

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 16 (1906)
Heft: 5

Artikel: Dezimalteilung der Winkel und vierstellige Logarithmentafeln im Mathematikunterricht der Mittelschule
Autor: Otti, Hans
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-788948>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dezimalteilung der Winkel und vierstellige Logarithmentafeln im Mathematikunterricht der Mittelschule.

Von Dr. Hans Otti, Aarau.

Im vorletzten Winter hielt Herr Prof. Dr. Fehr in Genf in der Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen einen Vortrag über die Behandlung des Funktionsbegriffes im mathematischen Unterricht der Mittelschule. Aus der sich daran anschliessenden Diskussion ging hervor, dass einige Kollegen über den einfachen Begriff der Funktion hinausgehen und bis zu den Anfangsgründen der Infinitesimalrechnung vordringen. Von ihnen wurde denn auch die Differential- und Integralrechnung als Endziel des mathematischen Unterrichts an Gymnasien und Industrieschulen hingestellt. Schon in jener Versammlung wurde freilich hervorgehoben, dass dieses Ziel nur erreicht werden kann, wenn der Lehrstoff sorgfältig gesichtet wird, d. h. wenn einige Kapitel der bisherigen Schulmathematik aus dem Pensum gestrichen oder an späterer Stelle eingereiht werden, wo ihnen dann mit neuen Hilfsmitteln schneller beizukommen ist.

In den folgenden Ausführungen möchte ich zeigen, dass auch in technischer Hinsicht Reformen möglich sind, die dazu beitragen werden, das angedeutete Programm leichter zu bewältigen. Es ist ein Gebot der Ökonomie, stets diejenigen Mittel zu verwenden, welche in kürzester Zeit und mit einem Minimum von mechanischer und geistiger Arbeit zum Ziele führen.

Es ist aber unökonomisch, mit Sexagesimalbrüchen zu rechnen, wenn dabei trotz des grösseren Zeitaufwandes mehr Rechnungsfehler unterlaufen als bei Dezimalbrüchen. Es ist unökonomisch, ja ich möchte lieber sagen töricht, siebenstellige Logarithmentafeln zu verwenden, wenn die der Rechnung zu grunde gelegten Zahlen nur auf einige Prozent oder Promille genau sind.

Aus einer Enquête über die an schweizerischen Mittelschulen gebrauchten Logarithmentafeln geht hervor, dass von 40 Lehranstalten 16, also 40%, mehr als fünfstellige Tafeln verwenden. (15 besitzen siebenstellige und eine hat sechsstellige.) Dezimale Teilung des Winkels kommt nirgends vor. Andererseits sind in Deutschland bereits in über 100 Gymnasien vierstellige Logarithmen zugleich mit dezimaler Teilung des alten Grades in Gebrauch. Auch anderwärts ist die sexagesimale Winkelteilung für manche Zwecke schon längst durch eine dem dekadischen Zahlensystem angepasste Teilung ersetzt.

Es ist daher wohl angezeigt, auch bei uns die Fragen zu diskutieren, ob eine Dezimalisierung der Winkelmasse für die Schule zulässig ist und ob vierstellige Logarithmentafeln genügen. Die Behandlung des Gegenstandes in einer allen sich darum interessierenden Kreisen zugänglichen Zeitschrift dürfte geeignet sein, die Diskussion, welche in der nächsten Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen stattfinden soll, in günstiger Weise vorzubereiten, und ich ersuche die Herren Kollegen, die Reformvorschläge ebenfalls ernstlich zu prüfen und mir eine Meinungsäußerung eventuell schon vor der nächsten Zusammenkunft zukommen zu lassen.

1. Zur Dezimalteilung des Winkels.

Die Bestrebungen, die vom Altertum überlieferte sexagesimale Kreisteilung aufzugeben und ein dem dekadischen Zahlensystem angepasstes Teilungsprinzip einzuführen, sind nicht neu, und es existiert darüber bereits eine recht umfangreiche Literatur. Ich begnüge mich damit, auf folgende Arbeiten zu verweisen:

1. De la décimalisation du temps et de la circonférence, von Ernest Pasquier, Professor an der Hochschule in Löwen.¹⁾
2. Berichte über die Winkelteilung, im Namen der Tafelkommission der deutschen Mathematikervereinigung erstattet von R. Mehmke in Stuttgart.²⁾
3. Notice historique sur la fondation du système métrique, par M. Bassot.³⁾
4. Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation, par M. E. Guyou.⁴⁾
5. Zur Dezimalteilung des Winkels, von Dr. A. Schülke.⁵⁾

Reiche Literaturangaben finden sich namentlich in den beiden zuerst genannten Arbeiten. Unsere Aufgabe muss es nun sein, zu untersuchen,

¹⁾ Extraits des mémoires de l'union des ingénieurs de Louvain 1900.

²⁾ Mathematikervereinigung VIII. Bd. 1900.

³⁾ Annuaire du bureau de longitudes, pour l'an 1901.

⁴⁾ Annuaire du bureau de longitudes, pour l'an 1902.

⁵⁾ Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht 1896, pag. 339 u. 1899, pag. 630.

welches von den in Gebrauch befindlichen oder vorgeschlagenen Systemen der Winkelteilung für die Zwecke der Mittelschule das passendste ist. Stellen wir sie daher vorerst übersichtlich zusammen:

1. Sexagesimalsystem, seit dem Altertum in Gebrauch. Der volle Winkel ist in 360 Grade geteilt, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, die Sekunde in 60 Tertien usw. Die Tertien und Quarten etc. werden nicht mehr gebraucht, sondern überall in Dezimalen der Sekunden angegeben.

2. Der volle Winkel in 360 Grade, ein rechter Winkel also in 90 Grade wie vorhin, der Grad aber weiter dezimal geteilt. Nach Sigmund Günther hat ein dem Namen nach unbekannter deutscher Kosmograph diese Teilung bereits im 15. Jahrhundert vorgeschlagen. 1585 wurde der Vorschlag von Simon Stevin, dem Erfinder der Dezimalbrüche, wiederholt. Tafeln in diesem System wurden zuerst von Briggs berechnet und 1633, zwei Jahre nach dessen Tode, in der *Trigonometria Britannica* von Gellibrand veröffentlicht. Heute findet das System in deutschen Lehrerkreisen lebhaftes Befürworten, und, wie schon gesagt, finden in mehr als hundert Gymnasien vierstellige Logarithmentafeln mit Dezimalteilung des alten Grades Verwendung.

3. Centesimalsystem. Der rechte Winkel in 100 Grad, der Grad in 100 Minuten etc. geteilt, der volle Winkel also in 400 Grade. Dieses System wurde schon 1783 von Karl Schulze in seiner *Dreiecksmesskunst* empfohlen. Die ersten Tafeln aber sind erst 1799 von Joh. Philipp Ideler herausgegeben worden. Es darf hier noch erwähnt werden, dass die dezimale Teilung des Quadranten die Grundlage des ganzen metrischen Systems bildet, indem ja das Kilometer einer Bogenminute dieser Teilung auf dem Erdmeridian entspricht, gleich wie die Seemeile zu einer Bogenminute alter Teilung gehört. Der Zusammenhang der Winkelteilung mit den Längenmassen liegt also in dem Gedanken, die nautischen Masse mit den astronomischen in Übereinstimmung zu bringen.¹⁾

4. Teilung des ganzen Kreisumfanges in 100 Teile. Tafeln in diesem System sind 1891 von J. de Mendizábal Tambarrel herausgegeben worden. Diesem Teilungsprinzip wird von den Astronomen gerne das Wort geredet.

5. Teilung des halben Kreisumfanges in 100 Teile, der rechte Winkel also in 50. Von Bouquet de la Grye 1896 vorgeschlagen (die weitere Teilung dezimal).

¹⁾ Vergl. P. S. Laplace, *Exposition du système du monde*, pag. 72 u. 73, in der 3. Aufl.

6. Der ganze Umfang in 240 Teile, ein Teil weiter in 100 etc. Vorgeschlagen von Henri de Sarrauton: *L'heure décimale et la division de la circonférence*. Paris 1897.

