Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 13 (1903)
Heft: 2

Artikel: Die Fassung des Begriffes der Wurzel im Schulunterricht
Autor: Scherrer, F. R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-789214

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Fassung des Begriffes der Wurzel im Schulunterricht.

(Vortrag gehalten in der Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen am 6. Dez. 1902 in Zürich.)

Eine Umschau unter den Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik, welche in verschiedenen Ländern in älterer und neuerer Zeit an den Mittelschulen Verwendung fanden und teilweise noch finden, zeigt, dass im allgemeinen als nte Wurzel einer beliebigen Zahl a jede positive, negative oder komplexe Zahl betrachtet wird, deren nte Potenz gleich a ist. Die nte Wurzel von a, in diesem Sinne aufgefasst, wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet. Nachdem die Verfasser der Lehrbücher darauf aufmerksam gemacht haben, dass infolge der gegebenen Definition jede Zahl zwei Quadratwurzeln besitzt, gehen sie zur Herleitung der bekannten Sätze über das Rechnen mit Wurzeln über. Die einen, wie z. B. Baltzer in seinen bekannten „Elementen der Mathematik" beweist die Gleichung

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

einfach, indem er auf die Gleichheit der nten Potenzen der beiden Seiten dieser Gleichung hinweist. Was dieser Beweis wert ist, erhellt am besten aus einem Vergleich mit dem bekannten Sophisma

$$2 \cdot 3 = -6,$$

dessen scheinbare Richtigkeit damit bewiesen wird, dass man beide Seiten ins Quadrat erhebt. Die Verfasser anderer Lehrmittel, wie z. B. Mehler in seinen „Hauptsätzen der Elementarmathematik", sind in diesem Punkte gewissenhafter und beschränken sich zwar nicht in der Wurzeldefinition, wohl aber bei der Herleitung der Sätze über Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln von Wurzeln auf positive Radikanden und Wurzeln, womit der Übelstand verbunden ist, dass ein und dasselbe Zeichen in mehrfacher Bedeutung gebraucht wird.

Das nachträgliche Eindeutigmachen der Wurzel ist und bleibt eine Inkonsequenz und darum ein pädagogischer Fehler. Man wird freilich einwenden, auch wenn die Wurzel nicht eindeutig gemacht werde, so

sei doch jeder Wert von $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ einem der Werte der $\sqrt[n]{ab}$ gleich und umgekehrt. Das ist ja allerdings richtig, kann aber dem Anfänger nur für die Quadratwurzel gezeigt werden. Jedenfalls geht aus dem üblichen Herleitungsverfahren nur hervor, dass jeder Wert des Produktes $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ der Serie der Werte der $\sqrt[n]{ab}$ angehört, jedoch ist demselben nicht zu entnehmen, dass jeder Wert der $\sqrt[n]{ab}$ stets gleich einem Werte des Produktes $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ist. Den Schüler, der noch nichts von komplexen Zahlen weiss, muss es befremden, wenn er von zwei Quadratwurzeln aber nur von einer Kubikwurzel hört.

Mit der mehrdeutigen Fassung der Wurzel gelangen wir auch hinsichtlich der Bezeichnung in Widerspruch, wenn wir die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2q\,x + r = o$$

gleich

$$-q \pm \sqrt{q^2 - r}$$

setzen und nicht einfach

$$x = -q + \sqrt{q^2 - r}$$

schreiben. Fragen wir, welchen Wert hat $2 + \sqrt{3}$, so erwarten wir die Antwort:

$$2 + \sqrt{3} = 3{,}732\ldots.$$

und nicht etwa

$$2 + \sqrt{3} = 0{,}268\ldots.;$$

denn wir denken eben stillschweigend nur an die positive Quadratwurzel von 3, und doch hat der landläufigen Auffassung gemäss die zweite Antwort ebensoviel Berechtigung wie die erste.

In der bekannten „Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben“ von Schubert wird der Wurzelbegriff in der allgemein üblichen Form gefasst. Später heisst es dann: „Um die Eindeutigkeit des Wurzelzeichens zu wahren, bezeichnet man mit $\sqrt[2p+1]{+a}$ meist nur die eine reelle also positive Wurzel von a, mit $\sqrt[2p+1]{-a}$ meist nur die eine reelle also negative Wurzel von $-a$ und mit $\sqrt[2p]{+a}$ meist nur die positive von den beiden reellen Wurzeln der Gleichung $x^{2p} = +a$.“ Anlässlich der Behandlung der Potenzen mit gebrochenen Exponenten sagt

