Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 17 (1907)
Heft: 4

Artikel: Aus der Praxis der darstellenden Geometrie an Mittelschulen
Autor: Egli, Karl
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-789287

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aus der Praxis der darstellenden Geometrie an Mittelschulen.

Von Karl Egli, Rektor der Höhern Töchterschule und des Lehrerinnenseminars der Stadt Luzern.

I.

Einleitung. Nachstehende Arbeit ist im wesentlichen der Inhalt eines Vortrages, den ich in der Versammlung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen am 9. Dezember 1905 zu Zürich gehalten habe. Dieser Vortrag war ein Plädoyer zu gunsten der Methode, die den darstellend-geometrischen Anfänger-Unterricht unter Zuhilfenahme einer einzigen Bildebene durchführt. Die Gebilde werden orthogonal projiziert; der isolierte Punkt ist gegeben durch sein Bild und seinen Tafelabstand (Kote), bezw. nach W. Fiedler, durch sein Bild und den diesem als Zentrum mit der Kote als Radius umgeschriebenen „Distanzkreis". Die Gerade ist gegeben durch ihre Spur (Durchstosspunkt mit der Tafel) und durch das Bild eines zweiten Punktes von gegebenem Tafelabstand, die Ebene ebenso durch ihre Spur und durch das Bild einer Spurparallelen, die einem gegebenen Tafelabstand entspricht. Wird dieser Tafelabstand für ein und dieselbe Figur einheitlich angenommen (Einheitskote), so vereinfacht dies die Konstruktionen nicht unwesentlich. Es ist diese Annahme daher den später folgenden Betrachtungen zu grunde gelegt und in den Figuren durchgeführt. Für manche Konstruktion kommt das Datum einer bestimmten Einheitskote erst im Falle der Modellanfertigung zur Verwendung.

In der Diskussion wurde darauf aufmerksam gemacht (von Hrn. Dr. Gerlach), dass Professor W. Fiedler über den gleichen Gegenstand in der Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft der Stadt Zürich einen Artikel publiziert habe. Bekannt war mir seit kurzem, dass Hr. Direktor Emil Bitterli, Oerlikon-Zürich, in seiner Diplomarbeit 1883 ebenfalls etwas Derartiges behandelte. Diese Arbeit, die mir seither (ohne Tabellarium) zur Verfügung gestellt worden ist, deutet im Literaturnachweise ebenfalls auf die erwähnte Publikation Fiedlers

hin: sie findet sich im 24. Jahrgange (1879) der genannten Zeitschrift als Nr. IV der „geometrischen Mitteilungen“ und betitelt sich: Neue elementare Projektionsmethoden?“ Professor Fiedler verallgemeinert zuerst die Methode der Zentralprojektion durch Einführung einer sog. „Fixebene“ im Endlichen, an Stelle der ∞ fernen Ebene des Raumes (Gerade und Ebene werden eindeutig bestimmt durch ihre Spurelemente in der Tafel und die Projektion ihrer Schnittelemente mit der Fixebene), die gegen die Tafel die Neigung ω hat, spezialisiert sie dann, durch Verlegung des Zentrums ins Unendliche, zunächst zur allgemeinen Parallelprojektion und lässt dann aus dieser, abermals als besondern Fall, die orthogonale Parallelprojektion hervorgehen, so eine elementare Methode schaffend, bei der zur eindeutigen Bestimmung der räumlichen Gebilde eine Tafel genügt. Bezüglich der Stellung der Fixebene hebt Fiedler, ohne sie für das ganze übliche Gebiet der elementaren Probleme durchzuführen, zwei ausgezeichnete Fälle hervor: *a)* den Fall, wo $\omega = 45^0$*), und *b)* den Fall, wo $\omega = 0^0$, d. h. wo die Fixebene parallel zur Tafel ist.**) Dieser letztgenannte Spezialfall deckt sich augenscheinlich mit der von mir empfohlenen Methode, für die ich also die Priorität nicht beanspruchen kann. Dafür erwächst meinen Argumentationen aus der Autorität dieses bedeutenden Mannes eine wertvolle Stütze. Sehr wichtig ist mir namentlich eine Äusserung desselben; Fiedler sagt pag. 217 l. c.:

„Ich denke, dass ich mir weiteres Eingehen in diese sehr einfachen Entwicklungen sparen darf. Es ist offenbar, dass die Bestimmung wahrer Grössen und die Benutzung metrischer Relationen nicht komplizierter ist als in der „Géométrie descriptive“, während durch den Gebrauch einer einzigen Projektion der Aufwand von Linien für die Ausführung irgendwelcher Probleme sich in gleicher Weise reduziert, wie beim Gebrauch der Zentralprojektion. Die Einführung einer zweiten festen Ebene***) ist hier eben nicht wie im Falle der Zentralprojektion ein entbehrlicher Überfluss, sondern eine die Bestimmung der Raum-

) Diesem Falle widmet übrigens Fiedler in der dritten Auflage seiner darstellenden Geometrie, wie ich inzwischen noch bemerkt habe, einen eigenen Paragraph: 54

**) In der Diplomarbeit des Hrn. Bitterli finden sich in eingehender Durchführung die allgemeine Zentralprojektion mit einer Fixebene im Endlichen für $90^0 > \omega > 0^0$, ferner die orthogonale Parallelprojektion mit: *a)* einer unter 45^0 geneigten, und *b)* einer zur Tafel parallelen Fixebene. Doch sind für den letztern Fall nur die ganz ersten Elementaraufgaben gelöst.

***) gemeint ist die Fixebene, nicht etwa eine zweite Bildebene. D. V.

elemente durch eine Parallelprojektion erst sichernde Notwendigkeit; die Methoden *a)* und *b)* sind nicht nur richtig gebildet, sondern auch im Einklang mit dem allgemeinen Grundgesetz der Sparsamkeit in der Anwendung von Hilfsmitteln, welches alle Theorie wie namentlich alle Praxis regieren soll. Ich glaube deshalb diese einfachen Neuerungen der Beachtung der Sachverständigen empfehlen zu dürfen, nachdem ich sie selbst seit Jahren geprüft habe."

* * *

Nach diesen einleitenden Bemerkungen nehme ich den Faden meines Vortrages auf.

II.

Als ich vor beiläufig sieben Jahren dazu kam, an der realistischen Abteilung unserer Kantonsschule das Fach der darstellenden Geometrie zu lehren, fand ich immer noch wie zur Zeit meiner eigenen Schülerjahre die Methode von Monge mit zwei, bezw. drei Bildebenen, als allein herrschende und von der ersten Stunde an verwendete vor. Auch die Lehrbücher und fremden Lehrpläne, die ich zunächst zu Rate zog, standen auf dem gleichen Boden.*) Sehr bald aber drängte sich mir der Gedanke auf, dass wohl doch die Verwendung einer einzigen Bildebene für den Anfängerunterricht das Natürlichere sei; der Begriff der Projektion, die Vorgänge der Umlegung und Umklappung zur Bestimmung von Neigungswinkeln und wahren Grössen, die Aufgaben zur Bestimmung von Durchstosspunkten und Schnittlinien, die Legung von Normalelementen — schien mir — liessen sich doch leichter und ungestörter erörtern, wenn der Schüler, statt mehreren, nur einer einzigen Tafel gegenübersteht, wenn Zeichenblatt und Tafel von vornherein identisch sind und nicht durch eine 90 ^{0}-Drehung der letztern, z. B. als Grundrissebene, erst identisch gemacht werden müssen; die Einführung einer zweiten und dritten Tafel sei Sache eines vorgerücktern Unterrichts. Tatsächlich zeigen die Projektionen auf weiteren Tafeln für eine grosse Zahl von Aufgaben nicht wesentlich etwas anderes oder Neues, als was aus dem Bilde der ersten ersichtlich ist. Die zweite Tafel der Géométrie descriptive sichert da lediglich die Eindeutigkeit der Daten und hat zunächst kaum einen weiteren Zweck. Kann diese Eindeutigkeit durch andere elementare und gleichzeitig natürliche, d. h. sachentsprechende,

*) Ein 1906 bei Helbing und Lichtenhahn erschienenes, spez. für die Basler Kantonsschule berechnetes Lehrmittel von Dr. Marcell Grossmann macht eine rühmliche Ausnahme, indem es einleitend der Projektion mit einer Tafel ein Kapitel widmet.

Mittel gewonnen werden, so ist der Vorteil der Methode mit einer Tafel evident. Diese Mittel aber bestehen m. E. in der Benützung der Kote, bezw. der Einheitskote, im Sinne der eingangs eröffneten Darlegung, m. a. W., in der Benützung der tafelparallelen Fixebene im Sinne des Vorschlages von Prof. W. Fiedler. Die praktisch so bedeutungsvolle, in den Schulen leider viel zu wenig berücksichtigte Methode der plans cotés ist wesentlich nichts anderes: Statt einer Fixebene haben wir hier ein System äquidistanter Ebenen, von denen eine die Rolle der Tafel übernimmt; die Äquidistanz aber ist identisch mit meiner Einheitskote, d. h. dem Tafelabstand der Fixebene bei Fiedler.

Man gestatte mir, bevor ich dazu übergehe, die vorgeschlagene und in meinem Unterricht, ich darf wohl sagen, mit einigem Erfolg erprobte Methode durch eine Anzahl typischer Konstruktionen zu erläutern, noch einige Worte allgemeiner Natur. Zunächst über die Géométrie descriptive. Ich beabsichtige nicht, sie zu verdrängen; im Gegenteil, ich will ihr durch die anfängliche Verwendung einer einzigen Ebene ein tüchtiges Fundament schaffen. Die Diskussion am 7. Dezember hat übrigens dargetan, dass viele andere Lehrer der darstellenden Geometrie den Unterricht ebenfalls mit einer einzigen Tafel eröffnen; umstritten war höchstens die Frage, wie lange man ausschliesslich bei der einen Tafel verbleiben soll. Bei ihrer endgültigen Beantwortung wird es darauf ankommen, was für einen Zweck man mit dem Fache verfolgt. Früher betrachtete man es als ein Hilfsfach zum technischen Zeichnen; es wurde auch vielfach vom Zeichenlehrer, der gewöhnlich ein Techniker war, gegeben. Dieser behandelte es vom Standpunkte seines technischen Berufes aus; was jenseits der Bedürfnisse desselben lag oder zu liegen schien, existierte nicht mehr für den Unterricht. Man glaubte diesen dadurch „praktisch“ zu erteilen, dass man ihn möglichst für die Zwecke der Berufspraxis einrichtete. Nun sind ja die meisten Objekte der Technik aus naheliegenden Gründen nach drei zueinander senkrechten Richtungen dimensioniert. Bei der Darstellung werden die Objekte in ihren Hauptdimensionen parallel zu den Axen des Tafelsystems orientiert; da ergibt sich die Notwendigkeit mehrfacher Projektion von selbst; erscheinen doch die Hauptflächen, die auf der einen Tafel sich in wahrer Gestalt projizieren, auf den andern Tafeln zu geraden Linien verkürzt. Hierin liegen just die Vorteile des Verfahrens. Anschaulich für den Laien sind die Bilder nicht, aber die Zeichnungen, Pläne, erweisen sich als ungemein bequem für die materielle Realisierung des Objekts. Das ist für den Techniker ausschlaggebend. Damit ist genügend erklärt, dass bis in die neueste Zeit die Géométrie descriptive auch schon

beim allerersten Anfängerunterricht ihre dominierende Stellung behaupten konnte. Nun liegt aber die Quaderform nicht allen geometrischen Gebilden zugrunde, die unser Interesse in Anspruch nehmen. Die meisten gehorchen einem andern Formgesetz. Für solche ist durch die Abbildung auf drei zueinander senkrechten Ebenen nicht viel, jedenfalls nicht alles gewonnen. Ein Bild sagt da soviel als das andere; eines genügt somit, mindestens dem Mathematiker. Neue Bildebenen wird auch er unter Umständen einlegen: da, wo er sie haben will, wo er etwas Besonderes von ihnen erwartet. Im Unterrichte aber wird dieser Fall nicht gleich im Anfang auftreten, wenn anders dieser stufenmässig vom Leichtern zum Schwierigern fortschreiten soll.

Was ist aber heute der Zweck der darstellenden Geometrie? Ist sie noch die Magd des technischen Zeichnens oder der Konstruktionslehre; sprechen die „praktischen" Bedürfnisse der gewerblichen Fortbildungsschulen noch das letzte Wort? Ich glaube nicht. Mir tritt sie entgegen in der ganzen Bedeutung und mit der vollen Forderung ihres formalen Wertes, ihres Wesens als Raumgeometrie par excellence, die räumliches Denken, räumliches Vorstellen zu wecken und zu entwickeln hat, die die Probleme einer propädeutischen Stereometrie, die zurzeit nur in perspektivischen Skizzen behandelt wurden, neu aufgreift und in exakter Konstruktion wirklich durchführt, so dass sie nach der geschaffenen Zeichnung modelliert werden können. Auf letzteres ist ein besonderes Gewicht zu legen. Die durch das Modellieren in Anspruch genommene Handfertigkeit ist ein nützliches Gegengewicht gegen die reine „Kopfarbeit" und geeignet, brauchbare, praktische Leute zu erziehen. Denn wozu zeichnet der Techniker? Doch wohl in der Hoffnung, sein Projekt werde auch materiell verwirklicht, ausgeführt. Also ist es notwendig, dass dem Schüler ein gewisses Verantwortlichkeitsgefühl anerzogen werde. Er soll so konstruieren lernen, so richtig und so genau, dass nach seiner Zeichnung das Objekt sicher und ohne „Mogelei" hergestellt werden kann.