Jedes System hat natürlich gewisse Vorteile und es kommt nur darauf an, von welchem Gesichtspunkte aus die Reform betrachtet wird. Von vorneherein hat man sich zu entscheiden, ob man die Zeitmasse mit hereinbeziehen will oder nicht. Es ist ja nicht zu leugnen, dass die Winkelmasse und die Zeitmasse in gewissen Gebieten (Astronomie und Nautik) in enger Beziehung zu einander stehen. Die Angabe der astronomischen Uhr kann eine mittlere Zeit, eine Sternzeit oder einen Winkel bedeuten. In Wirklichkeit freilich ist sie eine Winkelgrösse und keine Zeitgrösse, und die Messinstrumente sollten daher Winkelmasse statt Zeitmasse angeben.¹⁾

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend hat die französische Marine Versuche angestellt mit 400teiligen Instrumenten; die Ephemeriden, Karten und Chronometer waren ebenfalls dem Centesimalssystem angepasst. Die Offiziere anerkannten fast einstimmig, dass die Neuerung ohne Übergangsperiode eingeführt werden könne, sobald die notwendigen Instrumente, Tabellen und Karten zur Verfügung gestellt werden.

Dem Bestreben, die Winkelteilung und die Zeiteilung gleichartig zu gestalten, entspringen die Vorschläge, den ganzen Kreis in 100 oder 240 Grade zu teilen. Dem ersten Prinzip entspricht die Einteilung des Tages in zehn Stunden, dem zweiten die Einteilung in 24 Stunden. Dem Centesimalssystem entsprechen 40 Stunden, ein Vorschlag, der ebenfalls schon gemacht worden ist.

Die Winkelteilung darf aber doch nicht mit der Zeiteilung verquickt werden. Die Teilung des Tages in 24 Stunden ist dieselbe für alle zivilisierten Länder. An einer Änderung hat das Publikum kein Interesse; eine solche würde den grössten Schwierigkeiten begegnen. Auch die Physiker würden kaum geneigt sein, das glücklich errungene internationale C. G. S. System aufzugeben oder schon wieder abzuändern. Des Fernern ist nicht zu vergessen, dass die Rechnungen, worin Winkelgrössen und Zeitgrössen zusammen auftreten, doch eine verschwindend kleine Zahl bilden gegenüber denjenigen, welche nur Winkelgrössen enthalten. Die Trigonometrie bildet überhaupt einen so wichtigen Teil der ganzen Mathematik, dass sie, wie Mehmke treffend bemerkt, das Recht beanspruchen darf, die sie am nächsten berührende Frage der

¹⁾ Vergl. M. E. Guyou, *Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation*, *Annuaire du bureau de longitudes* 1902, pag. 7 u. 8.

Winkelteilung von sich aus und nach ihren eigensten Bedürfnissen zu regeln. Das zweckmässigste System ist aber dasjenige, welches den rechten Winkel zur Einheit nimmt und diese Einheit weiter dezimal teilt, also das Centesimalsystem. In der Tat spielt der rechte Winkel in der ganzen reinen und angewandten Mathematik eine so wichtige Rolle, dass er sich als Einheit des Winkelmasses geradezu aufdrängt. Hören wir einige Stimmen darüber:

Hoüel: Pour tout ce qui concerne la mécanique céleste, la géodésie, la topographie, la physique et les déterminations numériques que l'on rencontre dans l'étude des mathématiques pures le quadrant est l'unité naturelle, indiquée de la manière la plus claire par l'examen des procédés pratiques aussi bien que par les diverses théories du calcul intégral qui conduisent aux transcendentes circulaires et à celles qui leur sont analogues. (Compte rendu de l'académie des sciences d. Paris 1870.)

Laplace dans son système du monde:

L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan et de la hauteur des objets sur l'horizon. C'est d'ailleurs dans le premier quart de la circonférence que se forment les sinus et généralement toutes les lignes que la triangulation emploie et dont les rapports avec le rayon ont été réduits en tables; il était donc naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles et le quart de la circonférence pour l'unité de leur mesure. On la divisa en parties décimales et pour avoir des mesures correspondantes sur la terre on divisa dans les mêmes parties le quart du méridien terrestre. Il ne s'agissait plus que d'avoir exactement la longueur.

Hören wir auch, wie sich Laplace über die dezimale Teilung ausspricht:

L'identité du calcul décimal et celui des nombres entiers ne laisse aucun doute sur les avantages de la division de toutes les espèces de mesure en parties décimales; il suffit pour s'en convaincre de comparer les difficultés des multiplications et des divisions complexes avec la facilité des mêmes opérations sur les nombres entiers, facilité qui devient plus grande encore au moyen des logarithmes dont on peut rendre par des instruments simples et peu coûteux l'usage extrêmement populaire. A la vérité notre échelle arithmétique n'est point divisible par 3 et par 4, deux divisions que leur simplicité rend très usuelles. L'addition de deux nouveaux caractères eut suffi pour lui procurer cette avantage, mais un changement aussi considérable aurait été infailliblement rejeté avec le système de mesure qu'on lui aurait subordonné. D'ailleurs

l'échelle duodécimale a l'inconvénient d'exiger qu'on retienne les produits des 12 premiers nombres ce qui surpasse l'ordinaire étendue de la mémoire à laquelle l'échelle décimale est proportionnée. Enfin on aurait perdu l'avantage qui probablement donna naissance à notre arithmétique, celui de faire servir à la numération les doigts de la main. On ne balança donc point à adopter la division décimale et pour mettre de l'uniformité dans le système entier de mesure, on résolut de les dériver toutes d'une mesure linéaire et de ses divisions décimales. La question fut ainsi réduite aux choix de cette mesure universelle à laquelle on donna le nom de mètre.

Sobald das dekadische Zahlensystem in seiner heutigen Form allgemein eingeführt war, musste jedes andere Teilungsprinzip als das dezimale, was für Grössen auch in Betracht kommen mochten, die Rechnung erschweren, schon desshalb, weil ja überhaupt nie vollständig in einem anderen Zahlensystem gerechnet werden kann, schriftlich wenigstens, da ja die Zahlen im dekadischen System geschrieben werden. Etwas anderes wäre es, wenn auch in den anderen Systemen die Null und der Stellenwert benutzt würden. Ist dies nicht der Fall, so wird die Rechnung umständlich. Das Lösen eines Dreisatzes galt vor der Einführung der Stellungsarithmetik als Kunststück, weshalb sich die Griechen häufig graphischer Methoden bedienten. Siehe auch die Sexagesimalrechnung in den Scholien zu Euklids Elementen von Friedrich Hultsch in Dresden, Bibliotheca mathematica. 3. Folge. 5. Bd. 3. Heft.

Sobald Rechnungsoperationen mit reinen Winkelgrössen ausgeführt werden müssen, treten auch in den oberen Gymnasialklassen sehr häufig Fehler auf. Umrechnung der Winkel von Bogenmass in Winkelmass und umgekehrt, Addition und Subtraktion von Winkeln, Bildung der Komplements- und Supplementswinkel geben immer Anlass zu langweiligen Rechnungsfehlern. Man kann hier einwenden, dass man gerade deswegen allen Grund habe, solche Operationen recht fleissig zu üben, da man ja nicht von heute auf morgen mit dem bisherigen System vollständig brechen könne und viele Abiturienten, welche an das Polytechnikum abgehen, doch noch damit rechnen müssen. Ich komme später wieder auf diesen Punkt zu sprechen, hier soll nur konstatiert werden, dass die genannten Operationen im Zehnersystem ungemein viel rascher und sicherer ausgeführt werden können, als im Sexagesimalsystem. Diese grossen Vorzüge werden übrigens allgemein zugegeben, aber leider nicht auch allgemein ihrer Bedeutung entsprechend gewürdigt.

Freilich ist das Rechnen auf der Mittelschulstufe weniger Selbst-

zweck als Mittel zum Zweck. Deswegen ist es aber doch nicht gleich gültig, wie die Rechnungsergebnisse erhalten werden; es ist im Gegenteil gerade deshalb der kürzeste Weg einzuschlagen, der ja in diesem Falle auch der sicherste ist. Da jede Theorie durch möglichst viele Aufgaben belebt und nach allen Seiten hin beleuchtet werden muss, darf weder das schriftliche noch das mündliche Rechnen vernachlässigt werden.

