Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 9 (1899)
Heft: 4

Artikel: Typenrechnen oder Zählen?
Autor: Rüefli, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788741

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Typenrechnen oder Zählen?

Von J. Rüefli, Seminarlehrer in Bern.

Im elementaren Rechenunterricht kommen bei der Einführung der Kinder in das Gebiet der ersten Zahlen zwei wesentlich verschiedene Methoden zur Anwendung. Die einen lassen die Zahlen auf grund der Anschauung durch Zählen, d. h. durch sukzessives Hinzufügen von Einheiten, also durch die einfachste Form des Rechnens auffassen. Bei diesem Verfahren ist es die Operation, welche zur Erfassung der Zahl führt. Die andern aber machen geltend, bevor man überhaupt zählen oder rechnen könne, müssten die Zahlen als Rechenstoff in einem gewissen Umfange schon aufgefasst sein. In naturgemässer Weise könne dies aber nur durch das Anschauen räumlich geordneter Gruppen von Dingen, der sogenannten Zahlenbilder oder Zahltypen, geschehen.

Ein eifriger Vorkämpfer für das Typenrechnen ist K. O. Beetz Rektor in Gotha. Er hat über diesen Gegenstand folgende Schriften veröffentlicht:

1. Das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage. (Halle, 1886.)
2. Das Wesen der Zahl als Einheitsprinzip im Rechenunterricht. (Wiesbaden, 1895.)
3. Die wichtigsten Erklärungsversuche des Zahlbegriffs. (Deutsche Schule, 1898, 6. Heft.)

Beetz sucht sein Typenrechnen aus einer Zahlauffassung abzuleiten, von der er glaubt, sie sei von F. A. Lange in seinen Werken: „Geschichte des Materialismus“ und „Logische Studien“ in bahnbrechender Weise begründet worden. Es wird deshalb zweckmässig sein, aus diesen Werken zunächst einige massgebende Stellen anzuführen:

„Die ältesten Ausdrücke für die Zahlwörter bezeichnen, so weit wir ihren Sinn kennen, überall Gegenstände im Raume mit bestimmten

Eigenschaften, welche der Zahl entsprechen, so z. B. Viereckiges der Zahl vier. Wir sehen daraus auch, dass die Zahl ursprünglich nicht etwa durch systematisches Hinzufügen von einem zu einem u. s. w. entsteht, sondern dass jede der kleineren, dem später entstehenden System zu grunde liegenden Zahlen durch einen besonderen Akt der Synthesis der Anschauungen gebildet wird, worauf dann erst späterhin die Beziehungen der Zahlen zu einander, die Möglichkeit des Addirens u. s. w. erkannt werden." (Logische Studien, Seite 140.)

„Es ist der Raumvorstellung eigen, dass sich innerhalb der grossen, allumfassenden Synthesis des Mannigfaltigen mit Leichtigkeit und Sicherheit kleinere Einheiten der verschiedensten Art aussondern lassen. Der Raum ist daher das Urbild nicht nur der kontinuirlichen, sondern auch der diskreten Grössen, und zu diesen gehört die Zahl, während wir die Zeit kaum anders als Kontinuum denken können. Zu den Eigenschaften des Raumes gehören ferner nicht nur die Verhältnisse, welche zwischen den Linien und Flächen geometrischer Figuren stattfinden, sondern nicht minder die Verhältnisse der Ordnung und Stellung diskreter Grössen. Werden solche diskrete Grössen als unter sich gleichartig betrachtet und durch einen neuen Akt der Synthesis zusammengefasst, so entsteht die Zahl als Summe." (Logische Studien, Seite 141.)

„Die Raumvorstellung des Ausgedehnten und der Figur, der Ordnung und Stellung des Einzelnen in einem Ganzen zeigt uns eine unendliche Fülle von Eigenschaften und Äquivalenten, die alle unter sich und mit gewissen Grundwahrheiten aufs strengste zusammenhängen. Was sich, sei es auch nur durch konventionelle oder willkürliche Annahme, eng an diese Elemente der Raumvorstellung anschliessen lässt, kann in der wissenschaftlichen Form der Notwendigkeit entwickelt werden. Dahin gehören aber vor allen Dingen die Lehren der Logik von Gegenständen überhaupt und die Lehre von Grössen und von Summen gleicher Einheiten, bei denen von allem mit Ausnahme der messbaren und zählbaren Verhältnisse abgesehen wird. Dass es sich mit den Zeitgrössen ebenso verhält, geht schon daraus hervor, dass die Zeit für uns nur eine aus dem Raumbilde der Bewegung auf einer Linie abgeleitete Vorstellung ist." (Logische Studien, Seite 147.)

„Jeden Zahlbegriff erhalten wir ursprünglich als das sinnlich bestimmte Bild einer Gruppe von Gegenständen, seien es auch nur unsere Finger oder die Knöpfe und Kugeln einer Zählmaschine. Hier kann man als vollgültiges Zeugnis für die synthetische Natur der Zahlenbegriffe die Zählmethode und die Zahlausdrücke der Naturvölker und der beginnenden Kultur anführen. Hier liegt überall das sinnliche Bild der Gruppe

oder der Fingerstellung, an welcher man sich die Zahl veranschaulichte, zu grunde.“ (Geschichte des Materialismus, 2. Band, Seite 26.) „So bezeichnet ein Indianerstamm am Orinoco die Fünfzahl mit „eine ganze Hand“, 6 wird durch einen Ausdruck bezeichnet, der bedeutet: „nimm einen von der andern Hand“; für 10 sagen sie „beide Hände“; dann kommen die Zehen der Füsse, so dass „ein ganzer Fuss“ 15 bedeutet, „einer vom andern Fuss“ 16; „ein Indianer“ 20, „einer an den Händen des andern Indianers“ 21 u. s. w. — Wie sehr die so entstandenen Zeichen und Ausdrücke mit der Vorstellung des Gezählten verschmelzen, zeigt namentlich eine seltsame grammatische Konstruktion in der Zulu-Sprache. Hier bedeutet das Wort „Zeigefinger“ (der zweiten Hand, in welcher mit dem Daumen angefangen wird) die Zahl sieben. Infolge dessen wird z. B. der Satz „es waren sieben Pferde“ ausgedrückt durch: „die Pferde haben mit dem Zeigefinger gezeigt“. (Geschichte des Materialismus, 2. Band, Seite 121.)

