Weierstrass bemerkte, einwandfrei zum Ziel zu gelangen. Ausschlaggebend für den Beweis dieses Fundamentalsatzes ist der Nachweis, dass bei zwei projektiven Punktreihen, die auf ein und derselben Geraden liegen, und bei denen drei Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen, alle Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Hat also eine Projektivität in einer Geraden drei Doppelpunkte, so sind alle Punkte der Geraden Doppelpunkte, d. h. die Projektivität ist die Identität der beiden Punktreihen.

Zum Beweise des Fundamentalsatzes der Projektivität reichen die Axiome der Verknüpfung nicht aus, sondern es sind neue Voraussetzungen (über die Art der Anordnung der Punkte in der Geraden und über die Stetigkeit) hinzuzufügen. Da sich diese neuen Axiome nicht mit wenigen Worten einführen lassen, und der auf sie aufgebaute Beweis des Fundamentalsatzes einige Erörterungen erheischen würde, beschränke ich mich auf den Hinweis auf die Darlegungen von Enriques.⁶⁾

Aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie ergibt sich mit Leichtigkeit die Theorie der projektiven Verwandtschaften der Elementargebilde zweiter und dritter Stufe (der Kollineationen und Reziprozitäten) und damit der gesamte Untersuchungsapparat der projektiven Geometrie.

Interessant ist die Rolle, die der v. Staudtsche Fundamentalsatz bei der Einführung analytischer Methoden spielt. Um den Punkten einer Geraden Zahlen zuzuordnen, seien auf ihr drei voneinander verschiedene Punkte gewählt, denen die Zahlen 0, 1 und ∞ zugeordnet werden; die drei Punkte seien bezw. mit P_0 , P_1 und P_∞ bezeichnet. Hierauf möge eine Punkt-Algebra in der Geraden definiert sein durch die beiden folgenden Operationen:

Sind zwei Punkte P_x und P_y bekannt, denen die Zahlen x , bzw. y zugeordnet sind (vgl. hierüber die weiter unten gegebene Erläuterung der Figuren), so werde

1. der Punkt P_{x+y} bestimmt durch die quadrangulare Beziehung

$$Q(P_\infty, P_x, P_0; P_\infty, P_y, P_{x+y}),$$

was symbolisch durch

$$P_{x+y} = P_x + P_y$$

angedeutet sei;

⁶⁾ Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, deutsche Ausgabe von Fleischer, Leipzig, B. G. Teubner, 1903.

2. der Punkt P_{xy} bestimmt durch die quadrangulare Beziehung

$$Q(P_0, P_x, P_1; P_\infty, P_y, P_{xy}),$$

oder symbolisch

$$P_{xy} = P_x \cdot P_y.^7)$$

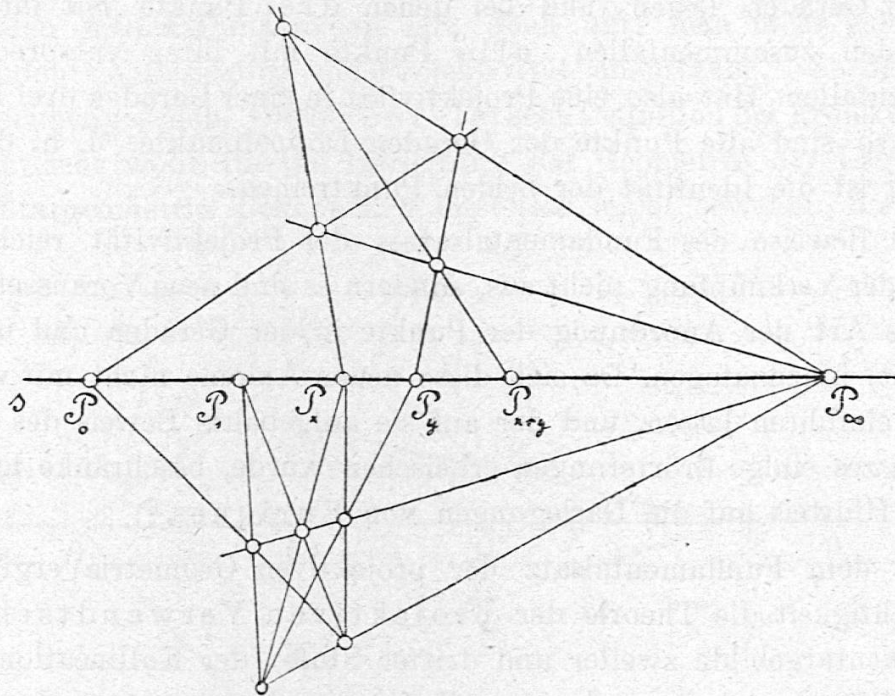


Fig. 4.