Häufig genug hört man die Klage, dass unsere höheren Schüler im Kopfrechnen keine Übung besitzen. Den Grund sucht man gerne in der Verwendung der Dezimalbrüche und eifert daher gegen die Dezimalisierung der Masse; mit Unrecht, denn die Schuld liegt wohl mehr im Stellenwert und der Null als im Dezimalsystem selbst. Manche Schüler führen die Multiplikationen und Divisionen, ja oft die Ausrechnung ganzer Formeln auch mündlich durchaus nach dem schriftlichen Verfahren aus, indem sie sich eben das geschriebene Bild vorstellen. Deshalb geben sie denn auch das Resultat in Dezimalbruchform an. Beim Zwölfer- oder Sechsersystem mit Null- und Stellenwert wären die Erscheinungen gewiss dieselben. Was speziell die Winkelteilung anbelangt, so darf bemerkt werden, dass sich die trigonometrischen Rechnungen für das Kopfrechnen wenig eignen, sofern es sich nicht um spezielle Aufgaben oder grobe Abschätzungen handelt.

Die Brüche, deren Nenner Potenzen der Grundzahl darstellen, sei es nun im Dezimal- oder Duodezimalsystem, bilden nun einmal ein bequemes Mittel, eine Grösse mit beliebiger Genauigkeit anzugeben. Mit ein oder zwei Dezimalstellen gewinnt man eine ebenso gute, oft auch viel bessere Vorstellung von der Grösse einer Zahl als mit den meisten anderen Brüchen. Auch die ägyptischen Stammbruchreihen dürften praktisch wenig bequem sein.

Weit nachteiliger als die Dezimalbrüche und die Zehnteilung der Masse wirkt der Gebrauch der Logarithmen auf das Kopfrechnen ein. Entbehren kann man natürlich die Logarithmentafeln am Gymnasium nicht, aber jedenfalls sind keine siebenstelligen notwendig; denn diese bringen etwas Lähmendes, ja geradezu Geisttötendes in den Unterricht hinein. Um die zur Lösung einer einzigen Aufgabe notwendigen Logarithmen zusammenzustellen, muss der Schüler oft stundenlang blättern und Zahlen schreiben. Zu einem Überschlag im Kopfe, d. h. zu einer Abschätzung des Resultates ist keine Zeit vorhanden und doch ist das richtige Abschätzen weit bildender als das Errechnen eines möglichst genauen Resultates mit vielstelligen Logarithmentafeln.

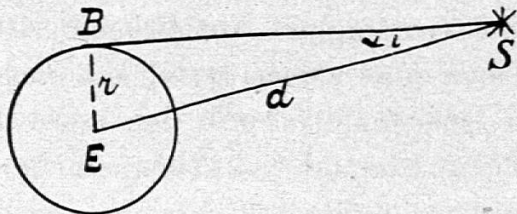
Die grosse Genauigkeit ist übrigens sehr oft illusorisch oder für Schulzwecke ganz unnütz, wie ich noch zeigen werde.

Die Sexagesimaltheilung war nur so lange berechtigt, als man die Stellungenarithmetik nicht kannte und daher eine Grundzahl mit möglichst vielen Theilern, wie das bei 60 der Fall ist, die Rechnung erleichterte, solange als überhaupt alle Masse der 60-Teilung unterworfen wurden und man statt der Kreisfunktionen Sinus und Cosinus etc. allein die Sehnen benutzte. Der Winkel von 60 Grad, dessen Sehne dem Radius gleich ist, war in diesem Falle die natürliche Einheit.

Die Benutzung der dezimalen Bruchtheile, wie im Übrigen auch die Einheit beschaffen sein mag, an Stelle der sexagesimalen, bietet den Vorteil, dass die Interpolation bei allen Tafeln dieselbe wird. Ungemein viel leichter gestalten sich die Rechnungen mit sehr kleinen Winkeln. Da die Funktionen kleiner Winkel den Winkeln selbst proportional gesetzt werden können, so lassen sich die Logarithmen durch blosse Änderung der Kennziffer bestimmen. Es ist z. B. $\log \sin 0,0138^\circ = \log \sin \frac{1,38^\circ}{100} = \log \sin 1,38 - 2$, ebenso $\log \operatorname{tg} 0,0025^\circ = \log \operatorname{tg} 0,25^\circ - 2$.

Dieser Vorteil möge durch die folgende einfache Aufgabe noch besser hervorgehoben werden:

Die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne ist $8,8''$ und ihr scheinbarer Durchmesser $32'$. Wie viele Erdradien betragen demnach ihre mittlere Entfernung und ihr Radius?

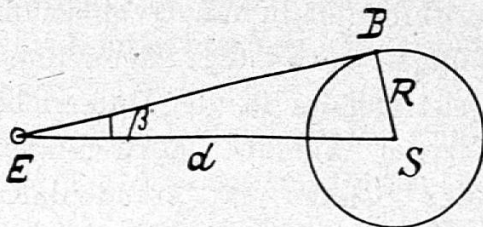


$$\alpha = 8,8'' = 0',1466... = 0^0,002444...$$

$$\beta = 16' = 0^0,2666...$$

$$d = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot r$$

Aus der Tafel entnehmen wir $\log \sin 0,00244... = \log \sin \frac{2^0,444...}{1000}$



$$\log \frac{1}{\sin \alpha} = 0 - (0,5299 - 5)$$

$$\begin{array}{r} = 4,3701 \\ \hline d = 23440 \cdot r \end{array}$$

$$R = \frac{r \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\log \sin \beta = 0,6076 - 3$$

$$\log \sin \alpha = 0,6299 - 5$$

$$\hline 2,0377$$

$$R = 109,08 \cdot r$$

Der letzte Wert $R = 109\ r$ ergibt auch direkt aus dem Verhältnis der Winkel $= \frac{16 \cdot 60}{8,8} = 109,09$. Da sich $8,8''$ auf den Äquatorhalbmesser bezieht, so sollte geschrieben werden: $d = 23440\ a$ und $R = 109\ a$, wo $a = 6378\text{ km.}$, während $r = 6370\text{ km.}$

Benutzt man Tafeln mit Sexagesimalteilung, so muss man entweder den Sin. des kleinen Winkels durch den Bogen ersetzen oder die Zahlen S und T verwenden. Die letztere Methode ist jedenfalls für Schulen kaum zu empfehlen, lösen wir daher die Aufgabe nach der ersten:

$$d = \frac{r}{\sin \alpha} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \alpha : 180 = b : \pi \\ b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$d = r \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{8,8 \cdot \pi}$$

log 3600 = 3,55 630	log 8,8 = 0,94 448
log 180 = 2,25 527	log π = 0,49 715
5,81 157	1,44 163
log $d = 4,36\ 994$	<u>$d = 23439\ a.$</u>

Dieses umständliche Verfahren muss eingeschlagen werden, auch wenn eine Tafel zur Verfügung steht, welche die log der Funktionen kleiner Winkel von Sekunde zu Sekunde enthält, da die Interpolation wegen der grossen Differenzen unzuverlässig ist. Nach der siebenstelligen Tafel von Vega ist:

$$\begin{array}{r} \log \sin 8,8'' = 5,588\ 6649 - 10 \\ \quad \quad \quad + 40\ 9140 \\ \hline = 5,629\ 5789 - 10 \end{array}$$

$$\log \frac{1}{\sin 8,8''} = 4,370\ 4211$$

$$\hline d = 23465\ a.$$

Dieses Ergebnis ist aber weniger gut als $23440\ a$, da $23439\ a$ richtig ist. Die vierstellige Tafel mit dezimaler Teilung des Grades ist also hier vorteilhafter.