In diesen Ausführungen glaubt nun Beetz die Begründung der von ihm vorgeschlagenen Art des Typenrechnens zu finden. Er sagt in seiner Abhandlung über die wichtigsten Erklärungsversuche des Zahlbegriffs: „Diese Ergebnisse eröffnen ganz neue Gesichtspunkte; mit ihnen vollzieht sich ein völliger Umschwung in der Zahlauffassung. Fr. A. Lange sucht die Zahl nicht mehr in den Dingen selbst, auch nicht in ihren Qualitäten, sondern in den Verhältnissen der Ordnung diskreter Grössen.“

„Noch folgenschwerer, besonders für den Rechenunterricht, ist die Erkenntnis, dass die Zahlvorstellung nicht aus der Formel $1 + 1 + 1 \ldots$ hervorgeht, dass sich vielmehr umgekehrt diese Formel erst aus der Zahlvorstellung ergibt. Die Zahlauffassung schreitet mithin nicht fort wie die natürliche Zahlenreihe, hat mit dieser überhaupt von Haus aus nichts zu tun; sie beruht im Gegenteil auf simultaner Auffassung von Gruppen und hängt von deren jeweiligen Umfange ab. Erst die nötigen Grundvorstellungen, dann das Zahlensystem!“ „Wenn erst aus den Zahlvorstellungen die Urformen der Rechenoperationen, nämlich $1 + 1 + 1 \ldots$, bezüglich $x - 1 - 1 \ldots$, hervorgehen, so gehören sie zu den Elementarbegriffen, die sich auf die Anschauung gründen, und zwar auf die Zahlanschauung selbst. Deshalb erst die Zahlvorstellung, dann die Operation!“

„Die Zahl ist weder reales Ding, noch Qualität; ebensowenig gehört sie lediglich zu den reinen Verstandesbegriffen, vorausgesetzt, dass solche überhaupt existiren. Diese zwiefache Erkenntnis hat sich als zuverlässiges Resultat einer Geistesarbeit, die nach Jahrtausenden zählt, ergeben. Ebenso gewiss aber ist andererseits, dass die Zahl sowohl eine objek-

tive als subjektive Seite hat, dass ihr also eine extensive und intensive Existenz zugleich zukommt. Unterschiedlichkeit im Rahmen der Einheitlichkeit macht ihr Wesen aus. Unterschiedlichkeit ist der äussere, Einheitlichkeit der innere Grund ihres Entstehens. Der eine liegt in der Eigentümlichkeit der Aussenwelt, sich immer nur in scharf abgegrenzten Sonderheiten darzustellen; der andere entspringt dem Wesen der Innenwelt, die Vielgestaltigkeit um sich nach einheitlichen Gesichtspunkten in sich zusammenzufassen."

„Demnach unterscheidet sich die Auffassung der Dinge und Qualitäten wesentlich von derjenigen der Zahl. Dort schreitet der psychologische Vorgang von der Empfindung zur Wahrnehmung und findet seinen vorläufigen Abschluss in der Vorstellung. Bei der Zahl hingegen erweitert sich der Prozess zum Urteil ... Solange also der vorstellende Geist in der Wahrnehmung schlechtweg befangen bleibt, kommen ihm nur Dinge und Qualitäten zum Bewusstsein. Erst wenn sich die innere Tätigkeit zur Vergleichung erweitert, ist die Möglichkeit zur Zahlauffassung gegeben. Den Anfang macht das gedankliche Beziehen damit, dass es die Unterschiede erkennt, wodurch der Teil der Umgebung, auf welchen die Aufmerksamkeit gerichtet ist, in Sonderheiten auseinanderfällt. Der zweite Schritt charakterisirt sich in gewissem Sinne als Gegenwirkung: die Vielgestaltigkeit wird in eine einheitliche Form gebracht, die Sonderheiten also als Teile eines Ganzen aufgefasst. Die Zahlauffassung hat sich vollzogen, wenn sich der Geist der Unterschiedlichkeit in der Einheitlichkeit bewusst wird. Es handelt sich demnach um einen doppelten Vorgang, zunächst um die Analysis oder Differenzirung eines Vorstellungskomplexes in Verschiedenheiten, sodann um die Synthesis zur Einheit, um die Zusammenfassung der auseinanderliegenden Wesenheiten."

„Mit F. A. Langes Zahlauffassung ist der überlieferten Manier, den ersten Rechenunterricht zu einem Zählunterricht zu gestalten, die Zahlanschauung auf Zählen zu gründen, der Boden genommen. Sache der „Zähler" ist es, entweder einen stichhaltigen Gegenbeweis zu erbringen oder sich fernerhin jenes pädagogischen Unfuges zu enthalten."

Die Aufgabe dieser Abhandlung besteht nun darin, den von Beetz geforderten, stichhaltigen Gegenbeweis zu führen; dadurch soll zugleich auch der „pädagogische Unfug", welchen er in mehr temperamentvoller als wissenschaftlich behutsamer Weise den „Zählern" zum Vorwurf macht, ins richtige Licht gestellt werden. Ich werde meine Beweisführung in zwei Teile gliedern und diese an die beiden Hauptgedanken der von Beetz entwickelten Auffassung anschliessen.

I.

„Das Wesen der Zahl liegt nicht in den Dingen und ihren Qualitäten, sondern in der räumlichen Ordnung diskreter Grössen.“

Wenn dieser Satz ein wohl begründetes, unbestreitbar richtiges Resultat der von F. A. Lange durchgeführten zahltheoretischen Untersuchungen wäre, so müsste sich mit demselben allerdings ein völliger Umschwung in der Zahlauffassung vollziehen. Haben wir es aber wirklich mit einem über jeden begründeten Zweifel erhabenen Ergebnis, mit einer endgültig festgestellten Wahrheit zu tun? Die kritische Beleuchtung dieser Frage ist meine nächstliegende Aufgabe.

Wenn eine gewisse Menge von Dingen, etwa von 8 Äpfeln, gegeben ist, so können diese zerstreut an den Zweigen eines Baumes hängen, oder eben so zerstreut unter dem Baume im Grase liegen. Sie können aber auch in verschiedener Weise regelmässig angeordnet werden, so z. B. in eine Reihe, in zwei Reihen von je 4 Stück, auf die Ecken eines regelmässigen Achtecks, in ein Quadrat, nämlich ein Stück auf jede Ecke und ein Stück auf die Mitte jeder Seite u. s. w. Läge nun das Wesen der Zahl in der Ordnung diskreter Grössen, so würde offenbar durch jede dieser Anordnungen eine andere Zahl dargestellt, während doch wohl niemand bestreiten wird, dass in allen Fällen nicht mehr und nicht weniger als 8 Äpfel vorhanden sind. Mit dem Ausdruck „8“ bezeichnen wir nicht die Ordnung der Dinge, sondern das Mengeverhältnis ihrer Gesamtheit. Wenn man also das Wesen der Zahl in der Ordnung suchen müsste, so würde der Ausdruck „8“ nach wie vor das Mengeverhältnis bezeichnen, aber er würde nicht mehr ein Zahlname sein; dieser Charakter würde den verschiedenen Namen für die Anordnungen zukommen, in welche 8 Dinge zusammengestellt werden können. Man stünde also vor der geradezu ungeheuerlichen Konsequenz, dass man für eine und dieselbe Menge je nach ihrer Anordnung verschiedene Zahlnamen anwenden müsste. Gibt es wirklich Gründe des Denkens oder der Zweckmässigkeit, durch welche dieser völlige Umschwung in der Zahlauffassung gerechtfertigt werden könnte?