Die darstellende Geometrie ist die wissenschaftliche Grundlage der Zeichenkunst. Nachdem sie die Mittel gegeben, darzustellen, muss sie benützt werden, in der Geometrie weiter, weit über das alte Ziel der Stereometrielehrbücher hinaus, in neue Gebiete vorzudringen, so zur Abbildung des Kreises, zur Darstellung der Flächen zweiten Grades: Walze, Kegel, Kugel, und zur Bewältigung der einschlägigen Hauptaufgaben, spez. der Schnittbildung und Durchdringung. Auf jeder Stufe wird sie, in treuer Befolgung des Herbartschen Unterrichtsprinzips der Konzentration, die Fäden anknüpfen, die mit andern

mathematischen Disziplinen verbinden und die Anwendungen pflegen, die in andern Fächern, besonders in den Naturwissenschaften (z. B. der Kristallographie) und in der mathematischen Geographie, von ihr gemacht werden. (Vergleiche Dr. E. Fiedler: Die darstellende Geometrie im mathematischen Unterrichte. Programm der Zürcher Kantonsschule 1898!).

Nach diesen Ausführungen, glaube ich, sei für meinen Vorschlag, mit einer Ebene zu beginnen, nun eine Grundlage geschaffen. Die Forderung entspricht:

1. Dem Grundsatz der Ökonomie. Wenn mit der darstellenden Geometrie ein höheres Ziel verbunden, wenn anderseits aber die Klage der Überbürdung der Schüler als eine berechtigte anerkannt wird, so ist es geboten, in anderer Richtung Einfachheit anzustreben, also z. B. Aufgaben rein mathematischer Natur durch die Darstellung auf einer Tafel zu erledigen. Man sieht in einem Bilde alles, also genug; ein zweites Bild ist Verschwendung!

2. Sie entspricht dem pädagogischen Grundsatze, dass man vom Leichtern zum Schwierigern fortschreiten soll.

Zwei Bilder in einem Zeichenblatt, die vielfach ineinander übergreifen und deren Anschaulichkeit durch den Einschlag der sich wie ein Schleier über das Liniengewirr hinlagernden Verbindungsordination gestört wird, muten der Fassungskraft des Anfängers zu viel zu. Wir können in Wahrheit doch nur ein Bild auf einmal geistig erfassen.

3. Sie entspricht dem Grundsatze der Einheitlichkeit des Unterrichts. Bei der Axonometrie, bei der Zentralprojektion haben wir auch nur eine Bildebene. Leicht macht sich von der orthogonalen Projektion auf eine Tafel der Übergang zu den beiden letztgenannten Methoden. Nach einem anerkannten didaktischen Prinzipe geht die Behandlung des Speziellen der des Allgemeinen voraus, aber nicht in der Meinung, dass der Spezialfall durch Komplizierungen erschwert werde, wie es der Fall ist, wenn die Methode der Orthogonalprojektion von Anfang an durch Benützung zweier oder dreier Tafeln „verumständlicht“ wird. Der Übergang zu neuen Projektionsebenen ergibt sich als eine Transformationsaufgabe und begegnet später, wenn die Elemente sitzen, nicht allzu grossen Schwierigkeiten. An dieser Stelle sind dann die besondern Gesetze der Monge'schen Methode bald nachgeholt.

4) Sie entspricht auch der Forderung, dass aller Unterricht das Interesse des Schülers zu erwecken habe. Rasch wird der Schüler, wenn die Abbildung sich im Anfang auf eine Tafel beschränkt, in das Wesen des Projizierens eingeführt; zu seiner Freude sieht er sich bald

in den Stand gesetzt, Probleme zu lösen; er erkennt den Nutzen des neuen Faches in der ersten Stunde und begreift seine anwendungsreiche Fruchtbarkeit. Es ist ein frischer Zug im Unterricht von Anfang an; ganz anders, als wenn der Lehrer mit ihm, als abschreckende Ouvertüre, den Punkt in den acht Räumen des Oktanten „herumjagt". — Das Interesse aber ist für den Anfänger-Unterricht der darstellenden Geometrie gewiss ein wichtiges Moment, ohne das die Kraftprobe nur schwer bestanden wird. Eine solche aber ist das neue Fach für den Schüler; es mutet ihm ja ganz neues zu: den dreidimensionalen Raum. Bisher verlief der Unterricht total planimetrisch und arithmetisch. Selbst der Unterricht in der Stereometrie entwickelte sich in herkömmlicher Weise nach der Schablone: „Voraussetzung, Satz, Beweis", und die einzigen exakt durchgeführten Probleme dieses letzgenannten Zweiges der Geometrie waren Rechenaufgaben: Inhalts- und Oberflächenberechnungen! (— in derselben Einseitigkeit, wie auch die Volksschule heute noch das Formstudium vernachlässigt und ihr höchstes Ziel in der Ermittlung von Flächen- und Kubikinhalten erblickt, als ob alle Schüler Flachmaler oder „Gutsverwalter" werden könnten, als ob das Endziel aller geometrischen Weisheit in der Beantwortung der Frage gipfelte: „wann ist der Heustock aufgefressen?" —). Die Ausbildung der räumlichen Phantasie kam nicht zu ihrem Rechte. Nun aber soll der Schüler auf einmal den allgemeinen Raum und die Mannigfaltigkeit der in ihm möglichen Formen erfassen lernen; sein Geist, seine räumliche Denk- und Vorstellungskraft soll in Wahrheit „matur" werden für ein erfolgreiches Hochschulstudium. Wahrlich eine Aufgabe, die nicht nötig hat, durch die Unterrichtsmethode an sich noch schwieriger gemacht zu werden!

III.

Es soll nun die Methode an einzelnen typischen Konstruktionen erprobt werden. Zu diesem Zwecke zunächst einiges über die in den Figuren verwendeten Symbole. Die durch Orthogonalprojektion auf die Tafel entstandenen Bilder der Originalpunkte und -Geraden des Raumes tragen zunächst keinen Index (die Originalelemente erhalten den Index r, falls sie besonders bezeichnet werden müssen*). Die Indices $'$ $''$ $'''$ bleiben für Projektionen auf neue Bildebenen oder für Projektionen auf die ursprüngliche Tafel nach andern Methoden — schiefe oder zentrale

*) Dies kann vorkommen bei Figuren, die den Vorgang der Projektion oder anderer räumlicher Operationen objektiv erläutern — oder auch im Texte, wo dies zur Vermeidung von Missverständnissen nötig erscheint.

Projektionen — oder für die Bilder der axonometrischen Projektionen reserviert.) Die Symbole, die umgelegte oder umgeklappte Gebilde bezeichnen, werden in Klammern gesetzt.*) Punkte werden in der Figur mit den Majuskeln der lateinischen Schreibschrift (im Text mit gewöhnlichen grossen Buchstaben), Gerade und Strecken mit den entsprechenden Minuskeln (im Text analog), Ebenen mit den Majuskeln der Druckschrift (im Text mit entsprechender Fettschrift), Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben, Koten mit den Minuskeln der deutschen Schreibschrift (im Text mit deutschen Druckschriftminuskeln) bezeichnet. Der Durchstosspunkt (Spurpunkt) der Geraden mit der Tafel erhält das Zeichen S, die Schnittlinie der Ebene (Spur) mit der Tafel das Zeichen s. Die Einheitskote wird mit q, der ihr entsprechende Punkt der Geraden mit Q_r, die ihr entsprechende Spurparallele der Ebene mit q_r bezeichnet. Die Strecke SQ heisse ich die Bildlänge der Geraden, den Abstand der Parallelen s und q die Bildbreite der Ebene. Die Falllinie der Ebene wird mit f_r, die Normale der Ebene mit n_r, die Normalebene zur Geraden mit **N** bezeichnet. — Der Vollständigkeit wegen sei an folgende Sätze erinnert:

Parallele Gerade haben parallele Bilder (und ausserdem gleiche Bildlänge), parallele Ebenen: parallele Spuren (und ausserdem gleiche Bildbreite). Gerade von gleicher Tafelneigung haben gleiche Bildlänge, ebensolche Ebenen: gleiche Bildbreite. Das Bild der Falllinie und der Normalen einer Ebene ist senkrecht zur Spur. (Sie decken sich, falls sie durch den nämlichen Punkt der Ebene gezogen sind.) Die Spurlinie einer Ebene enthält die Spurpunkte aller ihrer Geraden. Durch den Spurpunkt einer Geraden gehen die Spurlinien aller durch sie zu legen möglichen Ebenen. — Analoge Sätze gelten für die Elemente Q und q.

Die Spur der Verbindungsgeraden zweier Punkte, die durch ihre Distanzkreise gegeben sind, ist das äussere oder innere Ähnlichkeitszentrum dieser Kreise — je nachdem die Punkte auf derselben oder auf verschiedener Seite der Tafel sich befinden.**)

Die Spur einer Ebene, die durch drei ebenso gegebene Punkte bestimmt ist, ist eine Ähnlichkeitsachse der drei Kreise, und zwar die äussere, wenn alle drei Punkte auf der nämlichen Seite der Tafel sich befinden, oder eine innere, wenn sie nicht auf der gleichen Seite

*) Die umgelegte oder umgeklappte Gerade selbst wird in der Figur durch die sog. punktierte oder strichpunktierte Linie angedeutet.

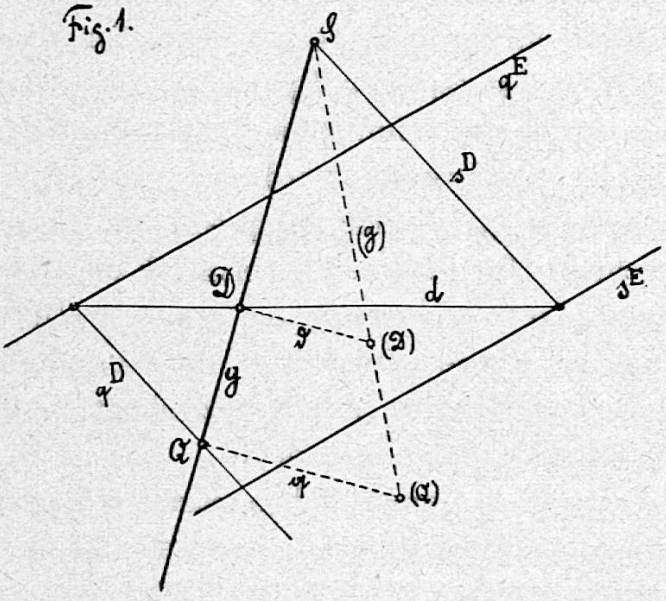
**) Punkten, die hinter der Tafel liegen, wird negativer Tafelabstand zugeschrieben. Ihr Distanzkreis wird mit einer Pfeilmarke versehen, die eine zur Uhrzeigerbewegung entgegengesetzte Richtung anzeigt.

der Tafel sind (es ist leicht, zu ermitteln, welche der drei innern Ähnlichkeitsachsen zu nehmen ist.*))

Das Kriterium, dass zwei Gerade sich schneiden (also einer Ebene angehören) liegt darin, dass die Verbindungslinie ihrer Punkte Q (überhaupt die Verbindungslinie der Bilder zweier Punkte von gleicher Kote) parallel ist zur Verbindungslinie ihrer Spuren S**).

Die Schnittlinie zweier Ebenen ist die Gerade, die den Schnittpunkt der Spuren mit demjenigen der Spurparallelen von gleicher Kote, spez. der Geraden q, verbindet.

Fig. 1.