In Fig. 4 sei z. B. $x=2$, $y=3$. $P_x = P_2$ wurde im unteren Teil der Figur konstruiert aus der Beziehung

$$Q(P_\infty, P_1, P_0; P_\infty, P_1, P_2),$$

also als harmonisch zugeordnet zu P_0 bezüglich P_1 und P_∞ . Der Punkt $P_y = P_3$ wurde erhalten aus der Beziehung

$$Q(P_\infty, P_1, P_0; P_\infty, P_2, P_3).$$

Der obere Teil der Figur zeigt die Konstruktion von $P_{x+y} = P_5$ aus der Beziehung

$$Q(P_\infty, P_2, P_0; P_\infty, P_3, P_5).$$

Fig. 5 zeigt einen interessanten Spezialfall der konstruktiven Addition. In dieser Figur wurde P_∞ in den einen und einzigen unendlich-fernen Punkt der Geraden gelegt, dessen Existenz aus dem euklidischen Parallelenaxiom folgt. Man erkennt, dass die Konstruktion auf die Addition der Abszissen in einer gewöhnlichen Skala führt, dass also

⁷⁾ Veblen und Young, a. a. O. Da die beiden Autoren Poncelets Definition der Projektivität benützen, unterscheiden sich die folgenden Beweisführungen von ihren Entwicklungen.

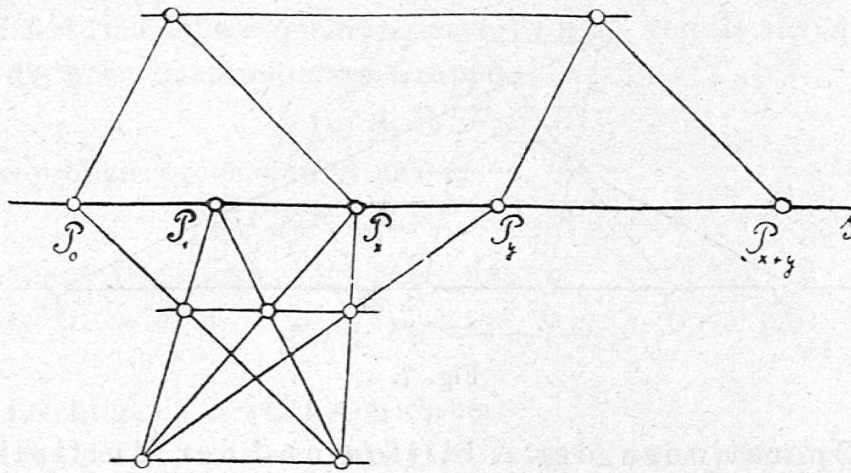


Fig. 5.

in diesem Spezialfalle die projektive Skala in der Geraden zur gewöhnlichen Skala wird. Im oberen Teil der Figur ist ausserdem die eine der beiden durch P_∞ gehenden Vierecksseiten als die unendlich-ferne Gerade der Ebene gewählt worden.

In Fig. 6 ist die Konstruktion von $P_{xy} = P_6$ aus $P_x = P_2$ und $P_y = P_3$ dargestellt.

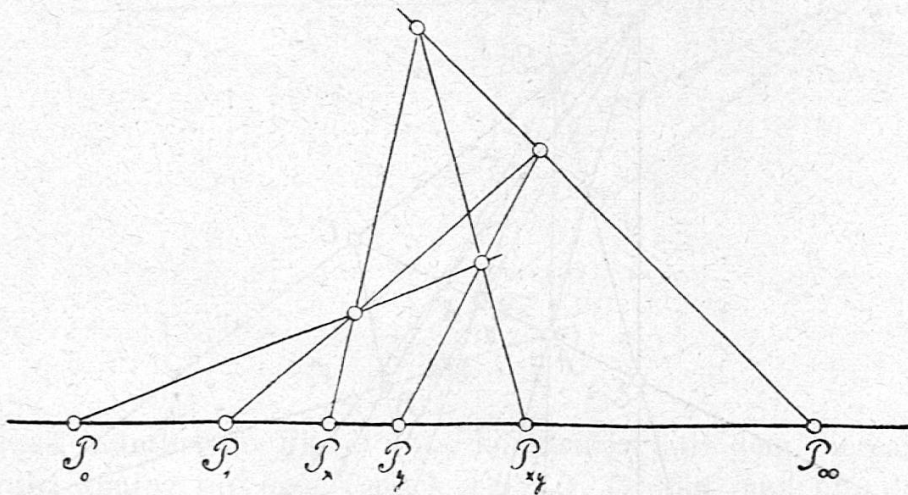


Fig. 6.