Schubert: „Wir setzen demgemäss fest, dass im allgemeinen das Zeichen $a^{\frac{p}{q}}$ nur angewandt werden soll, wenn a positiv ist und unter $a^{\frac{p}{q}}$ die eine positive Wurzel der Gleichung $x^q = a^p$ zu verstehen ist". Derartige nachträgliche Einschränkungen sind an sich schon misslich, weil sie dem Entwicklungsgange der allgemeinen Arithmetik direkt zuwiderlaufen; sie sind es aber umso mehr, wenn die Einschränkung in so unbestimmter Form erfolgt, wie dies hier der Fall ist. Man pflegt freilich nicht zu setzen

$$9^{\frac{3}{2}} = \pm 27,$$

aus guten Gründen; denn wie wollte man später Stetigkeit in die Exponentialfunktion bringen, wenn die Potenz mit gebrochenem Exponenten nicht eindeutig aufgefasst würde? Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist bekanntlich nichts anderes als eine Potenz einer Wurzel. Wenn man also die Wurzel nicht von vorneherein eindeutig erklärt, so muss man allerdings zu Auskunftsmitteln der angeführten Art seine Zuflucht nehmen. Der unzweideutige Rückschluss vom Logarithmus zum Numerus setzt ebenfalls eine eindeutige Auffassung der Wurzel voraus. Fragen wir unsere Schüler: welche Zahl hat zum log. vulg die Zahl $\frac{1}{2}$? so erwarten wir die Antwort: $\sqrt{10} = 3{,}1623\ldots$ und nicht etwa $-3{,}1623\ldots$, obschon nach der allgemeinen Auffassung

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = \pm 3{,}1623\ldots$$

ist.

Das Bedürfnis des Eindeutigmachens der Operationen stellt sich schon in der niederen Analysis ein, während in der Funktionentheorie eine Sonderung der Ergebnisse mehrdeutiger Orperationen zur Notwendigkeit wird. Die Gleichung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

gilt bekanntlich nur für eine ganz bestimmte Affassung von e^x und ebenso verhält es sich, wenn n gebrochen und mod $z < 1$ ist, mit der Gleichung

$$(1+z)^n = 1 + nz + \binom{n}{2} z^2 + \cdots \binom{n}{k} z^k + \cdots$$

Dieser Umstand zwingt schon den Lehrer an der Mittelschule den

Begriff des Hauptwertes der Wurzel nach der Auffassung von Weierstrass einzuführen. Die Gleichung

$$x^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

wo r eine absolute Zahl, n eine natürliche Zahl bedeutet und $-\pi < \alpha \leqq +\pi$ ist, hat bekanntlich die n Lösungen

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

wo k gleich 0, 1, 2, 3 .... oder n — 1 sein kann und die $\sqrt[n]{r}$ absolut zu nehmen ist. Diese n Werte von x nennt man die nten Wurzeln der komplexen Zahl r $(\cos a + i\sin\alpha)$ und bezeichnet insbesondere

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)$$

als Hauptwert der nten Wurzel von r $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Falls $\alpha = 0$, also x^n gleich der absoluten Zahl r ist, so stimmt der Hauptwert der nten Wurzel von r mit der positiven nten Wurzel von r überein. Der Hauptwert der dritten Wurzel einer negativen Zahl ist aber nicht derjenige Wurzelwert, welchen man nach vulgärer Auffassung als dritte Wurzel bezeichnet. So ist z. B.

$$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi),$$

somit der Hauptwert der dritten Wurzel von — 8

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Während also die vulgäre Auffassung der Quadratwurzel zum Hauptwert derselben führt, ist dies bei der Kubikwurzel einer negativen Zahl nicht der Fall, weshalb es, um Missverständnisse zu vermeiden, zweckmässiger ist, im Elementarunterricht von der Besprechung der Wurzeln negativer Zahlen überhaupt abzusehen.

Ist

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

wo $-\pi < \alpha \leqq +\pi$, so versteht man unter dem Hauptwert der Potenz $z^{\frac{p}{q}}$ die pte Potenz des Hauptwertes der qten Wurzel von z, d. h. die komplexe Zahl

$$r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\alpha\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\alpha\right)\right]$$

und nur in diesem Sinne, d. h. für den Hauptwert von $(1+z)^n$ gilt, wenn mod $z < 1$ ist, die Gleichung

$$(1+z)^n = 1 + nz + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots\cdots \binom{n}{k} z^k + \cdots\cdots$$