I. Aufgabenserie.

1. Gegeben durch die Hauptdaten eine Gerade g und eine Ebene **E**. Es ist der Durchstosspunkt D von g mit **E** zu bestimmen. — Durch g wird eine beliebige Hilfsebene D gelegt und ihre Schnittlinie d mit **E** bestimmt. Der Schnittpunkt D von g mit d ist das Bild des gesuchten Punktes; seine Kote $\mathfrak{d}$ wird durch die Umlegung erhalten.**)

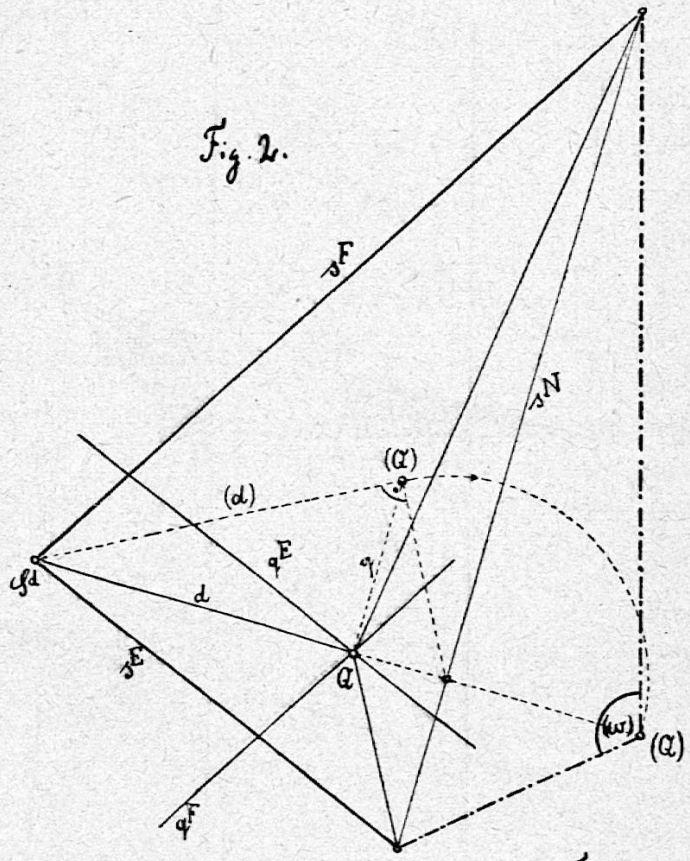
---

*) A_r und B_r sollen auf der einen, C_r auf der andern Seite der Tafel liegen. Dann ist die Spur von $A_r\,C_r$ das äussere Ähnlichkeitszentrum, die Spur von $A_r\,C_r$, sowie die von $B_r\,C_r$ je das innere Ähnlichkeitszentrum der resp. Distanzkreise. Die drei Spurpunkte liegen in der Spur der Ebene. Diese Spur ist aber als Schnittlinie zweier Ebenen eine gerade Linie. Wir haben hier also den sog. Standardbeweis des bekannten planimetrischen Satzes über die Ähnlichkeitszentren dreier Kreise.

**) Die Gerade wird gewöhnlich gegeben durch die Hauptdaten S, Q und $\mathfrak{q}$, die Ebene durch s, q und $\mathfrak{q}$. Sind Gerade und Ebene durch andere Daten, z. B. durch Spur und Neigungswinkel usw. gegeben, so lassen sich die fehlenden andern Hauptdaten durch eine einfache Konstruktion finden, wie umgekehrt aus den Hauptdaten in einfachster Weise andere Grössen, z. B. der Neigungswinkel, oder auch die Kote irgend eines der Geraden oder der Ebene angehörenden Punktes, bestimmt werden können.

***) Wir lassen der Einfachheit halber den Index r weg, wo dies ohne Hervorrufung von Missverständnissen geschehen kann. Das Zeichen g bedeutet also ebensowohl die Gerade selbst, wie auch ihre Orthogonalprojektion in der Bildebene. (Faktisch bedeutet ja auch das Bild der Geraden die Gerade selbst!) Ebenso gestatten wir uns im Interesse der Kürze einige textliche Vereinfachungen; so soll z. B. der Satz: „Es ist der Durchstosspunkt D zu

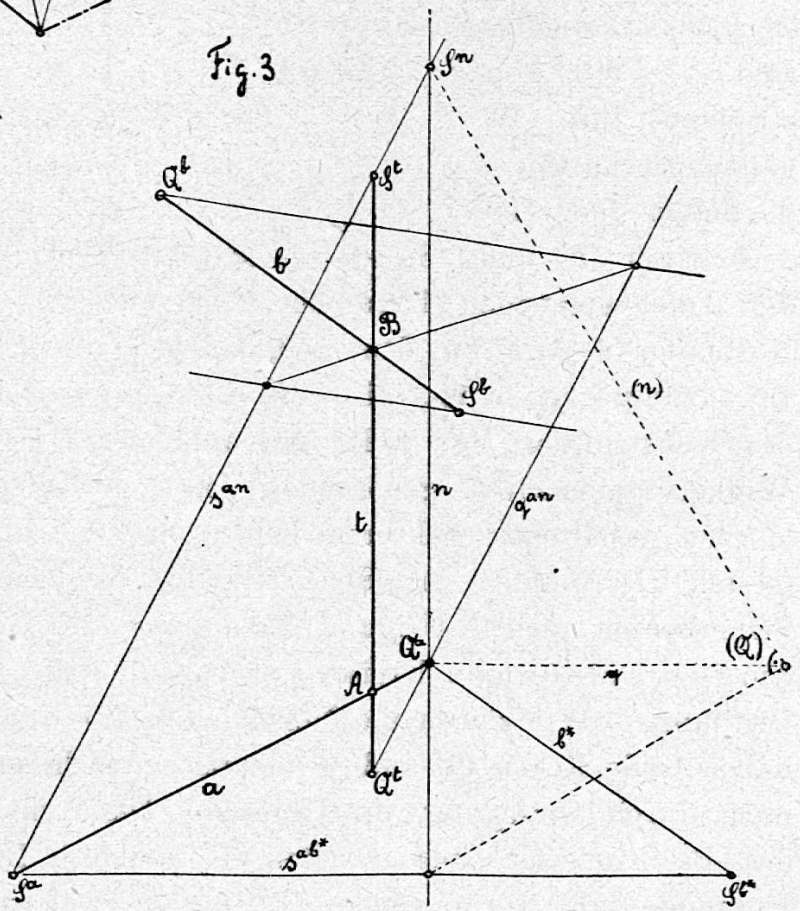
Fig. 2.



2. Gegeben durch die Hauptdaten sind zwei Ebenen **E** und **F**. Es soll ihr Neigungswinkel (ω) bestimmt werden. — Einführung der gemeinsamen Normalebene **N** im Punkte Q ihrer Schnittlinie d. Bestimmung der Schnittlinien von **N** mit **E** und **F**, als Schenkel von ω. Umklappung von **N** um ihr s.

3. Gegeben sind zwei Gerade a und b durch die Hauptdaten. Es ist ihre Normaltransversale t zu bestimmen. — Wir legen durch das Q der ersten Geraden zur zweiten eine Parallele b^* und bestimmen zur Ebene ab^* die Normale n; sie liefert die Richtung der gesuchten Transversale. Wir bestimmen dann nach Aufgabe 1) den Durchstosspunkt B von b mit der Ebene an. — $t \parallel n$ durch B ist die gesuchte Gerade; wir erhalten in A unmittelbar ihren Schnittpunkt mit a; ihre Spur liegt in s von an, ihr Q in q derselben Ebene.

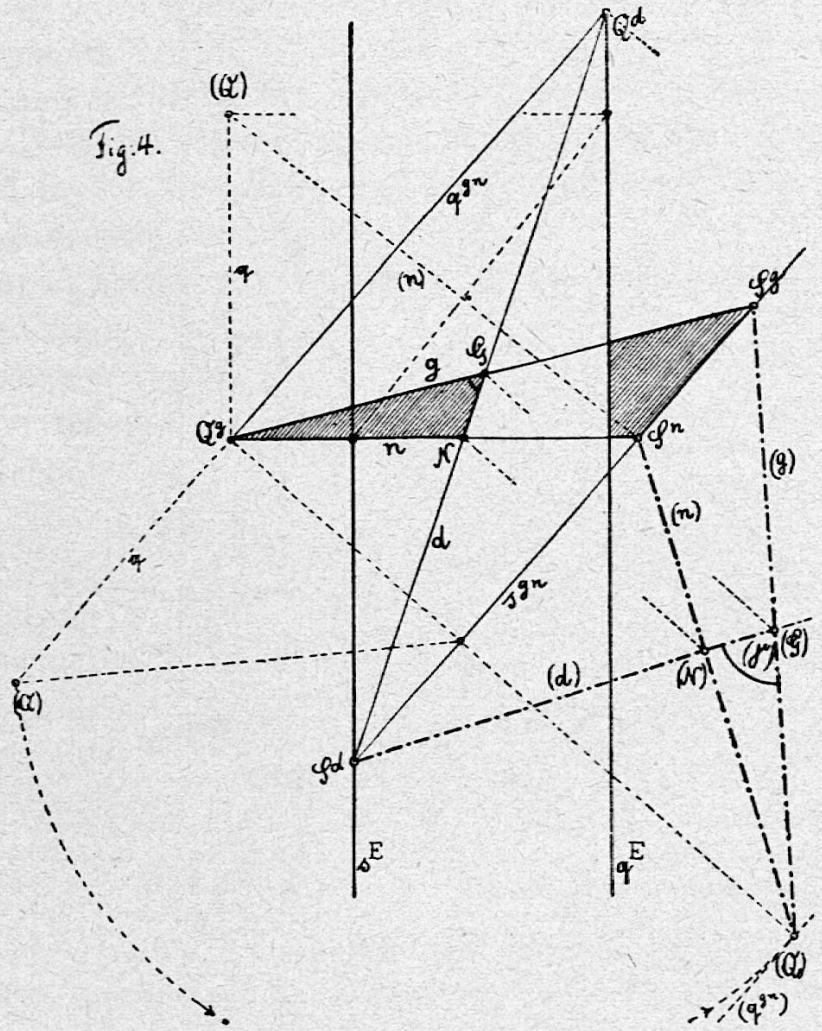
Fig. 3



4. Gegeben durch die Hauptdaten eine

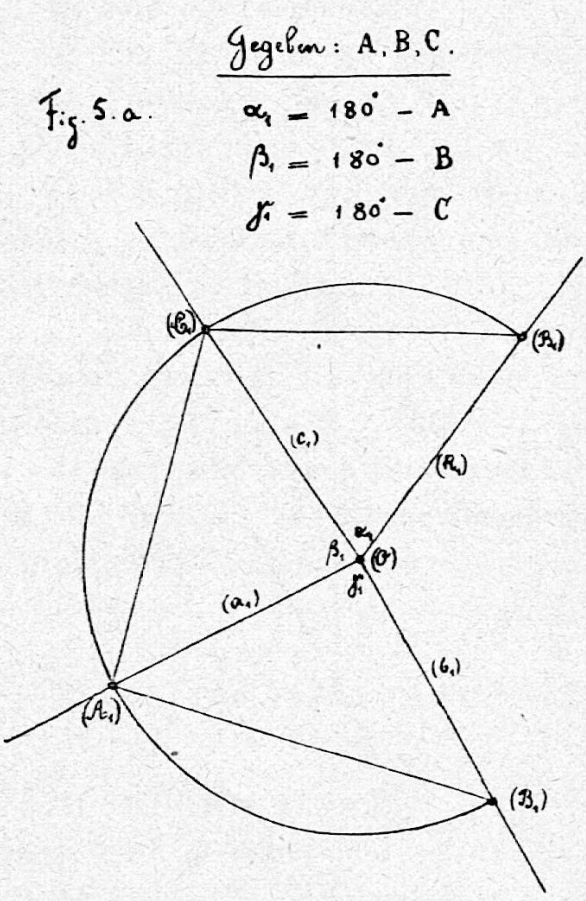
bestimmen“ bedeuten: „es ist das Bild des Durchstosspunktes D_r zu bestimmen“, u. dgl. — In einem Lehrbuche für Schüler müsste selbstverständlich auch im Symbole scharf unterschieden werden.

Gerade g und eine Ebene **E**. Es ist ihr Neigungswinkel (γ) zu bestimmen. Wir legen durch Q von g zu **E** die Normale n und bestimmen die Schnittlinie d der Ebene gn mit **E**. Der Winkel zwischen g und d ist der gesuchte. Umklappung der Ebene gn um ihr s.



5. Es soll eine körperliche Ecke $\mathfrak{E}$ konstruiert werden, deren Flächenwinkel A, B und C gegeben sind. — Wir konstruieren ihre Ergänzungsecke $\mathfrak{E}_1$ — die Seiten sind: $(180-A)$, $(180-B)$ und $(180-C)$ — als Spitzenecke einer mit der Basis auf der Tafel stehenden Pyramide von gleichen Seitenkanten k_1. Die Normalen a, b, c zu den Seitenflächen dieser Pyramide liefern die Ergänzungsecke zu $\mathfrak{E}_1$, also die verlangte. Für die Durchführung der Konstruktion der Ecke gilt folgendes: Die Sehnen der zu den Winkelsupplementen gehörenden, mit demselben Radius $k_1 = a_1 = b_1 = c_1$ erhaltenen Sektoren liefern die Seiten des Basisdreiecks der (ersten) Pyramide; ihr Scheitelpunkt projiziert sich, da die drei Seitenkanten gleiche Neigung haben, im Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises. (Die Kote o des Scheitelpunktes ist also bestimmt.) Wir ziehen die Normalen a, b, c durch die Spitze O — dann haben beide Ecken $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}$ identischen Scheitelpunkt — und bestimmen, durch Umlegung, ihre Spuren. Diese sind dann die Eckpunkte des Basisdreiecks einer zweiten Pyramide. Die Seitenflächen dieser Pyramide (als Normalebenen zu den Seitenkanten der ersten) haben unter sich gleiche Tafelneigung und ihre Seitenkanten — eben die genannten Normalen a, b, c — projizieren sich als die Winkelhalbierenden