Fig. 7 enthält wieder den Spezialfall der gewöhnlichen Skala und zeigt an ihm die konstruktive Multiplikation. Diese Figur bietet auch elementar-geometrisches Interesse, wenn man die Proportionenlehre auf sie zur Beweisführung anwendet.

Welchen Gesetzen genügen nun die beiden Operationen?

Ist P_z ein Punkt der Geraden, dem die Zahl z zugeordnet wurde, so können die Konstruktionslinien leicht so angeordnet werden, dass man unmittelbar erkennt:

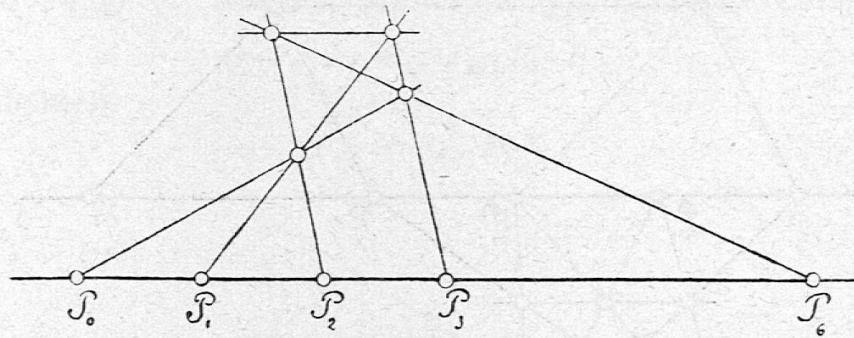


Fig. 7.

Die Operationen der Addition und der Multiplikation sind assoziativ, d. h. es ist

$$P_{x+y} + P_z = P_x + P_{y+z}$$

und

$$P_{xy} \cdot P_z = P_x \cdot P_{yz}.$$

Ferner zeigt Fig. 8 die Anordnung der Konstruktionslinien zum Beweise des distributiven Gesetzes

$$P_{xy} + P_{yz} = P_{x(y+z)}.$$

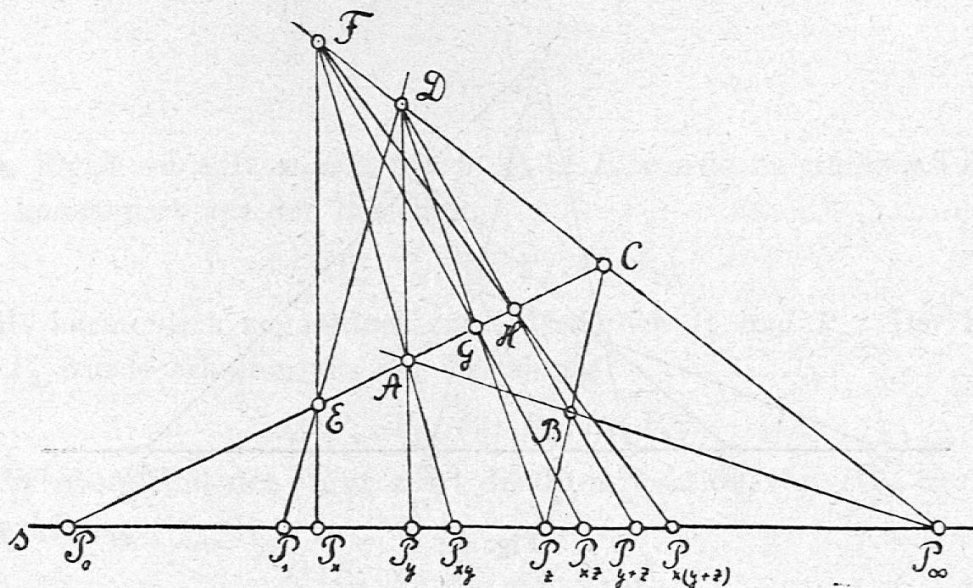


Fig. 8.