In seiner „Philosophie der Arithmetik“ sagt Husserl: „Vergegenwärtigen wir uns an irgend welchem Beispiele, wie wir räumliche Objekte kollektivisch zusammenfassen oder zählen. Achten wir da stets und notwendig auf die Verhältnisse der Stellung und Ordnung? Gewiss nicht! Unendlich viele Stellungen und Ordnungen gibt es, die Zahl aber bleibt unverändert. Zwei Äpfel bleiben zwei Äpfel, ob wir sie nähern oder entfernen, ob wir sie nach rechts verschieben oder nach links, nach oben

oder nach unten. Die Zahl hat eben mit der räumlichen Lage nichts zu tun. Mögen immerhin die Relationen der Stellung und Ordnung bei der Vorstellung einer Vielheit von Raumgegenständen im Phänomen implicite mit vorgestellt sein; sicher ist es, dass sie bei der Zusammenfassung und Zählung nicht die Objekte des aussondernden und den Inhalt des Zahlbegriffes bestimmenden Interesses bilden."

So treffend diese Ausführungen sind, so geht doch Husserl zu weit, wenn er behauptet, die Zahl habe mit der räumlichen Lage nichts zu tun. Sie hat damit nicht mehr und nicht weniger zu tun, als mit andern zählbaren Sonderheiten. Wenn die in zwei Mengen enthaltenen Dinge einander so zugeordnet werden können, dass mit jedem Ding der einen Menge ein Ding der andern verbunden wird und keine Dinge unverbunden bleiben, so hat man die Gewissheit, dass beide Mengen gleich viel Dinge enthalten. Dieses Prinzip der Gleichzahligkeit kommt auch zur Anwendung, wenn Dinge in Gruppen geordnet werden. Da nämlich hiebei für jedes Ding eine Raumstelle erforderlich ist, so können in eine Gruppe genau so viele Dinge eingeordnet werden, als nach dem Gesetz der Anordnung Raumstellen verfügbar sind. In jedem solchen Falle liegen also eigentlich zwei Mengen vor, nämlich eine Menge von Raumstellen und eine mit ihr gleichzahlige Menge von Dingen. Das ist's, was die räumliche Anordnung der Dinge mit ihrer Zahl zu tun hat. Mit einer bestimmten Ordnung ist unter allen Umständen die gleiche bestimmte Zahl verbunden. Dieser Satz darf aber nicht umgekehrt werden; wenn auch die Zahl der Dinge gegeben ist, so ist damit ihre Anordnung noch gar nicht bestimmt, denn sie können ja in sehr verschiedener Weise gruppirt werden. Wenn man sich von einem bestimmten Raumschema eine klare Vorstellung fest eingeprägt hat, so dass man es immer und überall, wo es vorkommt, mit Leichtigkeit wieder erkennt, und wenn man ausserdem die Zahl der in diesem Schema nach dem Gesetz der Anordnung enthaltenen Raumstellen durch Zählen, d. h. durch vergleichendes Denken schon aufgefasst hat, dann — und nur dann — kann dieses Raumbild als Masstab für die Zahl der Dinge dienen, welche in dasselbe eingeordnet oder ihm eindeutig zugeordnet werden können.

Beim ersten Anblick eines Zahlenbildes, d. h. einer charakteristisch und leicht erkennbar geordneten Gruppe von Dingen, gewinnt das Kind weiter nichts als eine Anschauung derselben; den dieser Gruppe zukommenden Vielheitsgrad, d. h. die Zahl, kann es nur durch zahlauffassendes Denken, durch den psychischen Akt des Zählens ermitteln. Wenn dann in solcher Weise Bild und Zahl in fester Ver-

knüpfung aufgefasst werden, so ist es dem kindlichen Geiste leicht, beide auch in solchem Zusammenhange festzuhalten. Wird später das betreffende Zahlenbild, d. h. eine übereinstimmend geordnete Gruppe von Dingen, dem Kinde wiederum vorgelegt, so tritt zunächst das Wiedererkennen ein. Die neue Anschauung bietet dem Kinde ein Bild der Zahlenfigur, was zur Folge hat, dass das durch frühere Anschauung aufgefasste Bild wiederum ins Bewusstsein tritt, mit dem neuen Bilde verglichen und gleich gefunden wird. Mit diesem Bilde wird aber auch die früher in Verbindung mit demselben aufgefasste Zahl reproduzirt und durch Analogieschluss auch der vor Augen liegenden Gruppe beigelegt, so dass es nicht notwendig ist, diese Zahl wiederum durch Zählen zu bestimmen. Wenn also das Kind beim Anblick eines ihm vorgelegten Zahlenbildes die betreffende Zahl auf den „ersten Blick" erkennt, so ist dies offenbar gar keine unmittelbare Zahlauffassung durch blosse Anschauung; denn es wird ja dabei durch vergleichendes Denken das Resultat früherer Zahlauffassung zur Anwendung gebracht. Man kann also nachträglich das zeitraubende Zählen durch Anwendung der Zahlenbilder ersetzen; die ursprüngliche Auffassung der Zahlen aber ist nur durch Zählen auf grund der Anschauung möglich.

Eine ähnliche Sachlage besteht offenbar für die Naturmenschen bei ihrer Zählweise und der Art ihrer Zahlbezeichnung. Wenn der Indianer am Orinoco, um z. B. die Zahl der gefangenen Fische zu bezeichnen, sich des Ausdrucks bedient: „Nimm einen von der andern Hand," so will er damit sagen: „Ich habe so viele Fische gefangen, als sich vom kleinen Finger der einen Hand bis und mit dem Daumen der andern Hand Finger vorfinden." Und wenn in der Zulu-Sprache der Satz: „Es waren sieben Pferde," ausgedrückt wird durch: „Die Pferde haben mit dem Zeigefinger gezeigt," so wird dabei die entsprechende Reihe der Finger als anschaulicher Masstab für die Zahl der Pferde gebraucht. Um aber in solcher Weise die Zahl der Dinge ermitteln und bezeichnen zu können, muss sich das Denken dieser Naturmenschen schon zu der Einsicht emporgearbeitet haben, dass die Zahl etwas Allgemeines ist, das verschiedenen und verschieden geordneten Mengen zukommt. Die Erfahrung muss sie gelehrt haben, dass es zwar gewisse räumliche Anordnungen von Dingen gibt, welche die Auffassung der Zahlen erleichtern, dass aber das Wesen der Zahl nicht in der Ordnung diskreter Grössen liegt. Sie müssen zu der Einsicht gelangt sein, dass verschieden geordnete Mengen in der Zahl ihrer Sonderheiten gleich sind, sobald diese einander eindeutig und restlos zugeordnet werden können. Ohne diese Erkenntnis könnte es ihnen nicht einfallen, eine Reihe oder Gruppe

von Fingern als Masstab für die Zahl von Dingen zu gebrauchen, welche sich ihnen in wesentlich andern Raumbildern darstellen.