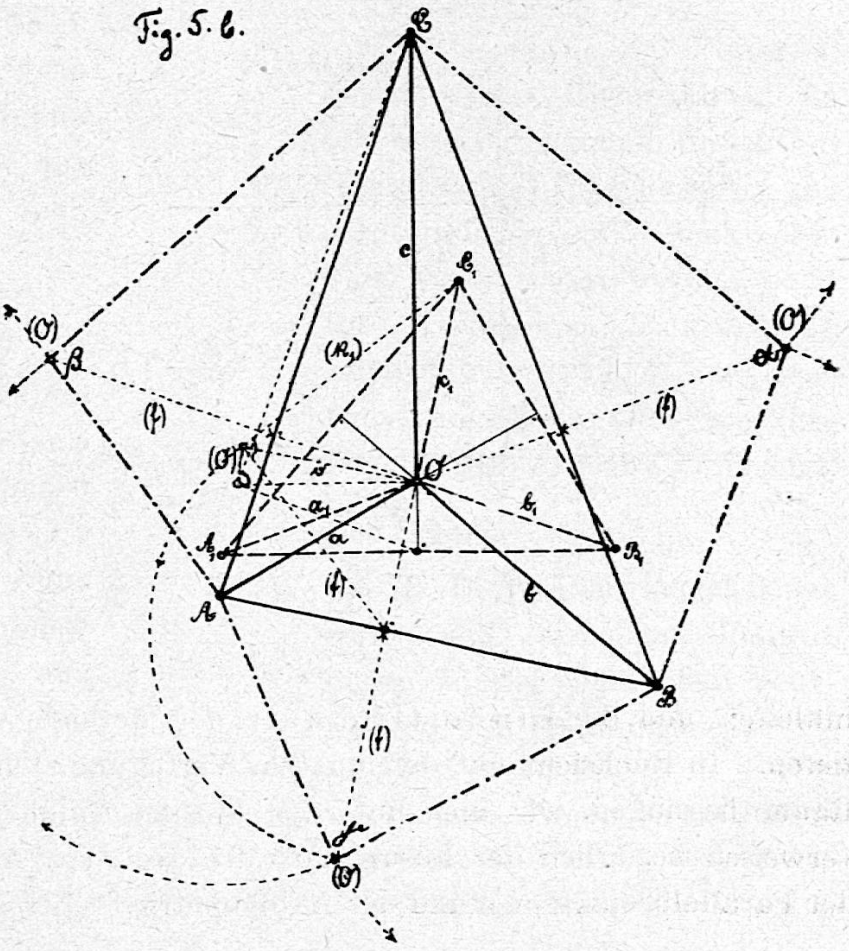
Fig. 5. a.



des Basisdreiecks. Die Projektion des Scheitelpunktes ist also zugleich der Mittelpunkt des dem zweiten Basisdreieck eingeschriebenen Kreises. Der Durchführung kommt namentlich zu statten, dass die Projektionen der Seitenkanten der einen Pyramide senkrecht stehen zu den resp. Basisdreieckseiten der andern, weil diese die Spuren der zu jenen normalen Ebenen sind. Durch Umklappung der Seitenfläche der zweiten Pyramide erhalten wir die Kantenwinkel α, β, γ oder Seiten der gesuchten Ecke **C**. (Die Zeichnung als ebene Figur aufgefasst verkündet und begründet einen interessanten planimetrischen Lehrsatz!)

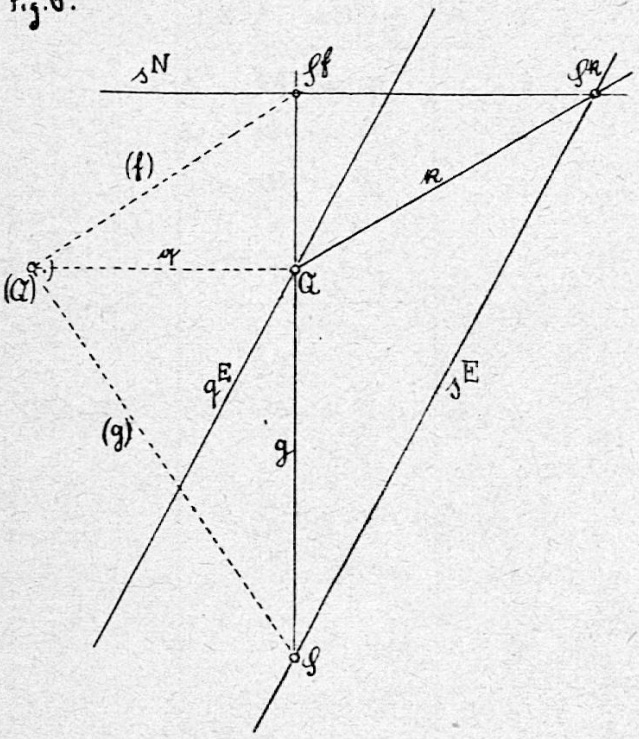
6. Von der Ebene **E** sind gegeben zwei in ihr liegende auf einander senkrechte Gerade g und k, (also zwei „konjugierte" Richtungen); g ist durch die Hauptdaten vollständig bestimmt; von k kennt man nur die Richtung in der Projektion. Man ermittle die Spur von **E**. — Die Spur von k liegt in der Spur der Normalebene **N** von g

Fig. 5. b.



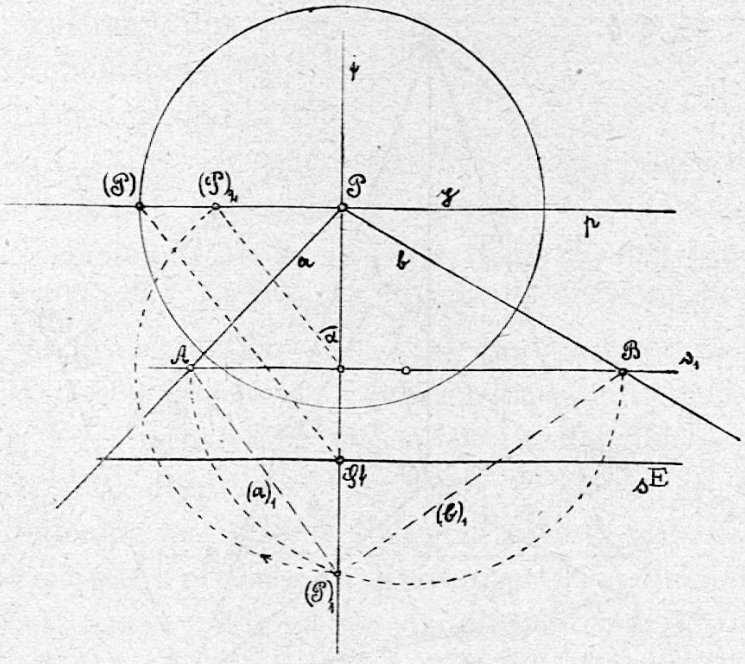
durch Q. Mit der Spur von k aber ist die Spur von **E** bestimmt.

Fig. 6.



7. Von der Ebene **E** kennt man Bild und Kote eines in ihr liegenden Punktes P, ferner, im Bilde, die Richtung der Falllinie (folglich auch die der Spur), und endlich ein weiteres Paar in ihr enthaltener konjugierter Richtungen (a und b). Die Spur der Ebene ist zu bestimmen. — Drehung der Ebene in tafelparallele Stellung um eine beliebige Spurparallele s_1 unter Benutzung des Halbkreises über der von a und b auf s_1 herausgeschnittenen Strecke AB. Die Hypotenusenhöhe des rechtwinkligen Dreiecks $AB(P)_1$ dient zur Bestimmung des Neigungswinkels α und dieser mit der Kote p zur Bestimmung der Spur s.

Fig. 7.



* * *

Wir würden im Anschluss an die letzte gern einige weitere Aufgaben behandeln, bei denen die schiefe Parallelprojektion auf eine Tafel zur Anwendung kommt, die also zur Parallelperspektive hinleiten und die Einheitlichkeit der Methode wiederum dokumentieren. In Rücksicht auf den uns zur Verfügung stehenden beschränkten Raum begnügen wir uns mit der blossen Anführung derselben und verweisen bezüglich der Lösung auf Weiler, Dr. A., Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. (Leipzig, B. G. Teubner.)

Es sind die folgenden:

a) Die Ebene **E** ist gegeben durch Bild und Kote eines in ihr liegenden Punktes P und die Bilder zweier Paare in ihr enthaltener konjugierter Richtungen ($a \perp b$, $c \perp d$). Die Spur der Ebene ist zu bestimmen.

b) Die gleiche Aufgabe, wenn **E** gegeben ist durch eine ihrer Geraden g (in den Hauptdaten) und die Bilder zweier in ihr enthaltenen konjugierten Richtungen ($a \perp b$).

c) Die gleiche Aufgabe, wenn **E** gegeben ist durch einen in ihr liegenden Punkt P (Bild und Kote) und die Bilder zweier in ihr liegenden gleichen Strecken $AB = CD$.

d) Als Bild eines Quadrates ist ein Parallelogramm gegeben. Es soll die Stellung der Ebene dieses Quadrates bestimmt werden. (Spurrichtung und Neigungswinkel.)

Transformation. Das Problem der Transformation leitet am natürlichsten zur Géométrie descriptive (Monge) über. Es werde erläutert an der

Fig. 8.

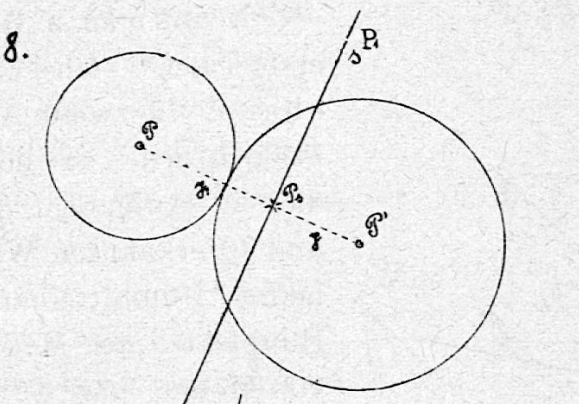
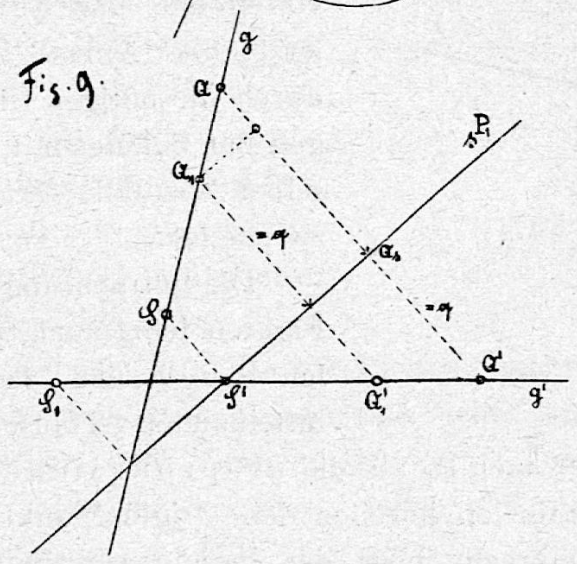


Fig. 9.



II. Aufgabenserie.

8. Gegeben ein Punkt P durch seinen Distanzkreis. Es soll seine orthogonale Projektion (Distanzkreis) für eine neue, zur ursprünglichen **P** senkrechte Tafel $\mathbf{P}_1$ bestimmt werden. —*) Die Ausführung bedarf hier keiner Erläuterung. Die neue Projektionsebene wird um ihre Spur ${}_s\mathbf{P}_1$ in die alte umgelegt.

Der Schüler erkennt:

a) Die beiden Projektionen eines und desselben Punktes liegen in der nämlichen Senkrechten zur Trennungsachse ${}_s\mathbf{P}_1$.

---

*) Wir versehen den Buchstaben, der uns die neue Projektion bezeichnet, oben rechts mit einem Index („Strich"). — Spuren von Geraden und Ebenen in der neuen Tafel tragen als Index unten rechts die kleine Ziffer 1.

(Die beiden Distanzkreise berühren sich mithin; sie werden selbstverständlich überflüssig, sobald wir beide Tafeln brauchen.)

b) Die Abstände der Projektionen von der Trennungsachse in der einen Tafel sind die Koten des Originals für die andere Tafel.

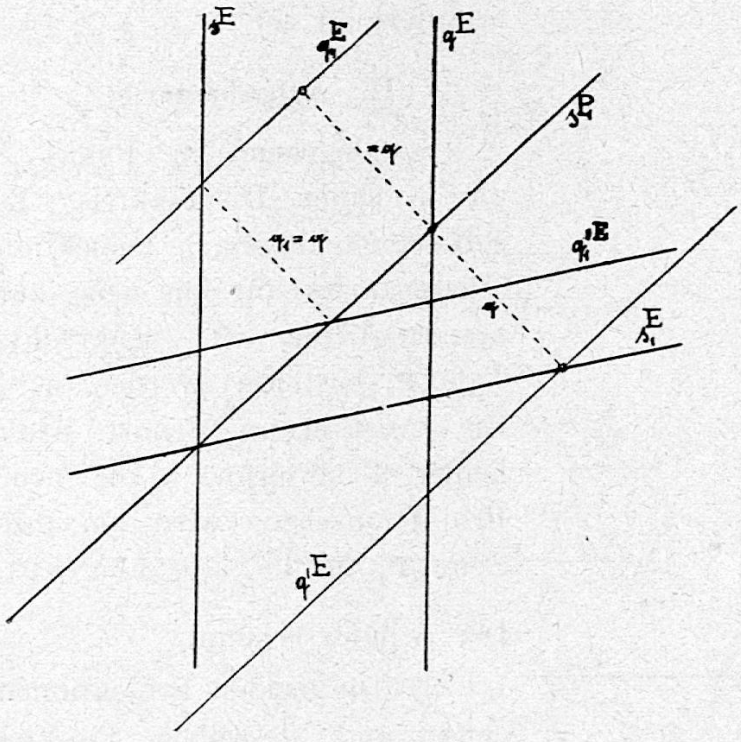
9. Gegeben eine Gerade g durch die Hauptdaten. Sie soll auf die neue Bildebene $\mathbf{P}_1 \perp \mathbf{P}$ projiziert werden. — Man bestimmt nach Aufgabe 8 die neue Projektion der Punkte S und Q. Wird auch noch die Spur S_1 von g in $\mathbf{P}_1$ und die Projektion Q'_1 desjenigen Punktes ermittelt, der wiederum der Einheitskote q entspricht, so ist g auch für die zweite Projektionsebene durch die Hauptdaten bestimmt.