An diese Aufgabe möchte ich, meiner zweiten Frage: Genügen vierstellige Logarithmentafeln, vorgreifend, die folgende Bemerkung anknüpfen: die Grösse $8,8''$ für die Horizontalparallaxe stellt einen Mittelwert aus einer grossen Reihe von Beobachtungsergebnissen dar und ist erst seit 1896 international vereinbart. Er entspricht nur zweimal im Jahre den tatsächlichen Verhältnissen, da sich ja die Entfernung

zwischen Erde und Sonne fortwährend ändert. Es kann sich daher, soweit die Schule in Betracht kommt, nur um die Grössenordnung der Zahl handeln. Die Vorstellung der Grösse und die Einsicht in die tatsächlichen Verhältnisse sind gewiss ebenso gut, wenn wir setzen $d = 23440 a$ oder auch $d = 23450 a$, als wenn wir den etwas genaueren Wert $d = 23439 a$ annehmen. Ganz ähnlich steht es mit vielen andern Konstanten. Vierstellige Tafeln genügen daher vollkommen. Mit Tafeln, welche die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von 0,01 zu 0,01 Grad angeben, werden die trigonometrischen Rechnungen fast doppelt so genau als mit Tafeln, welche nur Minuten enthalten. Dieser Umstand spricht sowohl zu gunsten der Dezimalteilung, wie auch zu Gunsten vierstelliger Logarithmentafeln.

Von allen Systemen bietet dasjenige, welches den rechten Winkel zur Einheit nimmt, noch Vorteile, die nur ihm allein zukommen:

1. Der rechte Winkel ist die gegebene natürliche Einheit.
2. Inniger Zusammenhang mit den Längenmassen.

3. Jede Reduktion auf den ersten Quadranten reduziert sich auf die Subtraktion der Zahlen 1, 2 oder 3, z. B. $a = 2,4375 R.$ Zur Reduktion braucht man bloss die 2 wegzulassen, und man hat $0,4375 R.$ Das Addieren und Subtrahieren von zwei Rechten reduziert sich auf das Addieren und Subtrahieren der Zahl 2, ob dabei der hundertste Teil des Quadranten als Centesimalgrad bezeichnet werde oder nicht, bleibt sich gleich. $\sin. 226^\circ 57' = - \sin. 26^\circ 57'.$ Beim Sexagesimalsystem müssen die Zahlen 90, 180 und 270 addiert und subtrahiert werden, was doch schon weniger einfach ist. Daher ist auch die Bildung der Komplements- und Supplementswinkel im Centesimalsystem noch einfacher als im Sexagesimalsystem mit dezimaler Teilung des Grades. Mehmke macht noch darauf aufmerksam, dass, wenn man

4. den rechten Winkel zur Einheit nimmt und der Zehnteilung unterwirft, sich dann jeder Winkelausdruck aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruch zusammensetzt, ähnlich wie ein gewöhnlicher Logarithmus aus Kennziffer und Mantisse und die Addition oder Subtraktion einer beliebigen Anzahl Quadranten entspricht der Änderung der Kennziffer beim Logarithmus.

Das Centesimalsystem erscheint also nicht bloss als das natürlichste, es bietet auch beim Rechnen von allen die grössten Vorteile. Dass darin die Winkel von 60° und 30° alter Teilung in der irrationalen Form $0,666^\circ \dots$ und $0,33^\circ \dots$ enthalten sind und ausserdem in den Tafeln gar nicht vorkommen, kann nicht ernstlich als Nachteil betrachtet

werden, sind doch deren Funktionen zum Teil wirklich irrational. Man kann ja auch schreiben $\frac{2}{3} R$ und $\frac{1}{3} R$.

Wenn wir daher die Systeme nach ihrer Zweckmässigkeit für praktische Rechnungen ordnen, so ist das Centesimalsystem an die Spitze zu stellen, in zweiter Linie kommt das alte Sexagesimalsystem mit dezimaler Teilung des Grades. Die andern Systeme haben vor dem letztern keine Vorzüge, sie kommen daher wohl nicht ernstlich in Betracht. Höchstens würde das System 1 voller Winkel $= 100^\circ$ da vorteilhafter sein als die andern, wo in den Rechnungen Winkel auftreten, die grösser sind als vier Rechte (Mechanik, Astronomie). Dies sind aber doch Spezialgebiete, und die Zahl der Fälle, wo diese Teilungsart wirklich wünschbar wäre, ist doch sehr klein.

Die Vorzüge des Centesimalsystems haben ihm grosse Verbreitung verschafft bei den Feldmessern, Topographen und Geodäten. Es ist für geodätische Arbeiten ausschliesslich in Gebrauch in Frankreich, Belgien, Baden und Württemberg; ferner ist es eingeführt in Rumänien, Serbien, in der Türkei, in Japan, Chile und Argentinien, also in allen Ländern, wo keine Tradition der Einführung hindernd im Wege stand. Auch in der Schweiz scheint es dem alten System den Rang abzulaufen. Nach einer persönlichen Mitteilung des Herrn Kern verfertigt die rühmlichst bekannte Firma Kern & Cie. in Aarau jetzt 90 % 400teilige Winkelinstrumente und bloss noch 10 % mit Sexagesimalteilung.

Kann es auch in der Schule eingeführt werden?

Solange noch in allen Lehrbüchern und wissenschaftlichen Werken die Winkelangaben fast ausschliesslich in sexagesimaler Teilung vorhanden sind, werden zahlreiche Umrechnungen notwendig. Dass die meisten Astronomen mit Rücksicht auf das grosse, bereits vorhandene Beobachtungsmaterial und die kostbaren 60teiligen Instrumente der Neuerung abhold sind, ist daher wohl begreiflich. Auch für die Schule muss man sich fragen, ob nicht durch den häufigen Übergang von einem System in das andere die Vorteile wieder verloren gehen. Man kann sich allerdings zur Umwandlung mit graphischen Methoden oder Tabellen behelfen. Aber die Rechnung wird dadurch wieder kompliziert.

Diese Umstände, im Verein mit dem Beharrungsvermögen der Menschen, alte, vertraute Einrichtungen beizubehalten oder vielleicht besser der Scheu vor einer kräftigen Operation werden die allgemeine Einführung des Centesimalsystems noch lange, vielleicht immer unmöglich machen.

Andererseits bietet doch schon die Dezimalisation des Sexagesimalsystems so viele Vorteile, dass man keinen Augenblick mit der Einführung zögern sollte. Eine Hauptforderung, der leichte Übergang von einem System in das andere, bleibt dabei erfüllt, denn als Verwandlungszahl tritt nur die Zahl 6 auf; die Verwandlung kann daher häufig im Kopf ausgeführt werden, was eine wertvolle Übung ist. Dadurch, dass in beiden Systemen die Anzahl der ganzen Grade die gleiche bleibt, gewinnt man sofort ein sicheres Urteil über die Richtigkeit der Verwandlung, und für alle diejenigen, welche später nicht gerade mit trigonometrischen Rechnungen zu tun haben, bleibt alles beim Alten, denn sie werden häufig von Graden sprechen hören, aber selten von Bruchteilen eines Grades, höchstens etwa von halben, Drittel- und Viertel-Graden. Minuten und Sekunden werden sie sich ja so wie so in den meisten Fällen nicht vorstellen können. Auf einem 12 cm Theodolit stellt eine Minute einen Bogen von $\frac{17}{1000}$ mm dar und kann daher nur mit Nonius oder Ablesemikroskop bestimmt werden. Um diese Grössen vorstellbar zu machen, muss man schon zu aussergewöhnlichen Verhältnissen greifen, etwa zu der Erdkugel, worauf eine Bogensekunde rund 30 Meter lang ist.

Aus allen diesen Gründen hat dieses System viele Freunde gewonnen und eine grosse Verbreitung gefunden. Auch manche Astronomen und Geodäten schliessen sich dem Kompromisse an. In Deutschland ist es, wie gesagt, in die Schulen eingedrungen. Die Logarithmentafel von Bremiker hat schon acht Auflagen erlebt. In Italien wird es in der Marine und in allen Militärschulen gebraucht. In Nordamerika ist es in den Schulen fast ausschliesslich vertreten. Das *Annuaire du bureau de longitudes* und andere astronomische Tabellenwerke haben ebenfalls einen Schritt in dieser Richtung getan und geben sowohl bei Zeit- wie Winkelgrössen die Sekunden häufig in Dezimalen der Minute an. Herr Pasquier (zitierte Arbeit pag. 47) charakterisiert die Situation wie folgt: Dans ces conditions nous croyons que c'est le système 360 décimalisé qui a le plus de chances de rallier les suffrages des savants des principaux pays. Bien qu'il soit un peu inférieur au système 400 sous le rapport de la sécurité et de la rapidité des calculs trigonométriques usuels, il sera considéré comme lui étant supérieur sous plusieurs rapports importants qui feront sans doute pencher la balance de son côté. En particulier il ne nous paraît pas douteux que les Anglais, les Suédois, les Américains du Nord s'y rallieront plus facilement qu'au système 400; nous pensons aussi que si l'on avait passé au vote au

congrès de Munich, la majorité se serait prononcé en sa faveur et nous avons vu qu'il rentre dans les vues du congrès de Berlin.