Es ist hergebrachte Gewohnheit, einen Begriff als eine abgeblasste Allgemeinvorstellung zu betrachten, welche nur die einer Menge von Dingen oder Vorstellungen gemeinsamen Merkmale enthalte. Bei näherer Prüfung stellt sich aber heraus, dass ein Begriff zwar gedacht, aber nicht in einem Bilde vorgestellt werden kann. Es ist unmöglich, sich ein Dreieck vorzustellen, welches weder rechtwinklig, noch spitzwinklig, noch stumpfwinklig, weder gleichseitig, noch gleichschenklig, noch ungleichseitig und doch dies alles zugleich wäre. Ein Begriff ist also eigentlich gar keine Vorstellung, wohl aber begreift er eine Menge von Vorstellungen unter sich. Er ist die abstrakte Regel, das Gesetz, nach welchem das Denken eine Vielheit von Dingen oder Vorstellungen zur einheitlichen Art zusammenfasst. Macht man den Versuch, sich einen Begriff vorzustellen, so tritt eine Einzelvorstellung in den Vordergrund des Bewusstseins, welche ausser den Merkmalen, die den Inhalt dieses Begriffes bilden, noch andere für denselben unwesentliche Merkmale enthält. Diese Vorstellung ist offenbar nicht der Begriff, wohl aber dient sie dem Denken als Stellvertreterin desselben. Damit aber eine einzelne Vorstellung diese stellvertretende Funktion erfüllen könne, darf man von ihren Merkmalen nur diejenigen als konstant betrachten, welche den Inhalt des Begriffes bilden; die übrigen hat man variabel zu denken, so dass sie im Gedankenverlaufe durch andere ersetzt werden können, ohne dass das Denken aus dem Rahmen dieses Begriffes heraustreten müsste. Nicht selten überträgt das Denken die Stellvertretung des Begriffes einem einzelnen Merkmal, und noch dazu einem solchen, das für den Begriff unwesentlich ist. Zur Illustration möge ein Beispiel dienen. Ein Arzt bemühte sich, einem kranken Kinde mit dem Arzneilöffel eine ihm unangenehme Arznei einzuflössen. Als das Kind beim nächsten Besuche des Arztes diesen herankommen sah, da rief es: „Der Doktorlöffeli kommt.“ Wie ich beobachten konnte, benutzte es während einiger Zeit den Arzneilöffel als stellvertretendes Merkmal für den Begriff des Arztes.

Gerade hier ist es nun, wo die Zahlenbilder eine zweite wichtige Aufgabe zu erfüllen haben. Wenn das Kind beim Anhören oder Aussprechen des Wortes „vier“ sich eine Reihe oder eine quadratische Gruppe von vier Dingen vorstellt, so dienen ihm diese Raumbilder als stellvertretende Vorstellungen für den Zahlbegriff „vier“. Und wenn der Indianer am Orinoco die Zahl 6 mit dem Ausdruck: „Nimm einen von der andern Hand“, bezeichnet, so ist es das Raumbild der betreffenden

Fingerreihe, das seinem Denken den Zahlbegriff 6 zu vertreten hat. Eigentümlich ist hier, dass nicht die ganze in betracht kommende Fingerreihe, sondern nur der Finger, mit welchem sie abschliesst, sprachlich bezeichnet wird. Dies ist ausreichend, da bei dieser Art des Fingerzählens die allgemein bekannte Regel gilt, die Zählung mit dem kleinen Finger der einen Hand zu beginnen, so dass der Anfang der Reihe ein für allemal festgestellt ist.

Auch bei dieser Anwendung der Zahlenbilder überträgt das Denken die Stellvertretung des Begriffs einem für diesen unwesentlichen Merkmal, nämlich dem Raumbilde der Reihe oder Gruppe. Aber gerade die Aufgabe, welche hier den Zahlenbildern zugewiesen wird, setzt die Einsicht voraus, dass diese Raumbilder der Ordnung mit vielen andern, abweichend oder gar nicht geordneten Mengen in der Zahl ihrer Sonderheiten äquivalent sind, was nur möglich ist, wenn das Wesen der Zahl nicht in der Ordnung diskreter Grössen liegt.

In seinen logischen Studien bekämpft Lange das Verfahren, die Zahl mit der Zeit in engste Verbindung zu bringen; was die Zeit hier leisten solle, könne man einfacher und sicherer aus der Raumvorstellung ableiten. Schon Baumann habe gezeigt, dass die Zahl weit besser mit der Raumvorstellung als mit derjenigen der Zeit im Einklang stehe. Die algebraischen Axiome, sagt Lange, beruhen, wie die geometrischen, auf räumlicher Anschauung; die ersten Zahlauffassungen schliessen sich an das Raumbild der Ordnung und Stellung diskreter Grössen an; jeden Zahlbegriff erhalte man ursprünglich als das sinnlich bestimmte Bild einer Gruppe von Raumgegenständen. Aus dieser Auffassung zieht nun Beetz den zur Begründung seines Typenrechnens verwertbaren Schluss, Lange habe das Wesen der Zahl in der Ordnung diskreter Dinge gesucht. Aber gerade dies hat Lange nicht getan, wohl aber hat er an verschiedenen Stellen gerade die entgegengesetzte Ansicht ausgesprochen. In seiner „Geschichte des Materialismus“ (2. Band, Seite 14) behauptet Lange sehr entschieden, die arithmetischen Wahrheiten seien keine Erfahrungssätze, da sie, sobald man sie durch Anschauung demonstrirt habe, sofort mit dem Bewusstsein ihrer Allgemeinheit und Notwendigkeit verbunden seien. Wenn man z. B. durch Erfahrung lernen wollte, dass 7 und 5 immer die Summe von 12 ergeben, so müsste man systematische Experimente darüber anstellen, ob es nicht etwa bei abweichender Zusammenstellung der Dinge sich plötzlich anders herausstelle. Er führt dann weiter aus, dass, wenn die Sätze der Arithmetik Erfahrungssätze wären, die Überzeugung von der Unabhängigkeit aller Zahlenverhältnisse von der Anordnung der gezählten Gegenstände

sich erst zu allerletzt ergeben würde, da jede Induktion die allgemeineren Sätze später gebe als die besonderen. Hier behauptet Lange deutlich genug, dass alle Zahlenverhältnisse von der Anordnung der gezählten Dinge unabhängig seien, also gerade das Gegenteil von dem, was er nach Beetz begründet und gelehrt haben soll.