10. Gegeben eine Ebene **E** durch die Hauptdaten. Diese sollen auch für die neue Bildebene $\mathbf{P}_1 \perp \mathbf{P}$ bestimmt werden. — Die Figur bedarf keiner Erklärung. — Der Schüler erkennt hiebei die Sätze:

a) Die beiden Spuren treffen sich in der Trennungsachse.

b) Das Bild der Spurparallelen ist in der andern Tafel parallel zur Trennungsachse.

Fig. 10.

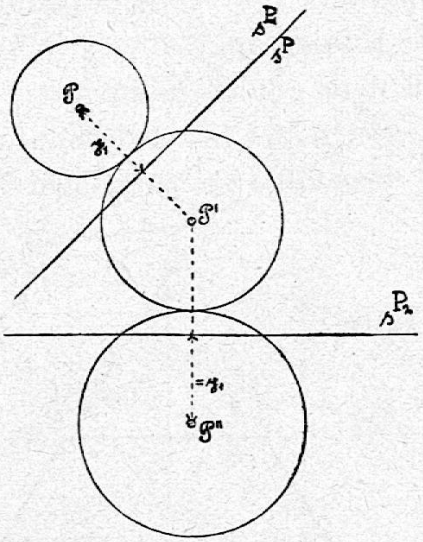


Nennt man z. B. die erste Tafel Grundrissebene, die zweite Aufrissebene, so liefern die in Aufgaben 8, 9 und 10 erkannten Wahrheiten*) unmittelbar die Hauptsätze der Methode von Monge, und es wird jetzt der Anlass sein, durch die nötigen Übungen den Schüler mit derselben ebenfalls vertraut zu machen.

Die Betrachtung der Figuren lehrt auch, dass ich die beiden Tafeln miteinander vertauschen, d. h. dass ich, ebensowohl wie **P**, auch $\mathbf{P}_1$ als die ursprüngliche ansehen darf; nur habe ich mir natürlich jeweilen den Originalpunkt P_r im betreffenden Tafelabstand senkrecht über der gerade betrachteten Projektion zu denken. Ich stelle mich z. B. auf diesen Standpunkt,

*) Es sind hier im Texte nicht alle angegeben; z. B. fehlen die Sätze über die Bestimmung der Spurpunkte der Geraden.

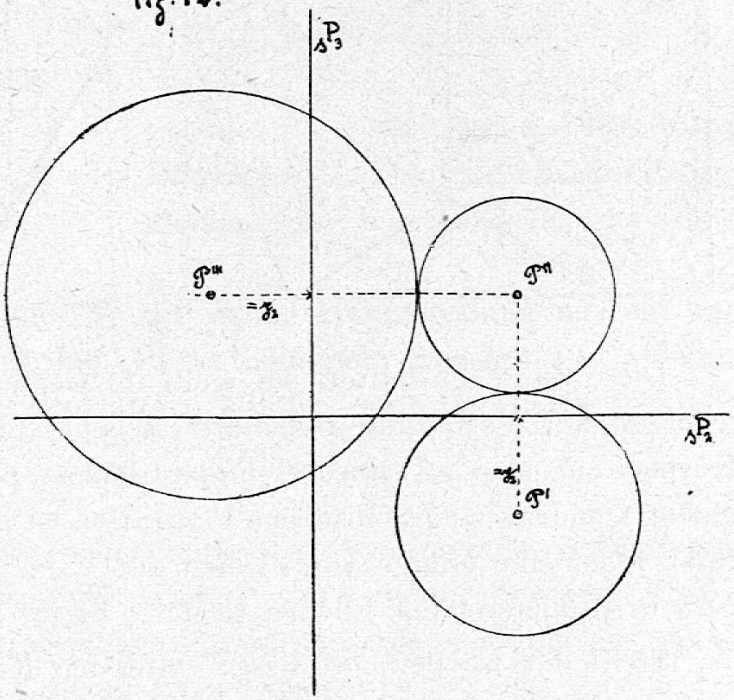
Fig. 11.



wenn ich das Bild des Originals weiter transformieren, d. h. die Projektion desselben für eine fernere auf $\mathbf{P}_1$ senkrechte Tafel $\mathbf{P}_2$ bestimmen will.*) Es ist dies für den Punkt P in Figur 11 durchgeführt. Die Betrachtung der Figur lässt die Regel erkennen: Die Punktprojektionen in den beiden nicht aneinander schliessenden Tafeln haben von den resp. Achsen den nämlichen Abstand (gleich der Kote des Originals für die mittlere Tafel).

Stehen die beiden Trennungsachsen im rechten Winkel, so habe ich den üblichen Oktanten, und ich brauche nur noch die gewohnten Indices zu verwenden, um sofort die Darstellung des Punktes im Grundriss, Aufriss und Seitenriss zu erkennen (Fig. 12).

Fig. 12.



Eine hübsche Anwendung der Transformation machen wir bei der Darstellung der regulären Körper, spez. des Ikosaeders und des Dodekaeders. Bei diesen liegen bekanntlich 15 mal je zwei Kanten in einer Symmetralebene als Rechteckseiten einander parallel gegenüber. Diese Symmetralebenen ordnen sich 5 mal zum Ebenentripel eines Oktanten. Zwischen dem Kantenabstand und der Kantenlänge besteht das Gesetz des goldenen Schnittes: teilen wir den Kantenabstand nach diesem Verhältnis, so gibt der grössere Abschnitt die Ikosaederkante, der kleinere die Dodekaederkante. Da das Ikosaeder nur zwölf Ecken hat, so enthält ein Symmetralebenen-Oktant in den zwölf Eckpunkten

*) Bezüglich der Indices ($''$, $_2$) beachte man die frühere Note!

seiner drei Rechtecke alle Ecken des Körpers. Beim Dodekaeder mit seinen 20 Ecken gibt es dagegen ausser jenen 12 Ecken noch acht weitere. Diese bilden die Ecken eines parallel und koaxial zu den Symmetralebenen orientierten Würfels. Die Kantenlänge dieses Würfels ist gleich dem grössern Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Kantenabstandes des Dodekaeders (also gleich der Ikosaederkante). Der Abstand der Dodekaederkante von der benachbarten parallelen Würfelfläche ist gleich ihrer halben Länge.

Fig. 13.

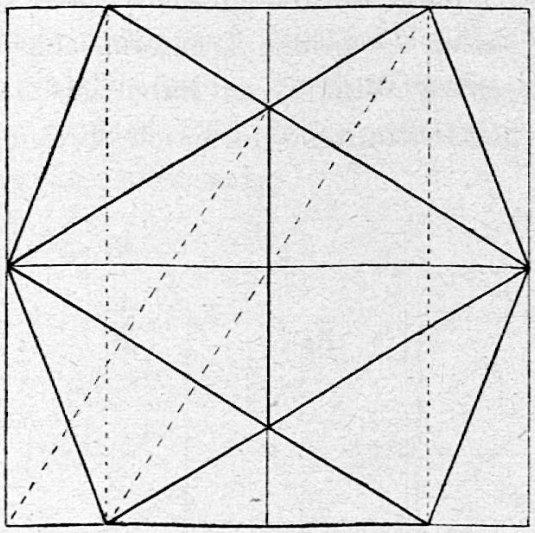
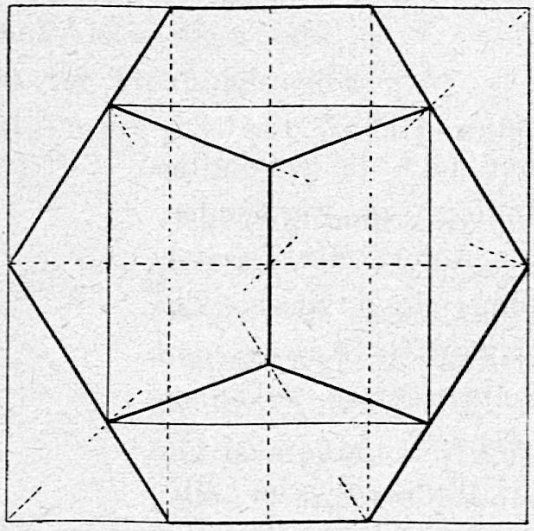


Fig. 14.



Diese Sätze enthalten ein wohl im Gedächtnis haftendes und daher jederzeit zur Verfügung stehendes „Rezept" für die Projektion der beiden Körper auf eine zu einer Symmetralebene parallele Bildebene. Die in einem Quadrat eingeschriebene Figuration ist dabei die denkbar einfachste (und weist eine Menge von Proben auf!), da ja 4 Seitenflächen des Körpers in projizierenden Ebenen liegen. Figur 13 und 14.*)

Steht der Körper mit seiner untersten Kante auf der Bildebene, so enthält die Figur die Koten aller Eckpunkte, und wir können den Körper durch Transformation unmittelbar auf jede andere Ebene abbilden. Zumal erhalten wir auf leichte, bequeme Weise die beiden andern Hauptstellungen, wenn wir die neue Bildebene senkrecht zur tafelparallelen Verbindungsgeraden zweier gegenüberliegenden Ecken (Eckenachse), oder

*) Da bei dieser Darstellung auch die drei Radien der dem Körper um- und eingeschriebenen Kugeln in wahrer Grösse auftreten, so lässt sie sich auch für die Durchführung der Rechnungsaufgaben sehr bequem benutzen.

Fig. 15.

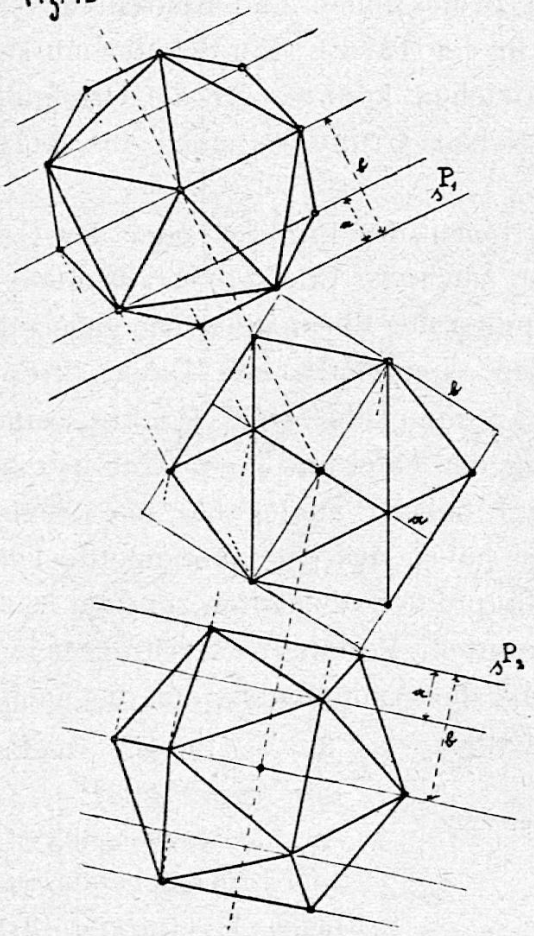
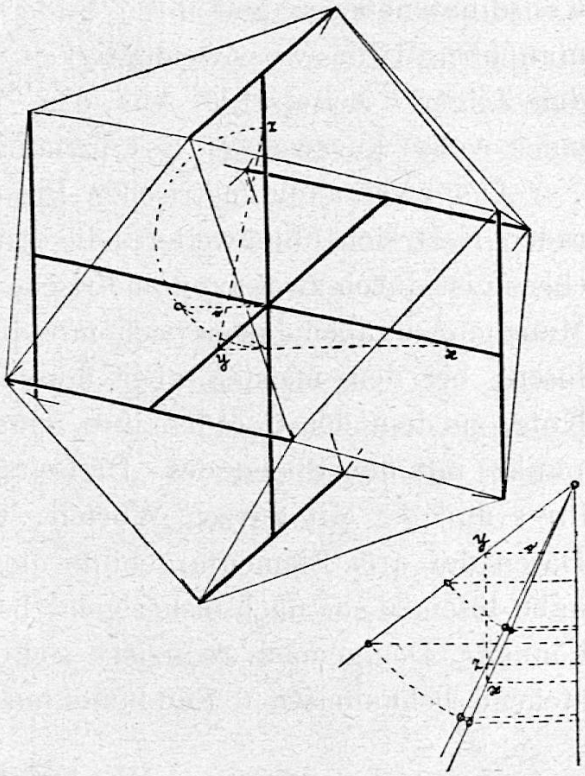


Fig 16



parallel zu einer der auf der alten Bildebene senkrechten Körperflächen stellen (d. h. senkrecht zu einer Flächenachse). Figur 15.