Sind nämlich P_x , P_y , P_z bekannt, so sei

P_{y+z} konstruiert mit dem Viereck $ABCD$,

P_{xy} " " " " " $ADFE$,

P_{xz} " " " " " $DFEG$,

endlich $P_{x(y+z)}$ aus P_x und P_{y+z} mit dem Viereck $DFEH$.

Definitionsgemäss besteht nun die Beziehung

$$Q(P_\infty, P_y, P_0; P_\infty, P_z, P_{y+z}).$$

Projiziert man diese quadrangulare Gruppe von D aus auf AC , so entsteht die neue quadrangulare Gruppe

$$Q(C, A, P_0; C, G, H).$$

Diese projiziert sich von F aus in

$$Q(P_\infty, P_{xy}, P_0; P_\infty, P_{xz}, P_{x(y+z)}).$$

Aus dieser Beziehung folgt aber, dass

$$P_{xy} + P_{xz} = P_{x(y+z)}$$

ist.

Mit Leichtigkeit beweist sich ferner:

Die Operation der Addition ist kommutativ, d. h. es ist

$$P_{x+y} = P_{y+x}.$$

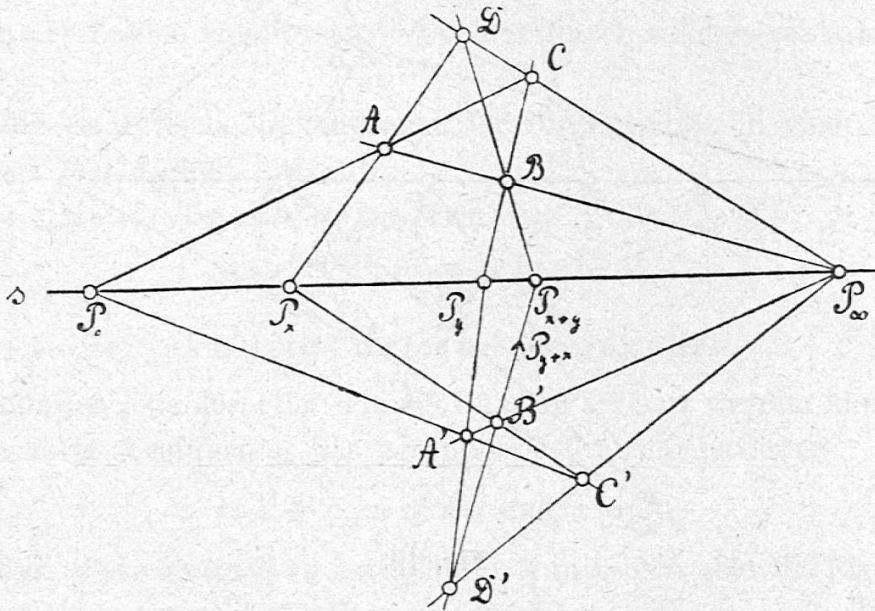


Fig. 9.

Es sei nämlich in Fig. 9 P_{x+y} konstruiert mit dem Viereck $ABCD$, P_{y+x} ganz analog mit dem Viereck $A'B'C'D'$. Ordnet man nun den Ecken $ABCD$ des ersten, bzw. die Ecken $C'D'A'B'$ des zweiten zu, so treffen sich fünf Paare entsprechender Seiten auf dem Träger s der projektiven Skala; die beiden Vierecke liegen also perspektiv, d. h. die sechsten Seiten BD und $D'B'$ treffen sich auch auf der Geraden s , oder P_{x+y} ist identisch mit P_{y+x} .

Damit ist aber alles erschöpft, was aus den Axiomen der Verknüpfung allein abgeleitet werden kann. Denn es gilt der Satz:

Die Operation der Multiplikation ist kommutativ oder nicht, je nachdem der Fundamentalsatz der Projektivität gilt oder nicht.