In seinen logischen Studien zählt Lange die Zahlen zu den diskreten Grössen. Müsste aber das Wesen der Zahl in der Ordnung solcher Grössen gesucht werden, so wären die Zahlen keine Grössen; denn eine Anordnung ist doch wohl weder gross noch klein. Irgend eine Menge ist nur dann eine Grösse, wenn die in ihr enthaltenen Dinge Grössen sind. Der Grössencharakter der Dinge und ihrer Menge wird aber durch abweichende Anordnung nicht verändert; 100 Fünffrankenstücke bilden die gleiche Grösse, ob man sie in Fünfergruppen, in Zehnerreihen oder in Säulen von je 20 Stück ordne. Hat man es aber mit Sonderheiten zu tun, welche keine Grössen sind, so werden sie auch durch irgend welche Anordnung nicht in Grössen umgewandelt.

Die Raumvorstellung des Ausgedehnten und der Figur, der Ordnung und Stellung des Einzelnen in einem Ganzen zeigt uns, wie Lange ganz richtig hervorhebt, seine unendliche Fülle von Äquivalenten. Alle die verschiedenen Gruppen, in welche eine gegebene Menge von Dingen geordnet werden kann, sind in der Zahl ihrer Sonderheiten äquivalent, aber nur dann, wenn das Wesen der Zahl nicht in der Ordnung diskreter Dinge liegt; denn sonst würde ja jede abweichende Ordnung eine andere Zahl darstellen.

Lange spricht von Verhältnissen, die sich an die Raumvorstellung der Ordnung und Stellung anschliessen lassen und deshalb in der wissenschaftlichen Form der Notwendigkeit entwickelt werden können. Zu diesen Verhältnissen rechnet er auch die Summen gleicher Einheiten, die Zahlenverhältnisse. Wenn aber diese nach ihrem Wesen ausschliesslich nur in der Raumvorstellung der Ordnung und Stellung diskreter Grössen lägen, so brauchte man sie nicht erst noch durch willkürliche oder konventionelle Annahme an die Raumvorstellung anzuschliessen, da sie von Haus aus schon in derselben enthalten wären. Wenn es also nach Lange Zahlenverhältnisse gibt, welche sich an das Raumbild der Ordnung anschliessen lassen, so müssen sie nichträumlicher Art sein, womit also zugestanden wird, dass das Wesen der Zahl nicht in der räumlichen Ordnung diskreter Dinge liegt. Lange lässt ferner die Zahl als Summe in der Weise entstehen, dass gleichartige, d. h. aus Dingen gleicher Art bestehende diskrete Grössen durch den Akt der Synthesis zusammengefasst werden. Da muss er doch wohl das Wesen

der Zahl in den Dingen und ihren Merkmalen gesucht haben. Wenn es nämlich in der Ordnung der Dinge läge, wenn also, wie Beetz behauptet, die Zahl zwar an den Dingen wahrgenommen würde, im übrigen aber gar nichts mit ihnen zu tun hätte, dann wäre es ja ganz gleichgültig, ob Dinge gleicher oder verschiedener Art zur Zahl vereinigt werden. Es ist aber eine bekannte Tatsache, dass eine Gruppe von Dingen um so klarer ausgeprägt als einheitliche Menge erscheint, je gleichartiger die Dinge sind.

Endlich sagt Lange, bei den Summen gleicher Einheiten werde von allem mit Ausnahme der zählbaren Verhältnisse abstrahirt. Daraus folgt aber, dass er diese Verhältnisse in den Dingen gesucht hat; denn er stellt sie ja als das dar, was von ihnen übrig bleibt, wenn man von allen andern Merkmalen absieht. Wie er als charakteristisch hervorhebt, bezeichnen die ältesten Zahlwörter der Naturmenschen Raumgegenstände mit Eigenschaften, die der Zahl entsprechen, z. B. „eine ganze Hand“ der Zahl 5, „ein ganzer Indianer“ der Zahl 20 u. s. w. Wenn aber nach Lange die Dinge Eigenschaften haben, die der Zahl entsprechen, so steht diese Tatsache doch gewiss im Widerspruch mit der von Beetz so entschieden aufgestellten Behauptung, Lange habe das Wesen der Zahl nicht in den Dingen und auch nicht in ihren Merkmalen gesucht.

Wenn Beetz den Nachweis zu erbringen sucht, dass die Zahl weder Ding noch Qualität sei, so habe ich gar nichts dagegen einzuwenden. Dieses Zugeständnis veranlasst mich aber keineswegs, nun mit ihm das Wesen der Zahl in der Ordnung diskreter Grössen zu suchen. Es liegt ja noch eine andere Möglichkeit vor. Nach meiner Auffassung ist die Zahl das Verhältnis der Quantität, oder, wie Pestalozzi sagt, das in den Dingen enthaltene Verhältnis des „Mehrs oder Minders“. Als Quantitätsverhältnis ist die Zahl weder Ding noch Qualität, wohl aber ist sie, wie Wundt in seiner „Logik“ sagt, „im weiteren Sinne des Wortes“ eine Eigenschaft des einzelnen Dinges oder einer Menge von Dingen. Beetz und andere sprechen der Eins den Charakter der Zahl ab. Sie sagen, eine Zahl sei Einheit und Vielheit zugleich; die 1 aber sei nur Einheit, also keine Zahl. Wenn trotzdem die Mathematiker mit der 1 so operiren, als ob sie eine Zahl wäre, so geschehe dies nicht aus logischen, sondern aus Gründen der Zweckmässigkeit. Ich betrachte diese Auffassung, auch vom Standpunkte der Logik aus, als total verfehlt. Nach meiner Ansicht ist die 1 nicht nur eine Zahl so gut wie jede andere, sondern sie ist die Urzahl, ohne welche die andern in der Luft schweben würden. Was man zu einer Zahl addirt oder von ihr subtrahirt, muss etwas ihr Gleichartiges, also eben-