Der Einführung in der Schule steht nichts im Wege; auch in den Industrieschulen nicht. Dass die Schüler der letztern, welche an die technische Hochschule abgehen, wo ein Teil doch wieder mit Minuten und Sekunden rechnen muss, ungenügend vorbereitet wären, ist nicht zu befürchten. Durch die gelegentlich noch vorzunehmenden Umwandlungen lernen sie ja das ursprüngliche Sexagesimalsystem auch kennen, und wenn sie nicht Gelegenheit haben sollten, damit Bekanntschaft zu machen, so ist das von geringer Bedeutung, denn auch in dem hier in Betracht kommenden Alter eignet man sich nach meinen eigenen Erfahrungen Neuerungen sehr schnell und sicher an, weil man entweder durch das Berufsstudium in eine Zwangslage versetzt ist oder die Vorteile besser erkennt und würdigt und daher mit einem festeren Willen und grösserer Ausdauer an das Erlernen herantritt; auch das Gedächtnis ist nicht schwächer geworden. Betrachtet man also die Teilung in Minuten und Sekunden, solange sie überhaupt noch verwendet wird, gewissermassen als Berufssache, so brauchen sich nur diejenigen damit abzugeben, welche sie wirklich nötig haben, und das ist noch lange nicht bei allen Industrieschülern der Fall.

Die Schule kann übrigens dem Polytechnikum, solange die Minuten und Sekunden dort noch Verwendung finden, dadurch in jeder Beziehung gerecht werden, dass die Industrieschüler in der obersten Klasse auch andere Tafeln handhaben lernen. Es dürfte sich jetzt auch lohnen, die Rechnungsergebnisse, welche mit verschiedenen grossen Tafeln erhalten werden, mit einander zu vergleichen und, wie ich am Schlusse meiner Ausführung noch besonders betonen werde, der Fehlertheorie überhaupt einige Beachtung zu schenken.

II. Genügen vierstellige Logarithmentafeln?

Siebenstellige und auch noch fünfstellige Logarithmentafeln bilden in der Schule einen Zahlenluxus, den wir füglich aufgeben dürfen. Von einer Reihe bedeutender Schulmänner, z. B. A. Schülke in Königsberg (Zeitschrift für Gymnasien 1895, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 1895, 1896 und 1899 und C. Müller in der gleichen Zeitschrift 1893) ist schon wiederholt nachgewiesen worden, dass vierstellige Logarithmentafeln für alle Zwecke der Schulmathematik, ja sogar in den meisten Fällen auch für die Praxis des Feldmessers genügen. Die Vermessungsinstruktion für die Geometer in den Konkordatskantonen enthält folgende Vorschriften für die Genauig-

keit der Messungen und Pläne: Scharfe Grenzzeichen vorausgesetzt, dürfen die Ergebnisse zweier unabhängig von einander auszuführenden Messungen derselben Strecke um 0,003 bis höchstens $0,01 \sqrt{4S + 0,005 S^2}$, im gebirgigen Terrain um das 1 $\frac{1}{2}$ fache dieses Betrages von einander abweichen, wo S die Streckenlänge ist. Wird eine Strecke vom Plane abgegriffen, so darf das erhaltene Mass von dem durch direkte Messung gefundenen abweichen um 0,003 bis höchstens $0,01 \sqrt{4S + 0,005 S^2}$, vermehrt um diejenige Länge, welche auf dem Plane durch 0,2 mm dargestellt ist.

Die höchsten zulässigen Abweichungen betragen daher:

im günstigen Gelände: auf 100 m 0,21 m, auf 1000 m 0,95 m.

im gebirgigen Terrain: „ 100 m 0,52 m, „ 1000 m 1,43 m.

Also rund 0,15 % der gemessenen Länge. Für Hauptpolygonzüge darf der Schlussfehler $\frac{1}{8} \% = 0,125 \%$ der ganzen Länge erreichen. An diese Vorschriften anknüpfend, stelle ich für die Schule folgende Forderung auf.

Durch die Rechnung ist im allgemeinen keine grössere Genauigkeit zu erstreben, als sie durch Messungen und Zeichnungen erreicht werden kann, denn es ist ganz widersinnig, mit Zahlen, die von vornherein als Näherungswerte zu betrachten sind, auf mehr Dezimalen, d. h. auf kleinere Einheiten zu rechnen, als durch Messung überhaupt festgestellt werden können. Die Zahlen, welche den Aufgaben aus der Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie, Physik und Astronomie zu grunde gelegt werden, müssen so angesehen werden, als seien sie durch Messung gewonnen worden. Dies betrifft also weitaus die grösste Zahl der in Betracht kommenden Aufgaben. Aber wohl äusserst selten wird bei schulmässigen Messungen und Schülerzeichnungen die Genauigkeit von 0,15 % erreicht; mit den zur Verfügung stehenden Instrumenten kann diese Genauigkeit allermeistens auch bei noch so grosser Sorgfalt nicht erreicht werden, es sei denn, dass die Messungen wiederholt werden, wozu aber nicht immer Zeit vorhanden ist. Eine grössere Genauigkeit ist aber auch durchaus unnötig. Es genügt, wenn das Resultat so genau ist, dass der Schüler einen richtigen Begriff von der Grössenordnung bekommt und dadurch ein besseres Verständnis der Sache gewinnt.

Es soll damit nicht etwa der Ungenauigkeit Tür und Tor geöffnet werden; es soll nur ein vernünftiges Arbeiten erstrebt werden; die Tafel muss geben, was sie geben kann, aber sie selbst muss zweckentsprechend eingerichtet sein. Siebenstellige Logarithmentafeln werden bloss zu ganz speziellen Rechnungen von den Astronomen und Geodäten

benutzt, für die allermeisten Rechnungen werden fünfstellige und sechsstellige verwendet. Es ist eben selbstverständlich, dass der berufsmässige und wissenschaftliche Rechner mit einer Logarithmentafel nicht auskommt. Der Schüler allerdings braucht nur eine zu besitzen, aber nicht die siebenstellige. Abgesehen von der grossen mechanischen und geistigen Mehrarbeit, welche ihre Handhabung erfordert, haben sie den Nachteil, dass die Schüler über den wünschenswerten oder erreichbaren Grad der Genauigkeit falsche oder gar keine Vorstellung erhalten. Sie rechnen gedankenlos mit den gegebenen Zahlen, als ob alles absolute Zahlen wären und Ungenauigkeiten nur von der Irrationalität der Logarithmen herrührten; von der Schwierigkeit der Messung, von den oft umständlichen mühevollen Vorbereitungen zur Erlangung einwandfreier Resultate haben sie keine Ahnung, und doch darf nicht vergessen werden, dass in den sogenannten exakten Wissenschaften die Beobachtung und Messung der Rechnung vorausgehen muss.

Diejenigen Herren Kollegen, welche auch Unterricht in Physik, technischem Zeichnen, darstellender Geometrie und Feldmessen erteilen, werden bestätigen, dass es oft einer grossen Mühe und Geduld bedarf, um brauchbare Resultate zu erlangen. Der Lehrer ist gewöhnlich auch sehr zufrieden, wenn seine eigenen Messungen auf etwa zwei Dezimalen der Einheit stimmen (spez. Gewicht, Beschleunigung, Ausdehnung, Photometrie, elektrotechnische Messungen). Dabei handelt es sich um verhältnismässig kleine Zahlen, so dass der möglicherweise begangene Fehler im Verhältnis zur ganzen Zahl sehr gross sein kann. Zu den genauesten Messungen gehören sicher die Wägungen; ein feines Instrument besitzen wir ja in der Chemikerwage. Die theoretische Genauigkeit kann auch beliebig weit getrieben werden, praktisch ist sie aber doch bloss ungefähr $\frac{1}{10000}$.