In Fig. 10 sei P_{xy} konstruiert mit dem Viereck $ABCD$, P_{yx} analog mit dem Viereck $A'B'C'D'$. Es ist nun nicht möglich, die Ecken der beiden Vierecke sich so entsprechen zu lassen, dass sich fünf Paare entsprechender Seiten in den fünf gegebenen Punkten $P_0, P_1, P_\infty, P_x, P_y$ treffen. Daher ist es auch nicht möglich, ohne weitere Hilfsmittel einzusehen, dass sich BD und $B'D'$ auf dem Träger s schneiden, d. h. dass P_{xy} und P_{yx} identisch sind. Worauf es beim Beweis dieser Identität ankommt, erhellt aus der folgenden Überlegung:

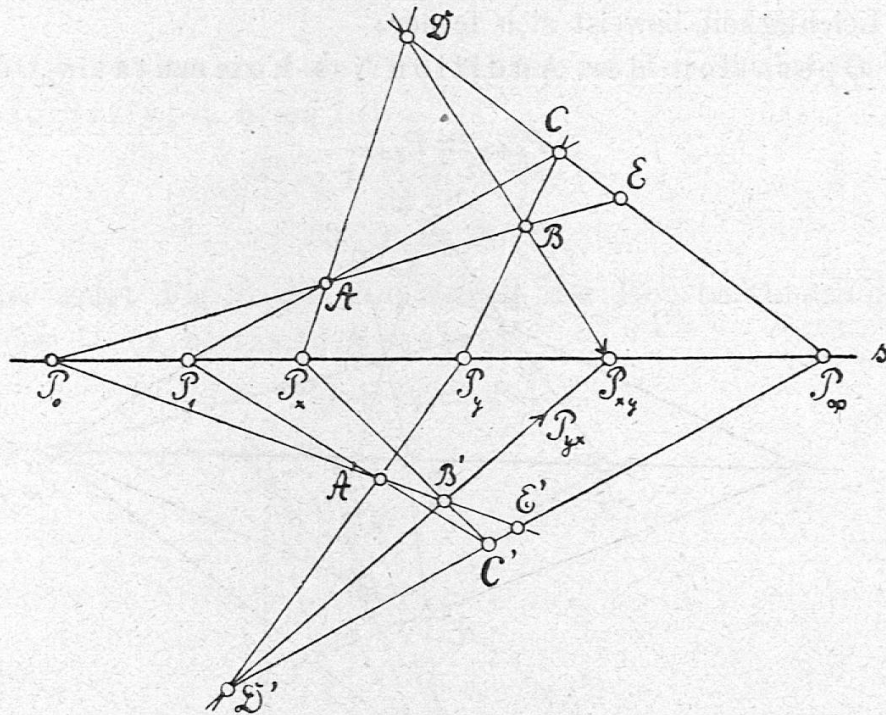


Fig. 10.

Es ist

$$P_\infty P_0 P_1 P_x \asymp P_\infty E C D,$$

weil die erste Gruppe von A aus in die zweite projiziert wird; ferner

$$P_\infty E C D \asymp P_\infty P_0 P_y P_{xy},$$

weil die erste Gruppe von B aus in die zweite projiziert erscheint. Also ist

$$1. P_\infty P_0 P_1 P_x \asymp P_\infty P_0 P_y P_{xy}.$$

Ebenso erhält man durch Projektionen von C' , bzw. von D' aus

$$P_\infty P_0 P_1 P_x \asymp E' P_0 A' B',$$

und

$$E' P_0 A' B' \asymp P_\infty P_0 P_y P_{yx},$$

oder also

$$2. P_\infty P_0 P_1 P_x \asymp P_\infty P_0 P_y P_{yx}.$$

Aus den Projektivitäten 1. und 2. folgt dann die neue

$$P_\infty P_0 P_y P_{xy} \asymp P_\infty P_0 P_y P_{yx}.$$

Gilt nun der Fundamentalsatz der Projektivität, so ist

$$P_{xy} \equiv P_{yx};$$

denn in diesem Falle besitzt eine Projektivität, die drei Doppelpunkte hat, nur Doppelpunkte.

Wie schon erwähnt, sind zum Beweise dieses Fundamentalsatzes die Axiome der Anordnung und der Stetigkeit erforderlich. Aus diesen Axiomen ergibt sich dann auch, dass zwei Punkte, denen durch unsere konstruktiven Operationen zwei verschiedene Zahlen zugeordnet wurden, nicht zusammenfallen können. Endlich bietet es keine Schwierigkeiten, auch die inversen Operationen der Subtraktion und der Division zu definieren und damit allen rationalen Zahlen Punkte der Geraden zuzuordnen. Zu den Punkten der Geraden, denen irrationale Zahlen zukommen, wird man durch sukzessive Annäherung gelangen.