falls eine Zahl sein. Es hat keinen verständlichen Sinn, zu einer Zahl etwas hinzuzufügen oder von ihr wegzunehmen, was nicht Zahl ist. Nun wird wohl niemand bestreiten, dass man 1 zu einer Zahl addiren oder von derselben subtrahiren kann; folglich muss 1 eine Zahl sein, denn sonst wären die grundlegenden arithmetischen Sätze, wie z. B. $3 + 1 = 4$, $4 - 1 = 3$, sinnlos. Wenn man ferner zu irgend einer Zahl eine andere addirt oder von ihr subtrahirt, so wird dadurch die gegebene Zahl verändert, im ersten Falle vermehrt, im zweiten vermindert. Dies geschieht aber auch, wenn man 1 addirt oder subtrahirt. Wäre 1 keine Zahl, so würde irgend eine Zahl durch Hinzufügen oder Wegnehmen von 1 als Zahl gar nicht verändert, weder vermehrt, noch vermindert Dann aber wären arithmetische Sätze der angeführten Art eben so unrichtig als sinnlos. Wer also der 1 den Charakter der Zahl abspricht, zieht der Arithmelik den Boden unter den Füssen weg. Wenn es übrigens für die Arithmetik schwerwiegende Gründe gibt, 1 als Zahl zu behandeln, so vermag ich nicht einzusehen, welche logische Gründe uns daran hindern könnten, den Zahlbegriff in der Weise zu definiren, dass im Rahmen desselben auch die 1 ohne Widerspruch untergebracht werden kann. Die Möglichkeit einer solchen Definition ergibt sich schon daraus, dass eine Vielheit, damit sie Zahl sei, zugleich auch Einheit sein muss. Das Merkmal der Einheit bildet also gar keinen Widerspruch zum Zahlbegriff, es kommt ihm vielmehr als notwendige Eigenschaft zu.

Logisch betrachtet, hat die Zahl mit dem Gebiete des Raumes gerade so viel zu tun, wie mit anderen Gebieten, nicht mehr und nicht weniger. Jedes in der Anschauung, in der Vorstellung oder im Denken unterschiedene oder unterscheidbare Etwas (Ding, Qualität, Quantität, Zustand, oder Verhältnis von solchen) ist ein Etwas seiner Art, es kommt ihm als Quantitätsverhältnis die Zahl 1 zu. Ist aber eine Menge gleichartiger Sonderheiten gegeben, so muss ihr Quantitätsverhältnis, da es für jedes der vorhandenen Dinge die Zahl 1 enthält, eine Summe von Zahlen sein, von welchen jede 1 ist.

Wenn man auf grund statistischer Erhebungen gewisse gesellschaftliche Erscheinungen, wie z. B. die Zu- und Abnahme in der Häufigkeit der Geburten, der Todesfälle, der Eheschliessungen, der Ehescheidungen, der Verbrechen u. s. w., durch Kurven oder andere Raumbilder veranschaulicht, so wird wohl niemand daraus den Schluss ziehen, dass das Wesen dieser Erscheinungen nicht in ihnen selber, sondern in den zur Veranschaulichung ihres gesetzmässigen Verlaufes verwendeten Raumbildern liege. Wenn wir von zwei in ihrem Wesen grundverschiedenen Erscheinungen der angeführten Art die eine als Mittel gebrauchen, um

gewisse Seiten der anderen zu veransschaulichen, so ist es die grössere Anschaulichkeit des einen Phänomens, also ein psychologisches Motiv, das uns zu diesem Verfahren veranlasst. Die logische Berechtigung dazu schöpfen wir aber aus der Erkenntnis, dass beide Erscheinungen in dem, worauf es eben ankommt, nämlich im vorliegenden Falle in dem Gesetz der Grössenveränderung, übereinstimmen. So sind auch die Raumbilder der Ordnung ein zweckmässiges Mittel, die Zahlen zu veranschaulichen und dadurch ihre Auffassung und Ermittlung zu erleichtern. Wenn wir, um die Zahl der in einer ungeordneten Menge enthaltenen Dinge zu ermitteln, diese Dinge in eine als Zahlenfigur leicht erkennbare Gruppe ordnen, so haben wir bei diesem Verfahren das bestimmte Bewusstsein, dass die Zahl auch der ungeordneten Menge zukommt und durch die Ordnung in ihrem Wesen nicht verändert, wohl aber anschaulicher wird. Wir können uns 16 Frankenstücke sehr leicht als eine Gruppe vorstellen, die aus vier Reihen von je vier Stücken besteht; wenn aber die Frankenstücke zerstreut auf dem Tische liegen, oder ein Häufchen bilden, oder in eine Reihe geordnet sind, so erhalten wir von der gleichen Menge nur ein unbestimmtes Mengebild. Dadurch wird aber an der Tatsache, dass es 16 Frankenstücke sind, gar nichts geändert. Nach dem Prinzip der Gleichzahligkeit bei eindeutiger Zuordnung kann die Zahl auch ohne Mithülfe der Zahlenbilder durch mechanisches Zählen am Leitfaden der Zahlnamenreihe sicher ermittelt merden. Wenn man aus einer Menge ein Ding nach dem andern herausgreift und jedem den entsprechenden Zahlnamen zuordnet, so hat man die Gewissheit, dass die durchgezählte Menge so viele Dinge enthält, als man Zahlnamen verwendet hat. In diesem Falle dient aber nicht eine anschauliche Gruppe, sondern die dem Gedächtnis eingeprägte Reihe der Zahlnamen als Masstab für die Zahl, und zur Stellvertretung des Zahlbegriffes steht dem Denken keine klare Vorstellung zur Verfügung, es muss sich mit einem unbestimmten Mengebild und mit einem Namen für die Zahl begnügen. Mit diesem abstrakten Verfahren der Zahlermittlung durch mechanisches Zählen darf aber ein naturgemäss vorgehender Rechenunterricht nicht beginnen; denn es kann erst dann in seiner Weise gute Dienste leisten, nachdem das Kind eine ausreichende Menge klarer Grundvorstellungen erworben hat. Hier finde ich in voller Übereinstimmung mit Beetz die wichtige Aufgabe der Zahlenbilder, während wir in der logischen und psychologischen Begründung dieser Aufgabe verschiedene Wege gehen. Beetz sucht die Bedeutung der Zahlenbilder aus der Voraussetzung abzuleiten, dass das Wesen der Zahl in der Ordnung diskreter Dinge liege; ich aber glaube

die Haltlosigkeit dieser Ansicht in ausreichendem Masse nachgewiesen zu haben. Welche Konsequenzen diese abweichende Grundlegung in der methodischen Ausgestaltung des Typenrechnens haben muss, soll im zweiten Teil dieser Abhandlung nachgewiesen werden.

II.