Ebenso leicht lässt sich von der ersten Hauptstellung aus ein axonometrisches Bild (wie in Fig. 16 antizipierend gezeigt ist) ableiten, oder eine beliebige schiefe Projektion (Militär- oder Parallelperspektive).

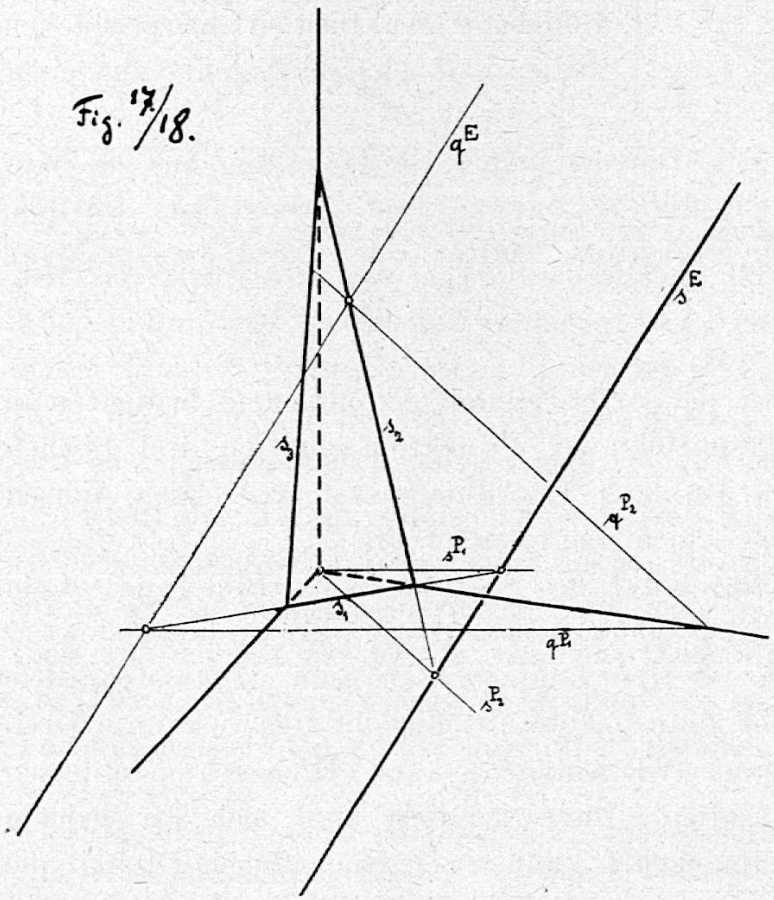
Axonometrie. Bei der orthogonalen Axonometrie bedient man sich bekanntlich des Hilfsmittels der Projektion auf die drei Ebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Achsen zur eigentlichen Bildebene schiefe Lage haben.

Wir legen den Anfangspunkt des Systems in die Bildebene; dann gehen die Spuren der Koordinatenebenen durch den Anfangspunkt O senkrecht zu den Bildern der Koordinatenachsen, und die tafelparallele Fixebene im Abstande der Einheitskote q schneidet das bekannte Dreiseit der Spurparallelen heraus (wir nennen es kurz „Dreiseit q“), in dessen Höhen die Achsenbilder fallen. Dieses Dreiseit lässt sich für jedes q leicht bestimmen, und umgekehrt kann zu jedem solchen Dreiseit die Kote seiner Ebenen leicht konstruiert werden. Wie beim Original selbst,

wollen wir der Einfachheit halber in der Signatur keinen Unterschied machen zwischen den axonometrischen Projektionen und Spuren in den Koordinatenebenen und ihren Bildern in der Tafel. (Für Schüler müsste man überall da, wo Zweideutigkeit entstehen könnte, für die Originale den Zeiger *r* beisetzen). Aus dem gleichen Grund sei auch das Bild einer Achse kurzweg Achse genannt.

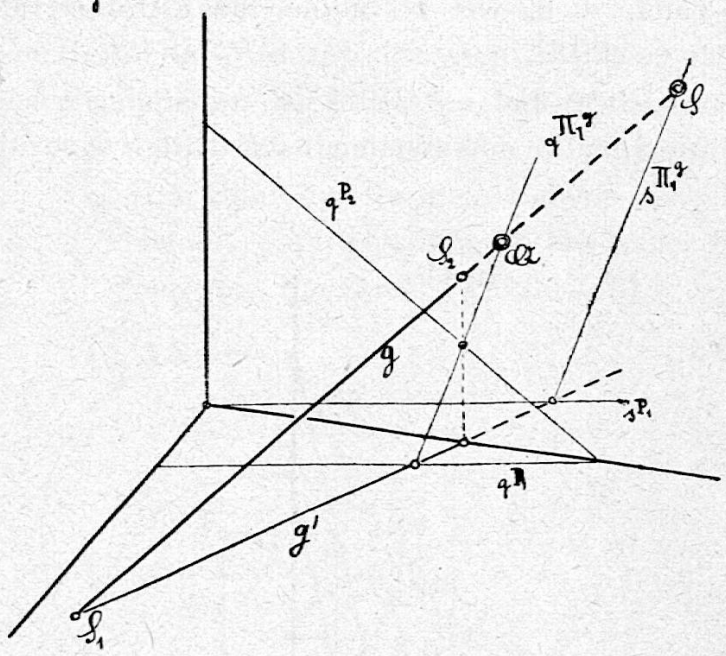
Aus zwei axonometrischen Projektionen des Punktes oder der Geraden lässt sich ohne weiteres die dritte, sowie das Bild selber bestimmen; ebenso ist durch zwei axonometrische Spuren der Ebene die dritte gegeben. Manche Aufgaben lassen sich mit diesen axonometrischen Daten direkt lösen; bei den meisten aber muss man zum Bilde eines Punktes seine Kote, zu dem der Geraden ihre Spur in der Tafel und ihr Q (Durchstosspunkt mit der Ebene des „Dreiseits q") haben; analog bei der Ebene: ihr s und q. Mit kurzen Worten: wir haben aus den axonometrischen Daten der drei Elementargebilde die Hauptdaten abzuleiten, um die Aufgabe lösen, d. h. nach bisherigem, bekanntem Verfahren durchführen zu können. Demgemäss reduziert sich uns die Axonometrie auf die nachstehend behandelten 6 Fundamentalaufgaben.

III. Aufgabenserie.



17. Gegeben eine Ebene **E** durch ihre axonometrischen Spuren s_1, s_2 und s_3. Gesucht ihr s und q. — Die Schnittpunkte der axonometrischen Spuren mit dem „Dreiseit q" liefern direkt die Linie q der Ebene **E**. Ihr s ziehen wir parallel zu q durch den Schnittpunkt einer ihrer axonometrischen Spuren mit der Spur der entsprechenden Koordinatenebene (Tafelspurpunkt der axonometrischen Spur von **E**). Es treten hiebei mannigfache Proben auf.

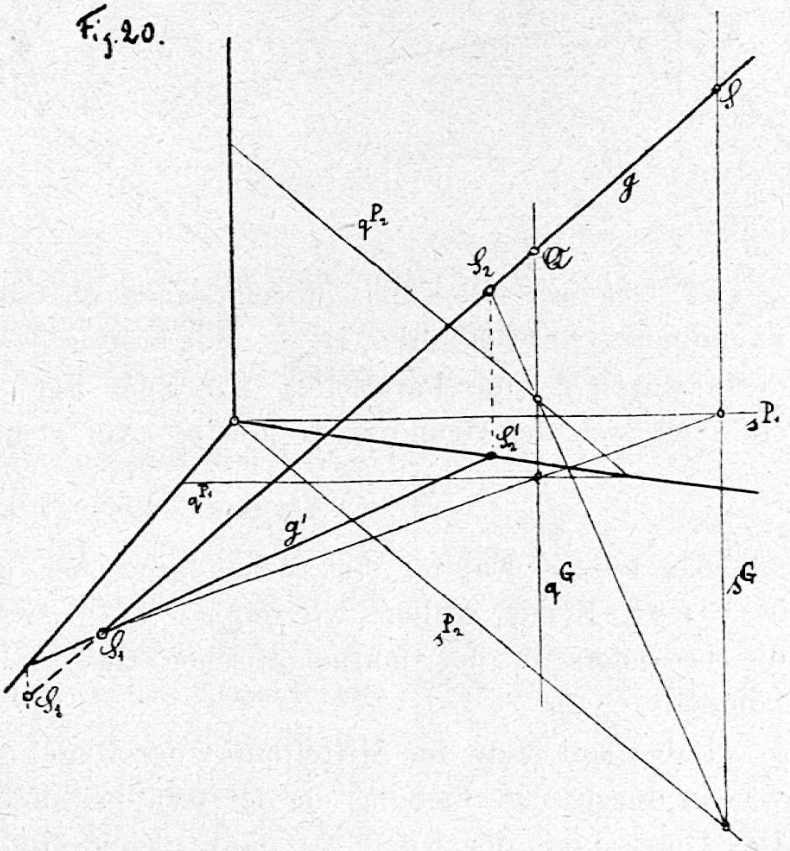
Fig. 19.



18. Gegeben eine Ebene **E** durch ihre Hauptdaten. Es ist ihr axonometrisches Spurendreieck zu bestimmen. (Umkehrung der vorigen Aufgabe. Gleiche Figur.) — Die axonometrischen Spuren der Ebene werden einfach als Schnittlinien von **E** mit den Koordinatenebenen bestimmt, wobei mehrfache Proben auftreten.

19. Gegeben eine Gerade g durch ihr Bild und den axonometrischen Grundriss g'. Die Hauptdaten der Geraden sind zu ermitteln. — Wir ermitteln das s und q der projizierenden Ebene $\Pi_1 g$, die ihren axonometrischen Grundriss bestimmt; die Schnittpunkte von g mit s und q dieser Ebene liefern das Gesuchte.

Fig. 20.



20. Gegeben eine Gerade g durch ihre Hauptdaten. Gesucht ihr axonometrischer Grundriss. — Wir bestimmen durch Einlegen einer Hilfsebene **G** (nach Aufgabe 1) die Durchstosspunkte von g mit der Grundriss- und einer zweiten Ebene der Oktanten. Wir bestimmen die erste axon. Projektion des letzterwähnten Punktes und haben jetzt für den Grundriss der Geraden zwei Punkte.

21. Gegeben ein Punkt durch sein Bild P und seinen axonometri-

schen Grundriss P'. Seine Kote $\mathfrak{p}$ ist zu bestimmen. — Wir legen durch P eine Ebene parallel zur Tafel, d. h. wir bestimmen das „Dreiseit $\mathfrak{p}$“, was am einfachsten dadurch geschieht, dass wir durch P eine Parallele p zur Spur der Grundrissebene ziehen und mit Hilfe des axonometrischen Grundrisses p' (durch P') ihre Spur in der zweiten oder dritten Koordinatenebene fixieren usw.

Fig. 21.

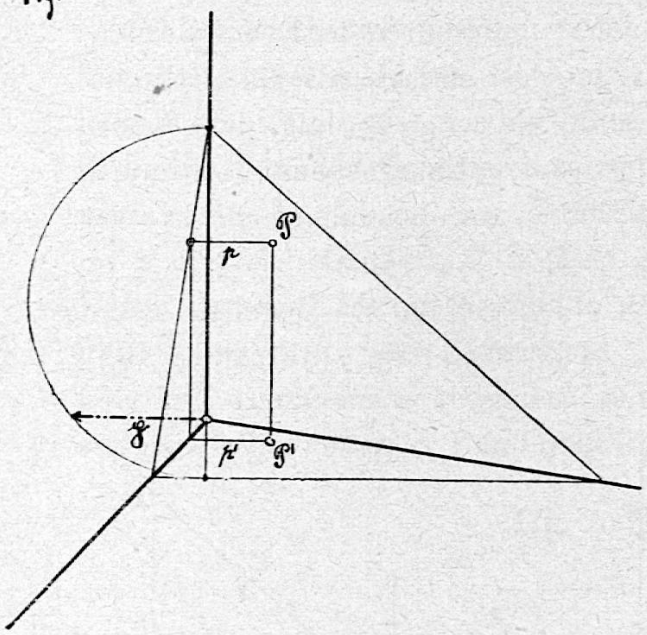
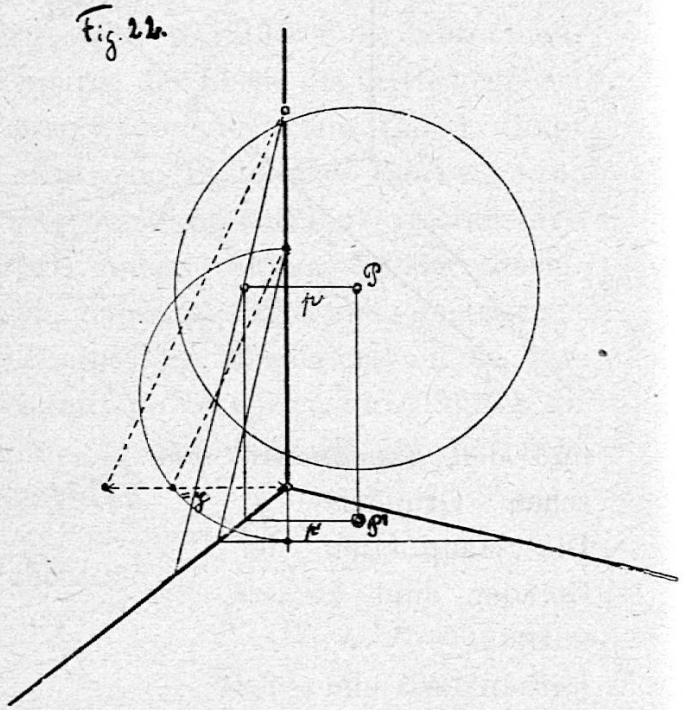


Fig. 22.