Beim Zeichnen ist wohl das Zentimeter die gewöhnliche Einheit. Kann man aus der Zeichnung noch $\frac{2}{10} \text{ mm}$ abgreifen (zulässige Fehler für Katasterzeichnungen), dann ist sie gewiss sehr genau; diese Genauigkeit kann man aber nur durch einen stetigen Kampf gegen die Flüchtigkeit im Zeichnen erreichen. Sobald der Schüler ein Reisszeug in die Hände bekommt, muss der Lehrer mit pedantischer Beharrlichkeit auf sauberes und exaktes Arbeiten dringen. Es ist dies notwendig mit Rücksicht auf das graphische Rechnen, graphische Statik, Planzeichnen etc. Dann hätte es aber auch gar keinen Sinn, einen so grossen Apparat wie Zeichnungsbrett, Winkel und Reisschienen, Reisszeug etc. in Bewegung zu setzen, wenn es nicht darauf ankommt, ob drei Linien, welche durch

einen Punkt gehen sollen, ein Fehlerdreieck bilden oder ob sie sich wirklich möglichst genau im Punkte treffen. Diese Genauigkeit im Zeichnen steht nicht im Widerspruch mit meiner Forderung einer geringeren Genauigkeit im Rechnen durch Einführung von bloss vierstelligen Logarithmentafeln. Sie ist damit im Gegenteil in bester Harmonie, weil eben beim Zeichnen nur bei allergrösster Sorgfalt die Genauigkeit vierstelliger Logarithmen erreicht wird. Aus langjähriger Erfahrung kann ich ferner sagen, dass sich häufig genug hinter Unexaktheit nur Unkenntnis und mangelhaftes Verständnis verbergen.

Wie steht es in der analytischen Geometrie? Zur Darstellung von Punkten und Geraden wird wohl keiner der Kollegen die Koordinaten auf mehr als zwei Dezimalstellen genau ausrechnen lassen. Mehr Stellen können in der Zeichnung gar nicht berücksichtigt werden; sie tragen auch nichts zum besseren Verständnis bei.

Da die Abweichungen der Werte, welche vierstellige Logarithmentafeln liefern, von den wahren Werten 0,1% nicht übersteigen, so genügen vierstellige Tafeln für alle Rechnungen aus den angegebenen Gebieten. In der vierstelligen Tafel von Schülke bleibt die Abweichung auch bei den trigonometrischen Funktionen (nicht den Logarithmen) stets unter 0,15%, erreicht also ungefähr die Genauigkeit, welche der Kataster vorschreibt. Viele Physikbücher haben als Anhang eine Logarithmentafel oder eine Tafel der trigonometrischen Funktionen; aber gewöhnlich nur dreistellig, höchstens vierstellig.

Also überall da, wo die gebrauchten Zahlen von Messungen herühren, genügen in der Schule die vierstelligen Logarithmentafeln vollkommen, und bei den meisten Aufgaben mit absoluten Zahlen genügen sie erst recht, denn diese Aufgaben haben ausschliesslich Übungszwecke, und die Zahlen können daher von vornherein einfach gewählt werden.

Ich kenne nur ein Gebiet, wo sie vielleicht nicht ganz genügen, das ist das Gebiet der Zinseszinsrechnung.

Werden die Logarithmen der Zinsfaktoren auf fünf Dezimalen genau angegeben, so genügt das wieder vollständig, wie das folgende Beispiel zeigt:

Eine Gemeinde macht zum Zwecke einer Wasserversorgung ein Anleihen von 300,000 Fr. Welchen Betrag muss sie jährlich aufwenden, wenn die Schuld bei einer $4\frac{1}{2}$ proz. Verzinsung in 50 Jahren getilgt sein soll? Es ist:

$$\begin{array}{l} k \cdot q^n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \\ a = \frac{k \cdot q^n (q - 1)}{q^n - 1} \end{array} \quad \left\| \quad \begin{array}{l} k = 300\,000 \text{ Fr.} \\ q = 1,045 \\ q - 1 = 0,045 \\ a = ? \end{array} \right.$$

Schülke 4stellig	Wittstein 5stellig	Vega 7stellig
q 0,01912 50	q 0,01912 50	q 0,0191163 50
q^n 0,9560 $q^n - 1 = 8,036$	q^n 0,95600 $q^n - 1 = 8,0365$	q^n 9,9558150 $q^n - 1 = 8,0326$
$(q^n - 1)$ 0,6532 - 2	$(q^n - 1)$ 0,65321 - 2	$(q^n - 1)$ 0,6532125 - 3
k 5,4771	k 5,47712	k 5,4771213
$(q^n - 1)$ 5,0863	$(q^n - 1)$ 5,08633	$(q^n - 1)$ 5,0861488
$(q^n - 1)$ 0,9051	$(q^n - 1)$ 0,90507	$(q^n - 1)$ 0,9048588
a 4,1812	a 4,18126	a 4,1812900
$a = 15180$	$a = 15179,6$	$a = 15180,6$
48 Ziffern.	56 Ziffern.	70 Ziffern.

Die Log. sind alle beieinander und zwar so, dass die Tafel nur an einer Stelle aufgeschlagen werden muss.

Die Log. befinden sich an 5 verschiedenen Orten und auf 20 Seiten verteilt.

Die Log. befinden sich an 5 verschiedenen Orten, die sich auf 200 Seiten verteilen.

Bei den dicken Tabellen ist auch das Papier gewöhnlich dünner, das Nachschlagen daher mit mehr Mühe verbunden.

Die vielstelligen Tafeln erfordern aber nicht bloss eine bedeutende mechanische Mehrarbeit, sondern auch eine geistige, die ganz ausserordentlich ermüdend wirkt. Eine Tafel mit siebenstelligen Mantissen und fünfzifferigen Numeri enthält 100 mal so viel Zahlen als eine Tafel mit vierstelligen Mantissen und dreizifferigen Numeri. Der Rechner hat also bei vierstelligen Tafeln eine ganz erheblich grössere Anzahl von Zahlen zu lesen und von einander zu unterscheiden; dazu kommt, dass die Zahlen ungefähr doppelt so viele Ziffern enthalten. Das ist aber für den jugendlichen Geist und das Auge eine Herkulesarbeit, die sie nicht ohne grossen Nachteil zu bewältigen vermögen. Also fort aus der Schule mit diesen dicken Büchern voll Zahlen. Ein handliches Büchlein von kaum 20 Seiten kann alles enthalten, was die Schule an Tabellen bedarf. Ich brauche für mich häufig die vierstellige Tafel von Schülke, und ich habe sie so lieb gewonnen, dass ich nur mit Widerwillen zu einer andern greife, wenn es einmal sein muss.

In dem Beispiel stimmt das Resultat der vierstelligen Tafel überraschend gut mit den übrigen Resultaten. Es können natürlich grössere Abweichungen vorkommen, immerhin wird der Log. des Schlussresultates wohl höchst selten auf mehr als ein oder zwei Einheiten der letzten Stelle fehlerhaft sein; denn die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler, welche der letzten Stelle eines Log. anhaften, alle im gleichen Sinne wirken und sich daher summieren, ist ganz ausserordentlich ge-

ring. Joh. Frischauf (Zeitschr. für mathem. und naturw. Unterricht, Jahrg. 95 pag. 161) gibt als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für die grösste Korrektur von $\frac{m}{2}$ Einheiten der letzten Stelle $\frac{1}{m! 2^{m-1}}$ für ein ge-

rades m und $\frac{2}{m!}$ für ein ungerades m . Also für unsern Fall $w = \frac{1}{192}$

Der erste Logarithmus ist allerdings mit 50 multipliziert und der Fehler könnte daher im Maximum 50 halbe Einheiten der fünften Stelle betragen, da er fünfstellig angegeben ist, also $2^{1/2}$ Einheiten der vierten Dezimale. Dieser Maximalfehler wird aber höchst selten eintreten. Dazu kommt, dass er auch im Nenner ($q^n - 1$) sich im gleichen Sinne geltend macht, so dass der Quotient nur wenig beeinflusst wird, wie der Vergleich der drei Ergebnisse schön zeigt. Statt der Logarithmen der Zinsfaktoren können in den Tafeln auch die Potenzen angegeben sein. Auch so werden vierstellige Logarithmen genügen. Es darf auch nicht vergessen werden, dass sich die Zinseszinsrechnung in der Praxis anders gestaltet als in der Schule, es ist daher nicht nötig, mit grossen Summen und hohen Potenzen zu rechnen. Es wächst z. B. 1 Fr. zu 4% an:

Bei Sparkassenverzinsung;

In 50 Jahren zu 4,64 Fr.