„Die Zahlauffassung schreitet nicht fort, wie die natürliche Zahlenreihe, hat mit dieser überhaupt von Haus aus nichts zu tun; sie beruht im Gegenteil auf simultaner Auffassung von Gruppen und hängt von deren jeweiligen Umfange ab.“

Hier habe ich zunächst zu F. A. Langes Auffassung über das Verhältnis von Raum und Zeit Stellung zu nehmen. Lange betrachtet die Zeit als eine aus dem Raumbilde der Bewegung auf einer Linie abgeleitete Vorstellung. Er behauptet, empirisch betrachtet, bilde sich die Zeitvorstellung neben und aus der Raumvorstellung verhältnismässig spät, langsam und unsicher. Es sei Tatsache, dass alle unsere empirischen Zeitvorstellungen sich an Raumvorstellungen anschliessen. Eine Linie bilde uns die Vorstellung vom Verlaufe der Zeit; Bewegungen im Raum geben uns Veranlassung, die Zeit zu messen. Daraus dürfe man schliessen, dass die Zeitvorstellung neben der Raumvorstellung nur eine sekundäre sei. Während ferner der Raum das Urbild sowohl der kontinuirlichen als auch der diskreten Grössen sei, so könne man dagegen die Zeit kaum anders wie als Kontinuum denken. Daraus folge aber, dass die Zahl weit besser mit der Raumvorstellung als mit derjenigen der Zeit im Einklang stehe.

Diese Auffassung betrachte ich als eine durchaus verfehlte. Die Zeitvorstellung wird gar nicht erst aus dem Raumbilde der Bewegung auf einer Linie abgeleitet. Ihre ersten Ansätze entstehen und entwickeln sich schon früher unabhängig von der Raumvorstellung und wahrscheinlich sogar vor derselben. Die Zeitvorstellung hat ihre ursprüngliche Quelle in den Empfindungen, die mit den Bedürfnissen des Kindes und deren Befriedigung zusammenhängen. Wenn der Säugling sich unbehaglich fühlt, wenn er Hunger, Durst, Schmerz u. s. w. empfindet, so schreit er. Dieses Schreien ist zunächst als Reflexwirkung die kausal bedingte Folge seines Zustandes, ohne dass eine Vorstellung damit verbunden wäre. In der Regel wird nun dem Kinde eine Form der Pflege zu teil; die Mutter reicht ihm Nahrung, sie legt es trocken u. s. w. So bildet sich für das Kind eine regelmässige zeitliche Folge zwischen der Kundgebungs einer Bedürfnisse und deren Befriedigung durch die Pflege.

Durch die häufige Wiederholung und durch ihre kräftigen Reize muss sich diese zeitliche Folge dem Geiste des Kindes immer fester einprägen und notwendig zur Bildung der Zeitvorstellung führen, ohne dass dabei die Raumvorstellung mitwirken müsste. Dies ergiebt sich insbesondere auch daraus, dass das Schreien des Kindes mehr und mehr zu einem demonstrativen wird; wenn man es trotz des Schreiens warten lässt, so schreit es heftiger. Zum Gefühl des Mangels gesellt sich eben noch dasjenige getäuschter Erwartung, welches ohne Zeitvorstellung gar nicht möglich wäre.

Eine zweite Quelle der Zeitvorstellung liegt in den Schalleindrücken. Das Kind fängt schon frühe an, Laute und Töne wahrzunehmen und auf dieselben zu achten. Es lässt sich durch die kosenden Worte der Mutter oder durch die sanften Töne eines Wiegenliedes beruhigen; es kennt seine Mutter an der Stimme schon zu einer Zeit, da es das Auge noch nicht suchend nach ihr richtet. Wenn nun Gehörsempfindungen in ihrer zeitlichen Folge so weit auseinander liegen, dass das Kind sie zu unterscheiden vermag, so müssen sie sich seiner Vorstellung auch als zeitliche Folge einprägen, also wiederum unabhängig von der Raumvorstellung die Herausbildung der Zeitvorstellung bewirken. Erst später achtet das Kind auf die Bewegung der Gegenstände im Raume, wobei es die schon vorhandene Zeitvorstellung mit dem Raumbilde der Bewegung verbindet und dadurch eine Vorstellung ihrer Dauer erhält. Es ist freilich wahr, dass wir die objektiven Zeitmasse dem Gebiete der räumlichen Bewegung entnehmen; aber dies geschieht erst, nachdem sich vorher schon aus anderen Wahrnehmungsgebieten subjektive Masse für die Zeit herausgebildet haben.

Raum und Zeit sind für unser Vorstellen kontinuirlich. Lücken können wir uns weder im Raum noch in der Zeit vorstellen; Teile des Raumes, die nicht unmittelbar zusammenhängen, sind durch andere in kontinuirlicher Folge stehende Raumteile verbunden, und gerade so ist es bei der Zeit. Die Vorstellungen dieser Kontinuen aber entwickeln sich in wesentlich verschiedener Weise. Die Lichtempfindungen bieten dem Kinde ursprünglich nur ein verschwommenes, kontinuirliches Raumbild, während es erst nach und nach die einzelnen Raumgegenstände als Sonderheiten unterscheiden lernt. Die Entwicklung der Zeitvorstellung aber zeigt einen gerade entgegengesetzten Verlauf. Das Kind nimmt zunächst nur in zeitlicher Folge stehende, deutlich ausgeprägte Sonderheiten wahr, und nachher erst schliesst sich diese Reihe getrennter Einzelheiten zur Vorstellung des kontinuirlichen Zeitverlaufes zusammen.

Aus der Tatsache, dass die ältesten Zahlnamen Raumgegenstände mit Eigenschaften, die der Zahl entsprechen, bezeichnen, folgert Lange, dass die Zahlauffassung sich ursprünglich aus Raumbildern entwickle. Von dieser Auffassung weicht Beetz in seiner Abhandlung über das Wesen der Zahl insofern ab, als er die Anfänge der Zahlauffassung aus zeitlichen Sonderheiten sich herausbilden lässt. Er sagt:

„Als Erstes wird irgend ein Unterschied empfunden. Dieser Vorgang muss irgend ein a und b als Nebenempfindungen in sich einschliessen. Unter Umständen drängen sich diese in den Vordergrund der Wahrnehmung; durch die Zeitfolge werden sie zu a + b, sie führen zur Synthese. Der Zeitunterschied und ihre eigene Verschiedenheit hindern eine vollständige Verschmelzung, a bleibt a, b bleibt b; aber sie wandeln sich doch insofern um, als aus beiden a + b wird. Hiermit ist die erste Möglichkeit einer Zahlbildung, nämlich der Zweiheit, gegeben.... Das Ticktack der Uhr, der gleichmässige Schritt und ähnliche rythmische Schalleindrücke machen nach vielfacher Erfahrung das zeitliche Bild des 1 + 1, des einmaligen Nacheinanders zum geistigen Eigentum des Kindes.... Wenn sich aber auf dieser Entwicklungsstufe eine Vorstellung infolge auffälliger Qualitäts- oder Relationsreize mit besonderer Schärfe im Bewusstsein abhebt, so tritt zunächst das Voraufgegangene in den Hintergrund; sodann wird aber auch irgend ein etwaiger nachfolgender Wahrnehmungsreiz für den Augenblick zurückgedrängt. Nun wird die Hauptvorstellung als eins, das nach zwei Seiten hin abgegrenzt ist, empfunden. So wirkt das Gesetz der Relativität rück- und vorwärts und hebt die Einheit aus der Mitte der Zweiheit heraus. Hiermit ist die Idee der Dreiheit und zwar mit dem Vorstellungsverlaufe selbst gegeben."