Für die analytische Behandlung der Projektivität in einer Geraden ist nun von Wichtigkeit der Satz:

Jede lineare Transformation

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad (ad - bc \neq 0),$$

stellt eine Projektivität dar und umgekehrt.

Da nämlich jede derartige Transformation erzeugt werden kann durch die wiederholte Ausführung der besonderen Transformationen

$$x' = x + a, \quad x' = ax \quad \text{und} \quad x' = \frac{1}{x},$$

so genügt es, diese letztern zu betrachten. Nun zeigen aber die Fig. 11–13, dass man die entsprechenden zu vier Punkten x_1, x_2, x_3, x_4 in allen drei Fällen erhalten kann durch eine Kette von Projektionen. Die drei besonderen linearen Transformationen vermitteln also Beziehungen, bei denen harmonische Gruppen erhalten bleiben, das sind Projektivitäten. — Und da eine Projektivität durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt ist, so reichen die zur Verfügung stehenden Konstanten $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ eben aus zur analytischen Bestimmung der Projektivität.

Definiert man endlich als Doppelverhältnis von vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 die Funktion

$$\Delta = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}$$

der ihnen zugeordneten Zahlen, so ist damit eine Zahl eingeführt, die sich projektiven Transformationen gegenüber als invariant erweist, da sie ihren Wert bei linearen Transformationen von nicht verschwindender Determinante nicht ändert.

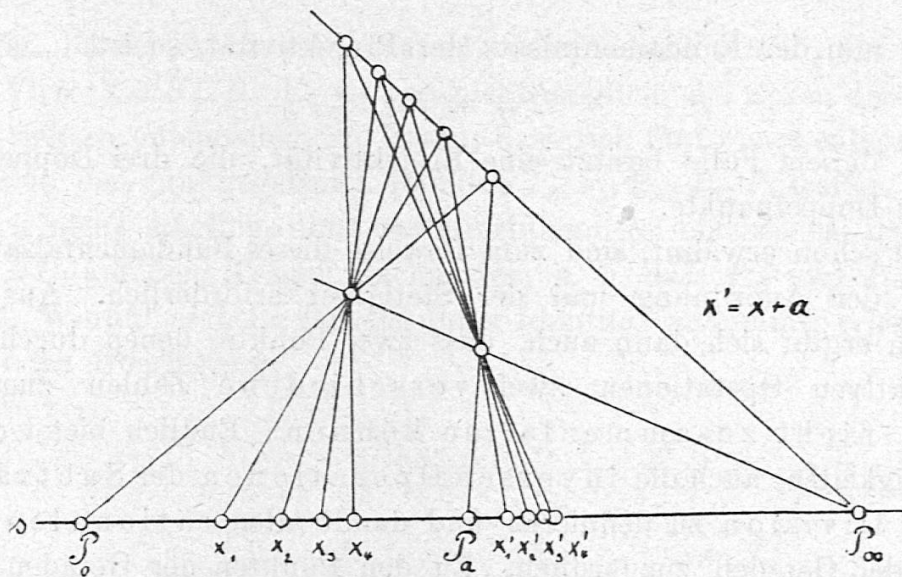


Fig. 11.

Eine ausführlichere Begründung der Geometrie des Masses auf Grund der eben entwickelten Geometrie der Lage überschreitet den Rahmen dieses Vortrages; ich muss mich beschränken auf die gedrängte Angabe des Grundgedankens.⁸⁾

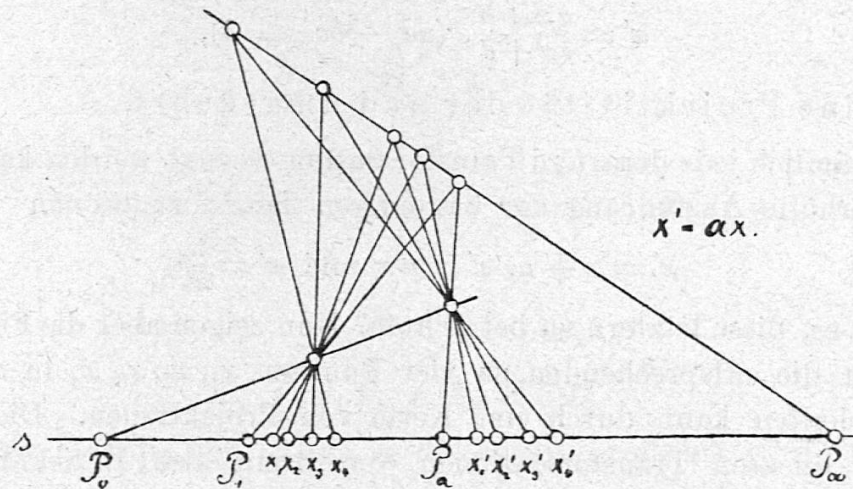


Fig. 12.