„ 100 „ „ 29,70 „

Nach der Formel berechnet:

zu 7,10 Fr.

„ 50,50 „

In „Cantor, Polit. Arithmetik“, pag. 41 findet sich folgendes Beispiel: 1886 war das Stiftungsfest des 500jährigen Bestandes der Universität Heidelberg. Man legte zehn Mark in die dortige Sparkasse. Die Summe mit ihrem Zuwachs soll der Universität bei der Feier des 1000jährigen Bestandes zur Verfügung gestellt werden. Die Sparkasse verzinst nur ganze Vielfache von 10 Mark. Werden 3% berechnet, so wächst die Summe an zu 14975273.80 M. Wird auch der Pfennig verzinst, so werden aus 10 M. in 500 Jahren 26218778 M.

An der letzten Vereinigung der Mathematiklehrer machte mich ein Kollege auf die Aufgabe Nummer 41, pag. 241 in der Aufgabensammlung Müller und Kutnewsky, Ausgabe B. 2. T. aufmerksam, er habe dieselbe unter Benützung des Cosinussatzes lösen wollen und dabei entdeckt, dass fünfstellige Tafeln nicht ausreichen und auch siebenstellige noch unsichere Resultate geben. Die Aufgabe lässt sich auch mit vierstelligen Tafeln, freilich nicht mit dem Cosinussatz, aber doch ohne Mehrarbeit genügend genau lösen; sie bietet auch sonst noch Gelegenheit zu einigen Bemerkungen, wesshalb ich mir erlaube, sie hier anzuführen:

Deutschland liegt innerhalb der Punkte

Memel: $\varphi = 56^0$ $\lambda = 21^0$ O.

Königsau: $\varphi = 55^0 25'$ $\lambda = 9^0$ O.

Basel: $\varphi = 47^0 35'$ $\lambda = 7^0 35'$ O.

Gesucht sind Radius und Mittelpunkt des Umkreises. Mit Hülfe der Dreiecke:

Memel-Königsau-Nordpol,

Königsau-Basel-Nordpol,

Basel-Memel-Nordpol,

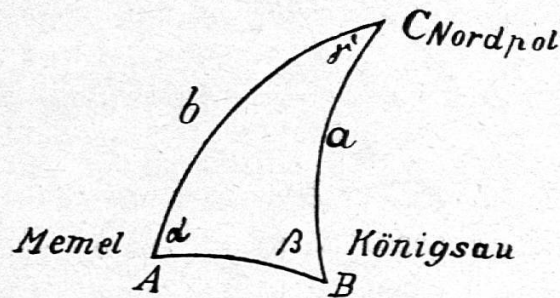
lassen sich alle Seiten und Winkel des Dreieckes M K B bestimmen und hieraus dann Radius und Zentrum des unbeschriebenen Kreises.

Jedes Hilfsdreieck ist bestimmt durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Wird zuerst die fehlende Seite mit dem Cosinussatz bestimmt und dann jedes andere Stück mit dem Sinussatz, so werden die Resultate recht unzuverlässig. Beim Dreieck Memel-Königsau-Nordpol wird ein Winkel sogar um mehrere Grade ungenau. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse zum Vergleiche zusammengestellt

Nordpol $\alpha = 34^0 35' = 34,583^0$

$b = 34^0$

$\gamma = 12^0$



Cosinus- und Sinussatz.

5 stellige Tafel

7 stellig

Napier'sche Analogien.

4 stellig

5 stellig

7 stellig

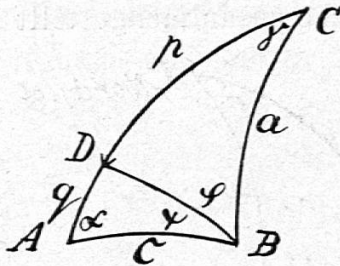
α	86° 36' od. 37	89° 41' 20"	{ 89° 57' 4"	89° 57' 2"	89° 57' 2"
			{ 89,951		
β	79° 50'	80° 7' 11"	{ 80° 7' 30"	80° 7' 26"	80° 7' 26"
			{ 80,125		
c	6° 47'	6° 46' 39"	{ 6° 46' 41"	6° 47' 39"	6° 46' 39"
			{ 6,778		

Mit Hilfe von Cosinus- und Sinussatz und vierstelligen Tafeln lassen sich die Winkel natürlicherweise noch weniger sicher bestimmen. Der Grund liegt nicht etwa in der unlogarithmischen Form des Cosinussatzes, denn der damit bestimmte Wert ist immer genauer als die mit dem logarithmischen Sinussatz bestimmten Werte von α und β ; mit der siebenstelligen Tafel ist c sogar auf die Sekunde genau. Der Grund der Unsicherheit liegt darin, dass alle drei Winkel dem Grenzwerte 0^0 oder 90^0 sehr nahe kommen; an der unteren Grenze aber liefern die Tabellen

für den Cosinus und an der oberen Grenze für den Sinus unzuverlässige Werte. In unserem Falle wird nun gerade der kleine Winkel mit dem Cosinus bestimmt, die grossen aber werden mit dem Sinus berechnet. Der Wert von α liegt dem Grenzwert am nächsten, daher zeigt er auch die grössten Abweichungen.

In allen derartigen Fällen erfordert die Rechnung besondere Sorgfalt; das gewöhnliche Verfahren muss meist durch ein anderes ersetzt werden, denn auch siebenstellige Tafeln helfen nicht immer, weil die Interpolation an den Grenzen unzuverlässig wird, wie wir schon an einem Beispiel gesehen haben. Mit den Napierschen Analogien geben auch die vierstelligen Tafeln gute Resultate.

Es ist nun interessant, zu sehen, dass vierstellige Logarithmentafeln mit dezimal geteiltem Grad ganz befriedigende Ergebnisse liefern, wenn das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, während fünfstellige Tafeln mit Sexagesimalteilung in diesem Falle gar nicht gebraucht werden können.



$$a = 34^{\circ}, 583$$

$$h = 34^{\circ}$$

$$\gamma = 12^{\circ}$$

$$a = ?$$

$$\beta = ?$$

$$c = ?$$

$$\operatorname{tg} p = \cos \gamma \operatorname{tg} a \quad \cos \varphi = \cos a \operatorname{tg} \gamma$$

$$\sin h = \sin a \sin \gamma$$

$$\cos \gamma \parallel 9,9904 - 10$$

$$\operatorname{tg} a \parallel 9,8385 - 10$$

$$\operatorname{tg} p \parallel 9,8289 - 10$$

$$p = 33^{\circ}, 994$$

$$q = 0^{\circ}, 006$$

$$\cos a \parallel 9,9156 - 10$$

$$\operatorname{tg} \nu \parallel 9,3275 - 10$$

$$\cos \varphi \parallel 9,2431 - 10$$

$$\varphi = 80^{\circ}, 073$$

$$\sin a \parallel 9,7540 - 10$$

$$\sin \varphi \parallel 9,3179 - 10$$

$$\sin h \parallel 9,0719 - 10$$

$$h = 6^{\circ}, 777$$

$$\cos c = \cos h \cos q$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin q}{\operatorname{tg} h}$$

$$\cos \psi = \frac{\sin h}{\operatorname{tg} q}$$

$$\cos h \parallel 9,9969 - 10$$

$$\cos q \parallel 0,0000$$

$$\cos c \parallel 9,9969$$

$$c = h = 6^{\circ}, 777$$

$$\sin q \parallel 6,0343 - 10$$

$$\operatorname{tg} h \parallel 9,0744 - 10$$

$$\cos \alpha \parallel 6,9599 - 10$$

$$\alpha = 89^{\circ}, 949 = 89^{\circ} 56' 56''$$

$$\beta = 80^{\circ}, 124 = 80^{\circ} 7' 26''$$

$$c = 6^{\circ}, 777 = 6^{\circ} 46' 37''$$

$$\sin h \parallel 9,0719 - 10$$

$$\operatorname{tg} q \parallel 6,0200 - 10$$

$$\cos \psi \parallel 3,0519$$

$$\operatorname{tg} \psi \parallel 6,9481 - 10$$

$$\psi = 0^{\circ}, 051$$

$$\varphi = 80^{\circ}, 073$$

$$\beta = 80^{\circ}, 124$$

Anmerkung: Gewöhnlich wird man bei 4stelligen Tafeln nur auf Hundertstels-Grade rechnen; das Beispiel zeigt aber, dass man auch sehr wohl die Tausendstel mitnehmen kann, was man immer tun wird, wenn es sich darum handelt, bei kleinen Winkeln die Vorteile der Dezimalteilung auszunützen.