22. Gegeben ein Punkt durch seinen Distanzkreis $\mathfrak{p}$. Gesucht sein axonometrischer Grundriss P'. — Wir bestimmen das „Dreiseit $\mathfrak{p}$“, ziehen darin durch P eine Parallele p zur Spur der Grundrissebene und bestimmen noch den Grundriss p' von p. Auf p' liegt der gesuchte Punkt.

* * *

Als letztes Kapitel der Behandlung der darstellenden Geometrie in einer Ebene wollen wir einige Kugelaufgaben durchführen, die besonders in der mathematischen Geographie Verwendung finden können.

Dabei soll stets der Mittelpunkt der Kugel in der Tafel selber liegen, was ja durch Verschiebung der letztern jedesmal erreicht werden kann. Der Umrisskreis der Kugel ist dann gleichzeitig ihr Spurkreis, und die Spur einer jeden Grosskreisebene geht durch den Mittelpunkt desselben. Jeder Grosskreis fällt also durch die Umklappung mit dem Spurkreis der Kugel zusammen. Dieser ist orthogonal affin zur Bildellipse jedes Grosskreises in bezug auf den gemeinsamen Durchmesser (die grosse Achse der Ellipse) beider Kreise als Affinitätsachse.

Es ergeben sich unter der Voraussetzung dieser Annahme sofort folgende Sätze:

I. Die Kote eines Punktes der Kugeloberfläche ist die Halbsehne, die in der Projektion des Punktes senkrecht zur Verbindungslinie derselben mit dem Mittelpunkt gezogen wird. (Figur 23.)

II. Die Spur der Tangentialebene eines Punktes der Kugeloberfläche ist die planimetrische Polare seiner Projektion, als Pol, in bezug auf den Spurkreis. (Figur 23.)

Fig. 23.

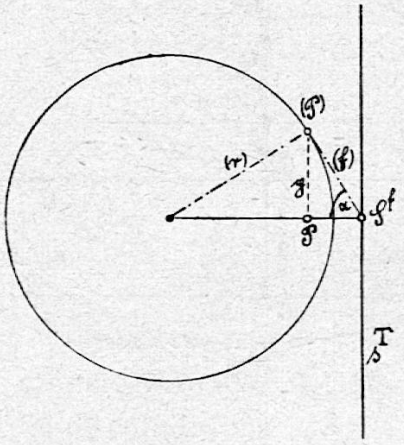
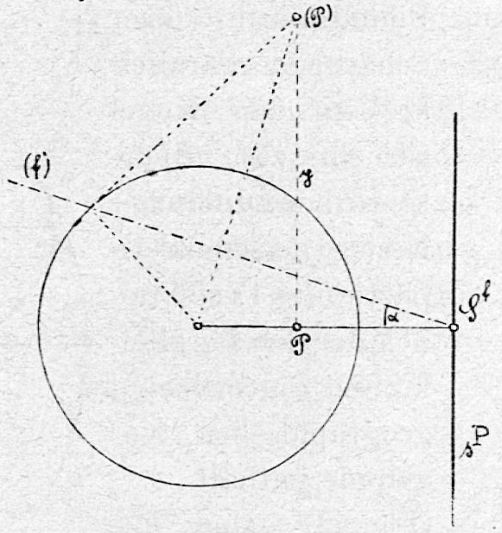
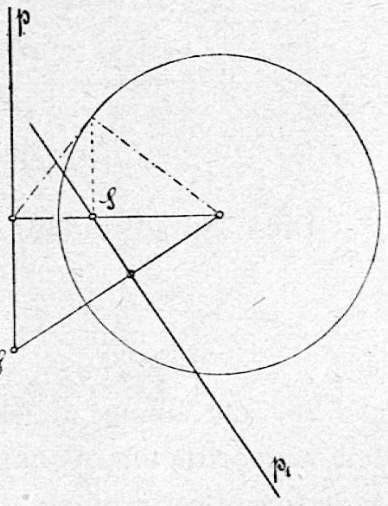


Fig. 24.



III. Die Spur der Polarebene eines gegebenen Punktes als Pol in bezug auf die Kugel ist die planimetrische Polare seiner Projektion, als (planimetrischen) Pol, in bezug auf den Spurkreis der Kugel. (Figur 24.)

Fig. 25.



IV. Die Bilder zweier zugeordneten Polaren der Kugel sind wechselseitig die planimetrischen Polaren ihrer Spurpunkte, als (planimetrische) Pole, in bezug auf den Spurkreis. (Figur 25.)

V. *a)* Die zum Bilde eines Kugeldurchmessers in einem Endpunkte desselben senkrecht gezogene Sehne des Spurkreises ist gleich der kleinen Achse der Bildellipse des diesem Durchmesser konjugierten Kugelgrosskreises. [Fig. 26:

$$O(B_2)\,B \cong (N)\,NO, \text{ weil } \sphericalangle\,(B_2)\,O(N) = 90^0,$$

also

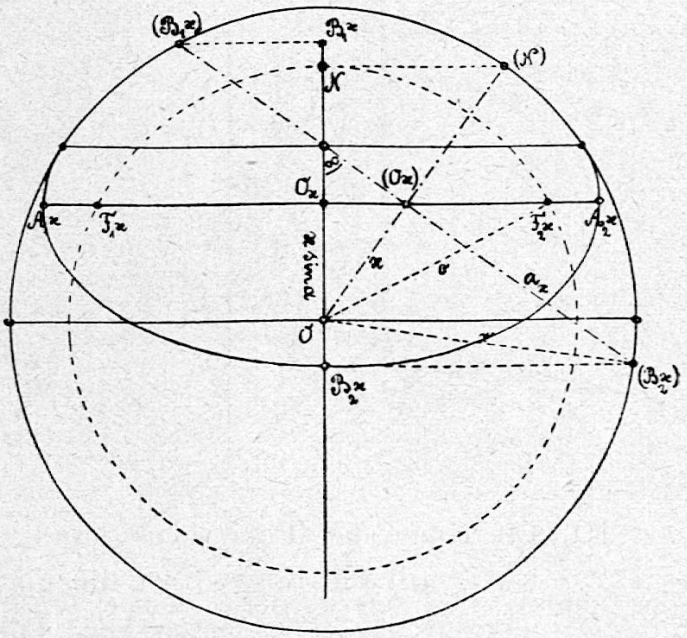
$$OB_2 = N(N).]$$

b) Der Abstand F_1F_2 der Brennpunkte einer Ellipse, als Bild eines Grosskreises der Kugel, ist gleich der Projektion des zu diesem Grosskreise konjugierten Kugeldurchmessers. [Figur 26:

$$\overline{ON}^2 = \overline{O(N)}^2 - \overline{N(N)}^2 \text{ oder: } \overline{ON}^2 = r^2 - b^2, \text{ d. h.}$$
$$ON = c = OF_1 = OF_2.]$$

VI. Der geometrische Ort der Brennpunkte der Bildellipsen einer Schar von Parallelkreisen der Kugel ist ein zum Spurkreis konzentrischer Kreis, dessen Peripherie die Projektionen der den Parallelkreisen zugeordneten geographischen Kugelpole enthält.

Fig. 27



[Fig. 27: sind F_1x F_2x die Brennpunkte der Ellipse als Bild des Parallelkreises im Abstand x vom Kugelmittelpunkt, so ist

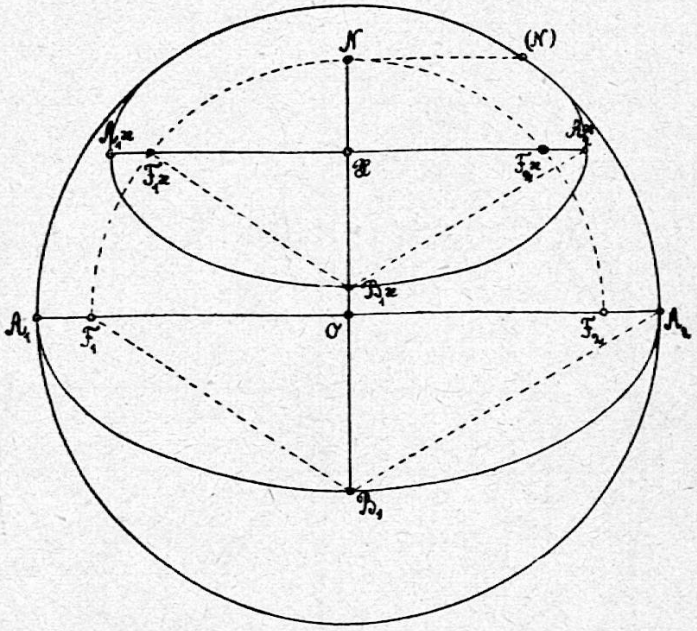
$$O^2 = (x \sin\alpha)^2 + \overline{O_x F_{2x}}^2 \text{ oder}$$
$$O^2 = (r^2 - a_x^2)\sin^2\alpha + a_x^2 \sin^2\alpha \text{ oder}$$
$$O^2 = r^2 \sin^2\alpha = \overline{ON}^2 \text{ d. h.}$$
$$O = ON, \text{ also } \textit{konstant}.]$$

Diese Sätze finden Anwendung in der

IV. Aufgabenserie.

28. Zu einem gegebenen Punkte der Kugeloberfläche als Nordpol den zugeordneten Äquator, sowie die Parallelkreise zu konstruieren. — Äquator: Bestimmung der Brennpunkte F_1 und F_2 mit Hilfe von Satz V*b*. Bestimmung der kleinen Achse OP_1 nach Satz V*a*. Parallelkreis im Punkte X der Kugelachse ON: Bestimmung der Brennpunkte F_1x und

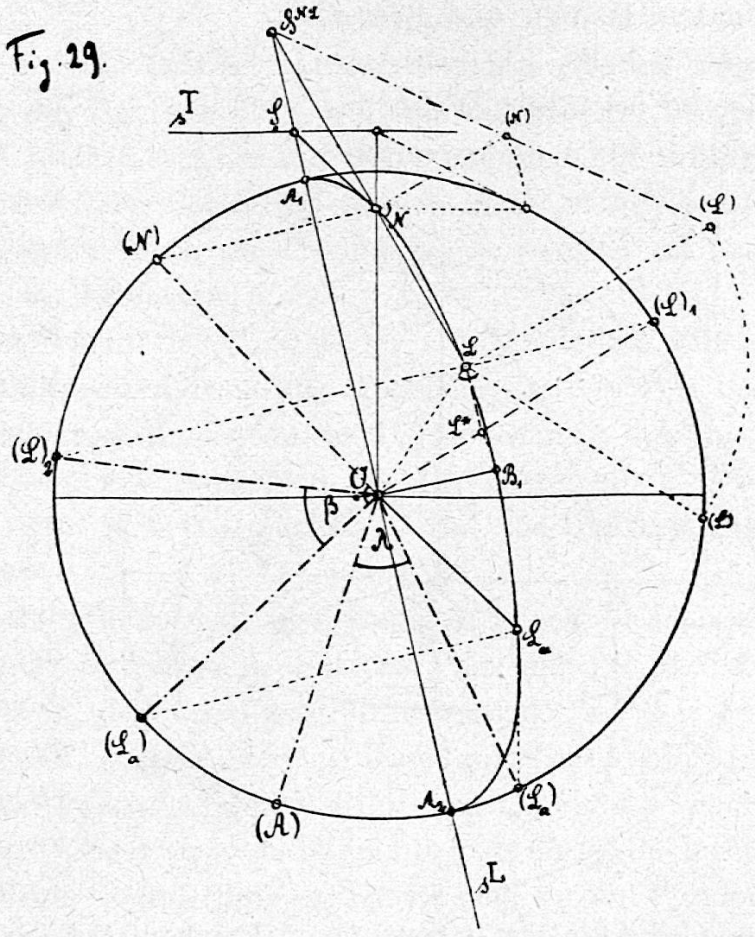
Fig. 28.



F_2x nach Satz VI; dann wegen der Ähnlichkeit der Ellipsen $F_1x\ B_1x \parallel F_1\ B_1$ und $B_1x\ A_2x \parallel B_1\ A_2$.