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass unter den Lösungen der reinen Gleichung nten Grades

$$x^n = a,$$

wo a eine absolute Zahl bedeutet, die absolute Lösung die wichtigste ist, und dass unter den Lösungen der reinen Gleichung nten Grades

$$z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

die Lösung

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)$$

die grösste Bedeutung besitzt. Mit Rücksicht hierauf dürfte es genügen, im elementaren Unterricht die nte Wurzel von a zu definiren als diejenige absolute Zahl, deren nte Potenz gleich der absoluten Zahl a ist, und zu sagen, dass man die (so definirte) nte Wurzel von a mit dem Zeichen $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet. Ferner wäre $a^{\frac{p}{q}}$ zu erklären als pte Potenz der qten Wurzel von a, aber nicht etwa, wie dies vielfach geschieht, als qte Wurzel der pten Potenz von a; denn man hat schon im elementaren Unterricht darauf Rücksicht zu nehmen, dass der Begriff der Potenz mit gebrochenem Exponenten später auf Potenzen komplexer Zahlen ausgedehnt werden muss. Für ein komplexes a ist aber bekanntlich $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p$ und $\sqrt[q]{a^p}$ nicht mehr dasselbe, sobald p und q einen gemeinsamen Teiler haben, daher ist es wichtig, dass von Anfang an

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

gesetzt wird, obschon, so lange es sich nur um absolute Zahlen handelt, $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ mit $\sqrt[q]{a^p}$ übereinstimmt.

In dem Falle, wo a komplex, d. h.

$$a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ist, sollte man unter $a^{\frac{p}{q}}$ die pte Potenz des Hauptwertes der qten Wurzel von $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ verstehen, also

$$a^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\alpha\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\alpha\right)\right]$$

setzen. Die pten Potenzen der übrigen qten Wurzeln von $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

könnten ja, wie es auch zumeist geschieht, in der Form

$$a^{\frac{p}{q}} e^{\frac{p}{q} \cdot 2k\pi i} \qquad \text{wo } k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots q - 1,$$

dargestellt werden. Durch diese Festsetzung wäre dann bestimmt ausgesprochen, welche Bedeutung der Potenz $(1 + z)^n$ in der Gleichung

$$(1 + z)^n = 1 + nz + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots \binom{n}{k} z^k + \cdots\cdots$$

zukommt.

Die vorgeschlagenen Erklärungen würden eine nachträgliche Einschränkung des Wurzelbegriffes überflüssig machen, und indem man vor der Behandlung der Wurzeln zeigte, dass es stets eine aber auch nur eine absolute Zahl gibt, deren nte Potenz einer gegebenen absoluten Zahl gleich ist, könnte man die Wurzelsätze in der üblichen Weise, aber völlig einwandfrei, herleiten. In der Theorie der komplexen Zahlen wäre dann auf den Begriff der absoluten Wurzel fussend der allgemeine Wurzelbegriff für beliebige (relative und komplexe) Radikanden zu entwickeln und bei dieser Gelegenheit auch die Bedeutung der Mehrwertigkeit der Wurzel für die Gleichung

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

ins richtige Licht zu setzen.

Die nachträgliche Erweiterung des Wurzelbegriffes hat nach meinem Dafürhalten nichts Bedenkliches, sie steht vielmehr in vollständigem Einklang mit dem Geiste der allgemeinen Arithmetik, in welcher mit der Einführung einer indirekten Operation stets eine Erweiterung des Anwendungsbereiches der vorher betrachteten Operationen verbunden ist. Überdies erfährt der Schüler auch erst, wenn er die Gleichung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

kennen lernt, dass eine Zahl zu einer gegebenen Basis unendlich viele Logarithmen besitzt.

Erfahrungsgemäss kommt man mit der Beschränkung des Wurzelbegriffes auf absolute Wurzeln im Elementar-Unterricht ganz gut aus. Der Forderung

$$x^2 = 9$$

genügen allerdings die Zahlen $+3$ und -3; diese sind aber als Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung anzusehen, während die absolute Zahl 3 die Quadratwurzel von 9 ist. Indem man also die Wurzel eindeutig macht, verliert man keine Wurzel der quadratischen Gleichung und das Setzen des doppelten Vorzeichens vor die Quadratwurzel in der

Lösung der Gleichung hat nun einen Sinn. Wenn man in der Gleichung

$$\sqrt{10-3x}+\sqrt{11-x}=\sqrt{13+6x}$$

die Wurzeln wegschafft, so gelangt man zu der Gleichung

$$22x^2+3x=94,$$

welche die Wurzeln 2 und $-\frac{47}{22}$ besitzt. Durch Einsetzen des ersten Wertes in die gegebene Gleichung erhält man