Man fügt zu den Begriffen und Axiomen der Geometrie der Lage den primitiven metrischen Begriff der Rechtwinkligkeit von Ebenen. Aus den fundamentalen Eigenschaften der Rechtwinkligkeit folgt, dass zwei zueinander senkrechte Ebenen als konjugiert in einem Polarsystem betrachtet werden können, dessen Ordnungsfläche — die sog. absolute Fläche zweiten Grades des Raumes — bei allen metrischen Eigenschaften der Figuren die ausschlaggebende Rolle spielt. Man kann näm-

⁸⁾ Man vergleiche über diese und andere Fragen den zusammenfassenden Artikel von F. Enriques, Prinzipien der Geometrie, in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“, Bd. III, A, B, 1.

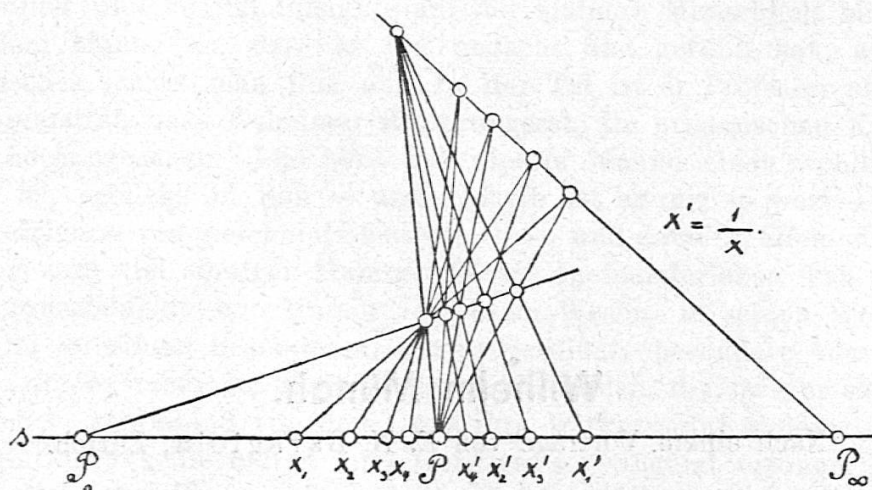


Fig. 13.

lich zeigen, dass die Bewegungen im Raum aufgefasst werden können als diejenigen projektiven Transformationen (Kollineationen), welche diese absolute Fläche in sich transformieren. Die Entfernung zweier Punkte ist dann zu definieren als eine solche Funktion ihrer Koordinaten, die sich bei den Bewegungen als Invariante erweist. Allgemeiner können die metrischen Eigenschaften einer Figur als ihre invarianten Beziehungen zur absoluten Fläche betrachtet werden.

Die drei möglichen geometrischen Systeme unterscheiden sich in der Art der absoluten Fläche.

Ist diese reell, so entsteht die Geometrie von Gauss-Bolyai-Lobatschewsky (die hyperbolische Geometrie von Klein). Jede Gerade hat zwei reelle unendlich-ferne Punkte, ihre Schnittpunkte mit der absoluten Fläche. Durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden gehen zwei „Parallelen“ zu ihr, nämlich seine Verbindungsgeraden mit ihren unendlich-fernen Punkten.

Ist die absolute Fläche imaginär, so entsteht die Geometrie von Riemann (genauer die elliptische Geometrie von Klein). Es gibt dann keine reellen unendlich-fernen Punkte im Raum und also auch keine parallelen Geraden.

Entartet dagegen die absolute Fläche, indem sie zu einer Ebene und einem in ihr liegenden imaginären Kegelschnitt wird, so liegt die Geometrie von Euklid (die parabolische Geometrie) vor. Die unendlich-ferne Ebene des Raumes und der in ihr liegende imaginäre Kreis bilden dann das absolute Gebilde. Jede Gerade hat einen unendlich-fernen Punkt, ihren Schnittpunkt, mit der unendlich-fernen Ebene. Daher gibt es zu einer Geraden durch jeden ausserhalb ihr gelegenen Punkt auch nur eine Parallele.