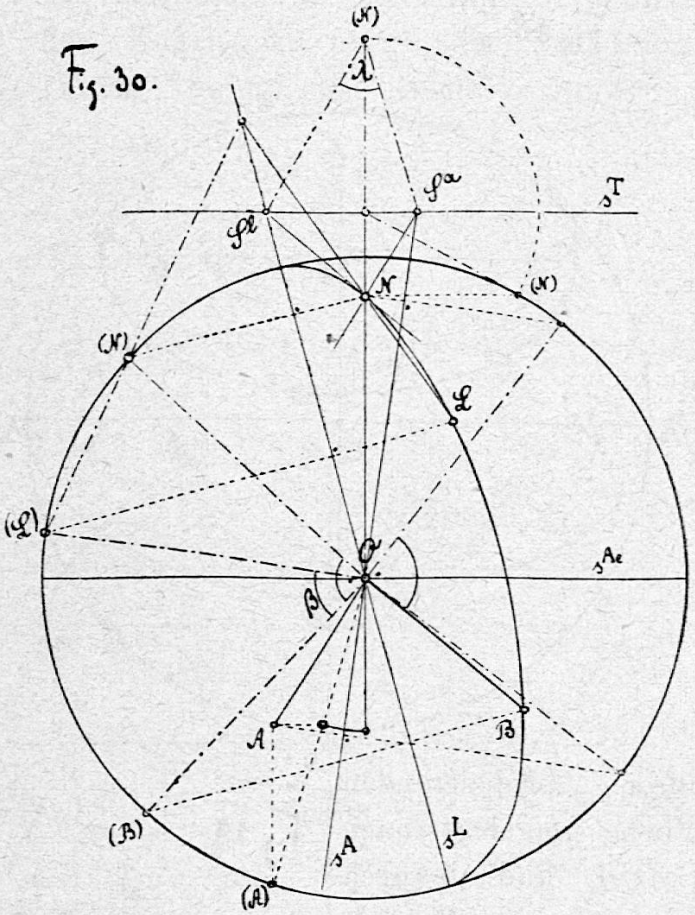
29. Gegeben ist der Nordpol einer Kugeloberfläche, sowie ein zweiter Punkt L derselben, ferner (in der Umklappung) der Koordinatenanfangspunkt (A) im Äquator. Es ist durch L der Meridian zu legen; sodann ist die geographische Breite β des Punktes zu bestimmen, und endlich seine Länge λ. — Die Gerade LN wird mit ihrer projizierenden Ebene umgelegt (nach Satz I) und dadurch ihre Spur S^{NL} bestimmt, die mit O verbunden, als Spur der Meridianebene die grosse Achse der Meridianellipse liefert. Ziehen wir $L(L)_1 \perp s^L$, und $LL^* \parallel s^L$, und verbinden O mit $(L)_1$, so ist nach einem bekannten Ellipsensatze $OL^* = OB_1\ (\perp s^L)$ die kleine Halbachse. Die Umklappung des Meridians liefert die geographische Breite und, da $O(L_a) \perp O(N)$, in (L_a) den (umgeklappten) Schnittpunkt des Meridans mit dem Äquator. Um L_a selber zu bestimmen, müssen wir die Tangente der Ellipse im Punkte N (als kon-

Fig. 29.



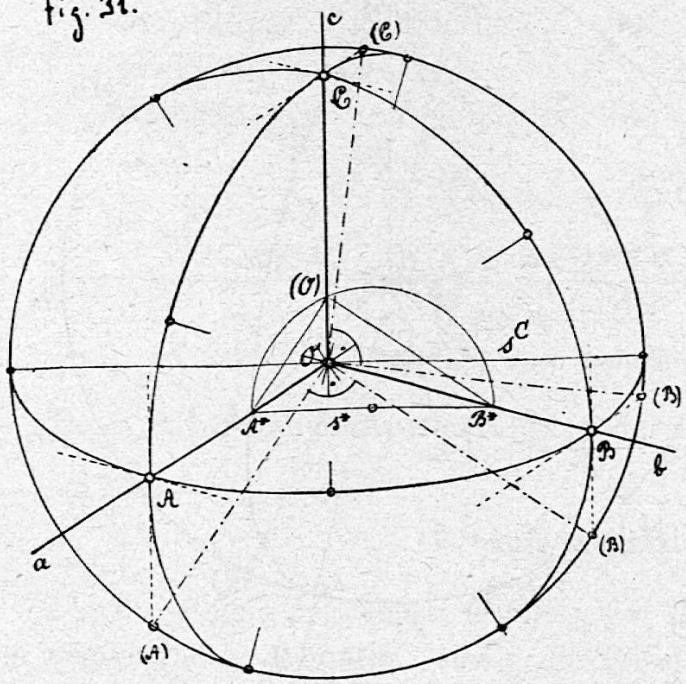
jugierte Richtung zu ON) kennen. Wir bestimmen die Spur s^T der Tangentialebene in N; sie schneide s^L in S; dann ist SN die gesuchte Tangente. Es ist ferner $OL_a \parallel SN$ und $(L_a)\ L_a \perp s^L$. Die Umklappung des Äquators liefert die geographische Länge λ.

Fig. 30.



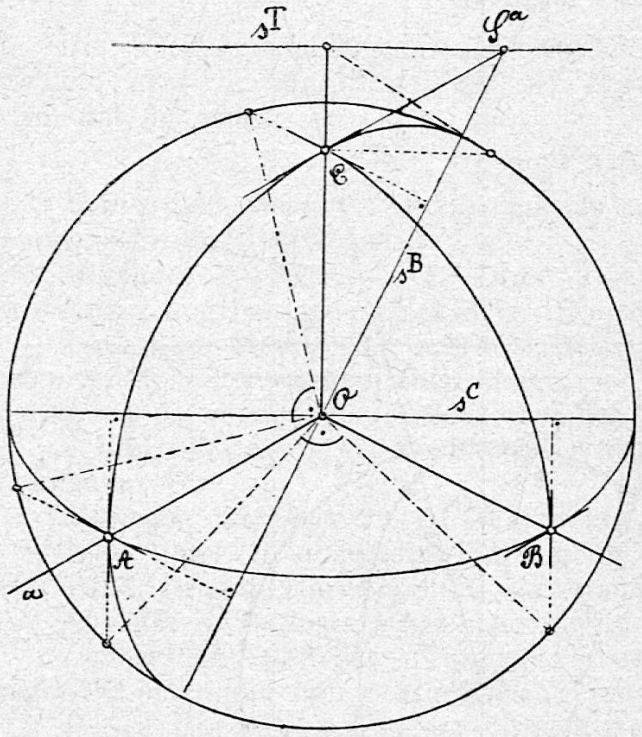
30. Gegeben der geographische Pol N einer Kugel und (in der Umklappung) der Koordinatenanfangspunkt (A) auf dem Äquator. Es ist ein Punkt L aufzutragen, der die geographischen Koordinaten (Länge und Breite) λ und β habe. Wir bestimmen in bekannter Weise das Bild A des Anfangspunktes, ziehen zu $OA \parallel NS^a$ und erhalten in S^a auf der Spur ${}_sT$ der Tangentialebene von N einen Punkt der Spur des Nullmeridians, mithin diese selbst. Wir klappen jetzt die Tangentialebene **T** selber um, tragen λ bei (N) an und erhalten in S^l einen Punkt der Spur (also die Spur s^L selbst) der Meridianebene durch L. Wir klappen diese Ebene um, tragen bei O an $(B)\ O \perp O(N)$, den Winkel β an und erhalten so (L). Die Aufklappung unter Benützung der Affinität liefert sowohl L selber als B (Schnittpunkt des Meridians mit dem Äquator) auf $OB \parallel S^l N$.

Fig. 31.



31. Die Zeichnung eines Kugeloktanten ist durchzuführen, wenn die

Fig. 32.



drei konjugierten Richtungen a, b, c im Bilde gegeben sind. — Wir ziehen $\perp c$ die Spurparallele s^* der Ebene ab, drehen diese zur Tafel parallel und erhalten mit Hilfe des Halbkreises über $A^* B^*$ in $(O)\ A^*$ und $(O)\ B^*$ die Richtungen der Strahlen a und b in der um s^C umgeklappten Diametralebene **C**. Wir ziehen alsdann

$$O(A) \parallel (O)A^*, \quad O(B) \parallel (O)B^*.$$

$$(A)A \parallel (B)B \parallel c,$$

liefern auf a und b die Eckpunkte A und B selber. Die Umklappung der Ebene **A** liefert den dritten Eckpunkt C. Da die Spuren der drei Ebenen resp. senkrecht zu a, b, c sind, erhalten wir ohne weiteres die grossen Achsen der Ellipsen, während die kleinen Achsen mit den gegebenen Richtungen zusammenfallen. Die Grössen der letzteren werden nach Satz V a bestimmt. Die Kurventangenten in A, B, C sind bezw. parallel zu den entsprechenden konjugierten Halbmessern.

32. Dieselbe Aufgabe, wenn der Halbmesser OC, sowie das Bild a einer zweiten, zu ihm senkrechten Richtung gegeben ist. — Wir bestimmen die Spur s^T der Tangentialebenen in C, ziehen $CS^a \parallel a$ und erhalten in S^a einen Punkt der Spur von **B**, also diese selbst. Die Umklappung um diese Spur liefert zunächst A und die Umklappung um s^C endlich auch B.

33. Gegeben die Gerade p ausserhalb der Kugel **M** durch die Hauptdaten. Es soll die zugeordnete Polare p_1 und das Paar der Tangentialebenen **A** und **B** durch p an die Kugel bestimmt werden. — Wir bestimmen die Normalebene $\mathbf{P}_1$ zu p aus dem Kugelmittelpunkt M. In ihr liegt die zugeordnete Polare p, deren Bild und Spur uns nach Satz IV bekannt sind. qP_1 liefert Qp_1. p_1 ist damit jetzt ebenfalls durch die Hauptdaten bekannt. Die Schnittlinie m der Ebenen $\mathbf{P}_1$ und **P** (oder Mp) ist die gemeinsame Normaltransversale der beiden Polaren p und p_1. Die Tangenten aus P an den in $\mathbf{P}_1$ liegenden Grosskreis der Kugel bestimmen mit p die gesuchten Tangentialebenen. A und B seien die Be-

rührungspunkte dieser Tangenten. Sie liegen auf der Polaren p_1 und werden durch Umklappung der Ebene $\mathbf{P}_1$ um ihre Spur bestimmt, und zwar A direkt, B durch die Erwägung, dass $P_1B = P_1A$ ist. Die Spuren der Tangentialebenen gehen durch die Spur von p und stehen bezw. senkrecht auf den Radien MA und MB. Mit A kann durch die gleiche Umklappung auch der Durchstosspunkt K von m mit der Kugel bestimmt werden. Die Tangenten PA und PB sind die Schnittlinien der Tangentialebenen **A** und **B** mit $\mathbf{P}_1$. Dies liefert eine nützliche Konstruktionsprobe.

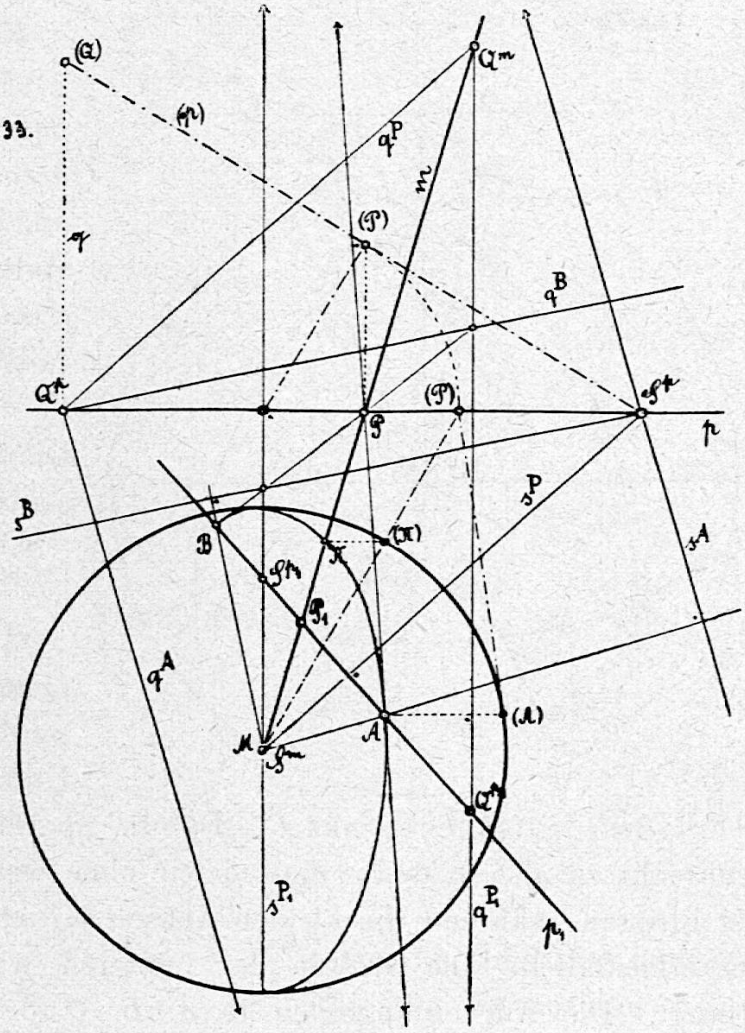



Fig. 33.