Die Lösung ist nur deshalb möglich, weil die Logarithmen der Funktionen des sehr kleinen Winkels q infolge der Dezimalteilung noch berücksichtigt werden können. Es ist dies also ein neues Beispiel für die Brauchbarkeit vierstelliger Logarithmentafeln und die Vorzüge der Dezimalteilung. In den im Anfang dieses Kapitels zitierten Arbeiten findet sich eine grosse Anzahl von Aufgaben, welche zeigen, dass die Ergebnisse der wissenschaftlichen Forschung mit vierstelligen Tafeln gut zur Darstellung gebracht werden können.

Bei der vorigen Aufgabe darf wohl die Frage aufgeworfen werden, ob das Ziel die Mühe auch lohne, da das Vorgebrachte ja nur etwa den vierten Teil der ganzen Lösung darstellt. Muss der Schüler sie vollständig durchrechnen, so wird er sich dabei kaum für die Mathematik begeistern, denn er muss gewiss mehrere Stunden dahinter sitzen, bis er alle Logarithmen wohlgeordnet beisammen hat, und wenn der Sonnenschein ins Stübchen dringt oder das Vöglein vor dem Fenster jubiliert, so dürften wohl manche die Aufgabe im Stiche lassen, und bloss noch die Streber werden die Fleissigen sein. Werden die Schüler in Gruppen geteilt, und wird jeder Gruppe ein Teil der Aufgabe zugewiesen, so mögen solche Beispiele wohl auch schneller bemeistert werden; das vorliegende speziell lässt sich ja auch in anderer Weise behandeln und ausbeuten.*)

Im allgemeinen aber soll der Grundsatz gelten, dass die Aufgaben nicht bloss inhaltlich dem Schüler nicht zu viel zumuten, sondern auch punkto mechanischer Arbeit nicht zu hohe Anforderungen stellen. Je schneller die mechanische Arbeit erledigt ist, desto mehr Freude werden die Resultate dem lebhaften Geist der Schüler bereiten, desto mehr Aufgaben können gelöst werden, desto mehr Zeit bleibt übrig, auch schwierigere Probleme anzugreifen. Die kleinen vierstelligen Logarithmentafeln mit den nötigen Konstanten und einer Quadrattafel versehen, sind in hohem Grade geeignet, die mechanische Arbeit auf ein Minimum zu reduzieren. Dass Aufgaben vorkommen können, zu deren Lösung vierstellige Tafeln schlechterdings nicht genügen, kann selbstverständlich nicht in Abrede gestellt werden. In solchen Fällen aber kann der Lehrer die Logarithmen aus einer umfangreichen Tafel diktieren, oder er wird gerade das Resultat angeben.

Auf spezielle Beispiele will ich hier verzichten; es sei nur bemerkt, dass manche Aufgaben aus der Astronomie und Geodäsie einen hohen Grad von Genauigkeit der Rechnung verlangen, der mit vier- und fünfstelligen Tafeln nicht zu erreichen ist; die Schule wird aber nicht zu tief in diese Gebiete eindringen können, nicht bloss wegen der Schwierigkeit der Materie, sondern auch wegen der langen Rechnungen, die man doch besser den Geodäten und Astronomen überlassen muss.

Mein Aufsatz ist länger geworden, als ich es anfänglich beabsichtigte, Die zwei Fragen aber, die darin gestellt werden, lassen sich eben nicht mit einigen Worten abtun. Jede einzelne ist so wichtig, dass sich inter-

*) Dem Buch soll wegen dieser Aufgabe kein Vorwurf gemacht werden, es ist sonst eine vorzügliche Aufgabensammlung. Nebenbei bemerkt geben die Autoren die Sekunden durchgehends in Dezimalen der Minuten an.

nationale Gelehrtenkongresse und deutsche Mathematikerversammlungen eingehend damit beschäftigen.

Ich glaube, gezeigt zu haben, dass die Reformen sowohl vom hygienischen wie pädagogischen Standpunkt aus sehr zu begrüßen sind. Auch in wissenschaftlicher Beziehung wird der Unterricht dadurch nur gewinnen, indem der sehr erhebliche Zeitgewinn eine bessere Vertiefung in den Lehrstoff ermöglicht oder auch eine Erweiterung des Pensums gestattet. Für die Infinitesimalrechnung wird sich leichter die notwendige Stundenzahl erübrigen lassen, so dass der Funktionsbegriff einigermaßen abschliessend behandelt werden kann.

Ich möchte auch sehr empfehlen, mit den Schülern einige Untersuchungen über die Genauigkeitsgrenzen anzustellen. Dabei denke ich nicht an eine ausgedehnte Fehlertheorie, aber immerhin sollten an einigen konkreten Beispielen die Fehlerfortpflanzungsgesetze festgestellt und die oft ganz irrigen Vorstellungen der Schüler über den erreichbaren Grad der Genauigkeit bei Messungen und Rechnungen korrigiert werden. Dabei würde sich Gelegenheit bieten, dem logarithmischen Rechnen noch besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Den Industrieschülern kann man jetzt auch eine umfangreichere Logarithmentafel in die Hand geben und ihnen z. B. theoretisch und praktisch zeigen, dass eine zehnmal grössere Genauigkeit, d. h. eine Stelle mehr auch eine zehnmal umfangreichere Tafel verlangt. So dürfte auch das Polytechnikum zu seinem Rechte kommen; in der Schule aber würde das Rechnen weniger gedankenlos betrieben; zu Übungen im Kopfrechnen und Abschätzen der Resultate böte sich häufig Gelegenheit.

Zum Schlusse will ich noch das Resultat meiner Enquête über die an schweizerischen Mittelschulen gebrauchten Logarithmentafeln mitteilen. Die Untersuchung erstreckte sich auf Gymnasien beider Richtungen, Seminarien und Techniken. An 16 von 40 Mittelschulen (also 40 %) werden noch siebenstellige Logarithmentafeln gebraucht. Siebenstelligen benutzen alle Berner Gymnasien und Seminarien mit Ausnahme des Gymnasiums in Biel, ferner Freiburg, Neuenburg, La Chaux-de-Fonds, Chur, Luzern, Solothurn, Schwyz, Lugano, Sitten; sechsstelligen Sarnen. Die vierstelligen benutzen das Obergymnasium in Basel, Zug und die Abteilung für Bautechniker am Technikum Winterthur. Alle andern haben fünfstellige Tafeln, meist von Gauss oder Greve. Wo an der einen Abteilung siebenstelligen und an der andern fünfstelligen gebraucht werden, herrscht allgemein die Ansicht, die technische Abteilung müsse siebenstelligen haben, während sich das Gymnasium mit fünfstelligen begnügen könne. - In Solothurn hat die Handelsschule siebenstelligen, offenbar mit Rücksicht auf die Zinseszinsrechnungen. Dezimalteilung des Grades kommt nirgends vor, dagegen werden am städtischen Realgymnasium in Bern für das Feldmessen Instrumente und Tafeln nach dem Centesimalsystem benutzt. Auch in Aarau ist einer der Theodolite centesimal geteilt. Fahren die genannten Schulen mit den siebenstelligen Logarithmentafeln ab, so wird dadurch mehr als 1000 jungen Menschen ein grosser Dienst erwiesen. Und sollten meine Reformvorschläge nur das bewirken, dass statt der siebenstelligen Tafeln doch wenigstens überall nur fünfstellige gebraucht werden, so ist auch dies schon ein ganzer Erfolg, der es mich nicht bereuen lässt, die Frage aufgegriffen zu haben.