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{25};$$

setzt man aber den zweiten Wert ein, so ergibt sich

$$\frac{19}{\sqrt{22}}+\frac{17}{\sqrt{22}}=\frac{2}{\sqrt{22}},$$

eine Gleichung, die man nur dadurch richtig stellen kann, dass man beim zweiten Gliede die Quadratwurzel negativ nimmt. Bei der Anwendung der Arithmetik auf Probleme anderer Wissenschaften, der Technik oder des praktischen Lebens kommt eine Gleichung wie die in Rede stehende dadurch zu stande, dass man ein und dieselbe Grösse auf zwei Arten darstellt und die gefundenen Ausdrücke einander gleich setzt; dabei haben die einzelnen Glieder der Gleichung in der Regel nur mit einem ganz bestimmten Vorzeichen eine praktische Bedeutung. Man wird daher im vorliegenden Falle die Lösung $-\frac{47}{22}$, welche durch das Quadriren eingeschleppt worden ist, aus praktischen Gründen ausschalten müssen, was mit der eindeutigen Auffassung der Wurzel völlig im Einklang steht.

Der Fall komplexer Wurzeln einer quadratischen Gleichung hat für denjenigen, der mit der Theorie der komplexen Zahlen und unendlichen Reihen nicht vertraut ist, nur eine negative Bedeutung insofern nämlich, als er zeigt, dass das Problem, welches auf eine Gleichung mit komplexen Wurzeln führt, unlösbar ist. (Beispiel: Die Seiten eines Rechtecks so zu bestimmen, dass der Inhalt gleich 25 m^2 und der Umfang gleich 16 m wird.) Gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$x^{2n+1}=-a,$$

so führt der Hinweis auf

$$\left(-\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1}=-a$$

sofort zu derjenigen Lösung, welche einzig praktischen Wert besitzt

$$x=-\sqrt[2n+1]{a}.$$

In meiner Auffassung der Dinge bestärkt durch die Lektüre von Lipschitz, die Grundlagen der Analysis (Bonn, Max Cohen & Sohn,

1877), wo auch zuerst nur die positive Wurzel einer positiven Zahl definirt wird, habe ich seit vielen Jahren die Bildung des Begriffes der Wurzel im Elementar-Unterricht auf die absolute Wurzel einer absoluten Zahl beschränkt und erst in der Theorie der komplexen Zahlen alle Wurzeln einer reinen Gleichung nten Grades als Wurzeln einer Zahl betrachtet. Im ersten Teil der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von Otto Stolz (Leipzig, Teubner, 1885), welcher die reellen Zahlen behandelt, — kürzlich unter der Autorschaft Stolz und Gmeiner in 2. Auflage erschienen — wird mit dem Wurzelzeichen nur die absolute Wurzel bezeichnet, ferner wird dort auch der Begriff der Potenz mit gebrochenem Exponenten auf positive Basen beschränkt und $a^{\frac{p}{q}}$ als pte Potenz der absoluten q^{ten} Wurzel von a erklärt. Hermann Grassmann in seinem „Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten" (Berlin, Enslin 1861), auf welches Stolz mehrfach hinweist und dessen Lektüre jedem Lehrer der Mathematik sehr zu empfehlen ist, definirt die Wurzel folgendermassen: „unter $a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a}$, gelesen n^{te} Wurzel aus a, versteht man die positive Rational- oder Irrationalzahl, welche mit n potenzirt a gibt".

Weil eine Einigung aller Lehrer der Mathematik in der behandelten Angelegenheit wünschenswert ist, sind die obigen Darlegungen der Öffentlichkeit übergeben worden.

F. R. Scherrer.

Literarisches.

A. Besprechungen.

Gabriel Compayré, *Pestalozzi et l'éducation élémentaire.* Paris, Paul Delaplane. 90 Rp.

Das klar und anschaulich geschriebene Schriftchen — ein Bändchen der Sammlung „Les grands éducateurs" — gibt ein kurzes, jedoch vollständiges Bild vom Lebensgang und Lebenswerk Pestalozzis. Mit kurzen und zutreffenden Worten werden seine Mitarbeiter, seine Schriften und seine Bestrebungen charakterisirt. Über einige Mitarbeiter Pestalozzis urteilt der Verfasser: Il leur manquait ce qui constituait sa force, la bonté. Seine Methode charakterisirt er kurz so: Tout l'essentiel de la méthode pestalozzienne est contenue dans ces quelques lignes: le principe de l'intuition, celui de la liaison rigoureuse des enseignements successifs; et aussi deux autres principes dont il nous reste à parler: à savoir qu'il n'y a pas d'autre bonne méthode d'éducation que celle qui exerce l'activité et celle qui par suite excite l'intérêt. Über Pestalozzis Gedankenausdruck und Charakter sagt Compayré: Incapable de diriger des hommes, il ne l'était pas moins de gouverner ses idées, de maî-