Das Richtige in dieser Ausführung ist die entschieden zur Geltung gebrachte Einsicht, dass die Wahrnehmung zeitlicher Sonderheiten bei der Bildung des Zahlbegriffs eine wesentliche Rolle spielt. Im übrigen aber erscheint mir das Bild, das Beetz hier von der ersten Zahlauffassung gibt, verkünstelt und stark verzeichnet zu sein. Die wirkliche Entwicklung ist eine wesentlich andere. Um dies einzusehen, brauchen wir uns nur klar zu vergegenwärtigen, in welcher Weise rythmische Schalleindrücke, wie Glockenschläge, Pendelschläge, Hammerschläge, Schritte, musikalische Töne u. s. w. aufgefasst werden. Setzen wir den Fall, das Kind höre einen Glockenschlag. Durch die Reizstärke und durch die qualitative Eigenart wird diese Gehörsempfindung aus dem Komplex der gleichzeitigen Empfindungsinhalte als deutlich abgegrenzte Sonderheit, als einheitliches Tonbild herausgehoben. Da findet also

freilich die Wahrnehmung eines Unterschiedes statt, aber die beiden Unterschiedlichkeiten, nämlich das einzelne Tonbild und die unbestimmte, verschwommene Gesamtvorstellung der übrigen simultanen Empfindungsinhalte, sind so verschieden, dass kein Bild der Zweiheit zu stande kommt, trotzdem ein eines und ein anderes empfunden wird. Dagegen gewinnt das Kind hier das zeitliche Bild der Einheit, und dieses ist es, mit welchem, entgegen der von Beetz vertretenen Ansicht, die Zahlauffassung beginnt. Aus Empfindungen, welche in zeitlicher Folge verlaufen, kann ein klares Bild der Zweiheit nur dann entstehen, wenn jede der aufeinander folgenden Sonderheiten für sich als Bild der Einheit aufgefasst wird. Folgt kurz nach dem ersten ein zweiter Glockenschlag, während jener noch nachklingt oder doch sein Erinnerungsbild noch frisch in der Vorstellung haftet, so wiederholt sich zunächst der geschilderte Vorgang. Aber zugleich werden nun die beiden nacheinander aufgefassten Tonbilder zu einer Gesamtvorstellung vereinigt, in welcher aber die Sonderheiten nicht in eins zusammenfliessen, da sie mit dem Bewusstsein eines sie trennenden, andersartigen Empfindungsinhaltes, mit der Vorstellung der zeitlichen Folge verbunden sind. So entsteht das zeitliche Bild der Zwei, und zwar ganz entschieden und klar ausgeprägt durch Hinzufügen von einem zu einem. Folgt noch ein Glockenschlag, so arbeitet sich in gleicher Weise das Bild der Drei und ebenso dasjenige der Vier heraus. In zeitlicher Folge stehende Sonderheiten bilden aber keine Gruppe, sondern eine Reihe und können auch nur als Reihe durch sukzessives Hinzufügen von einem zu einem aufgefasst werden. Die Entstehung des zeitlichen Bildes der Drei durch Heraushebung einer einheitlichen Hauptempfindung aus der Zweiheit, nämlich aus einer vorhergehenden und einer etwa nachfolgenden Nebenempfindung, ist lediglich ein von Beetz konstruirtes Phantasiegebilde, dessen Quelle in seiner Vorliebe für die Gruppen liegt.

Normal beanlagte Kinder gelangen nach Massgabe der Entwicklung ihres zahlauffassenden Denkens ohne Schwierigkeit dazu, dass sie 1, 2, 3, 4 aufeinander folgende, rythmische Schalleindrücke in einem Bilde und zugleich in ihrem bestimmten Vielheitsgrade zu erfassen vermögen. Geht es über 4 hinaus, so wird die Gesamtvorstellung um so undeutlicher, je mehr die Reihe anwächst. In diesem Falle sucht unser Geist die der einheitlich und vielheitlich klaren Auffassung entgegenstehende Schwierigkeit dadurch zu überwinden, dass er die Reihe als eine Folge von Teilbildern von je 2, 3 oder 4 Einheiten auffasst. In der Musik z. B. kommen fast ausschliesslich nur zwei-, drei- und vierteilige Taktarten zur Anwendung. Ausnahmsweise vorkommende mehrteilige Takte

stellt man gar nicht unmittelbar in einem Bilde vor, sondern man zerlegt sie unwillkürlich in leicht vorstellbare Teile.

Beetz behauptet aber, obgleich das Zeitliche bei der Bildung der Zahlvorstellung den Anfang mache, so könne doch die Zahl an der zeitlichen Folge nicht zur Klarheit kommen. Dies sei erst dann möglich, nachdem sie die Phantasie in ein räumliches Nebeneinander umgewandelt, aus der Sukzession eine Simultanität gemacht habe. In dem Momente, wo man sich eine 3 denke, müsse einem auch eine solche gegenwärtig sein, nicht aber zuerst eine 1, hierauf noch eine 1 und später noch eine 1. Hier verwechselt Beetz offenbar die gegenwärtige Vorstellung von etwas Vergangenem mit einer vergangenen Vorstellung, oder anders ausgedrückt, er verwechselt den wirklichen Zeitverlauf mit dem Bilde, welches von ihm in unserer Vorstellung haftet. Wundt sagt in seiner „Logik“: „Die Vorstellung zeitlicher Aufeinanderfolge ist nicht selbst eine Aufeinanderfolge von Vorstellungen, sondern eine aus der letzteren hervorgehende simultane Anschauung, in welcher sich die Wahrnehmung zweier getrennter Vorstellungen, die als Anfangs- und Endpunkte einer Zeitreihe gegeben sind, mit dem Bewusstsein eines sie trennenden andersartigen Inhaltes verbindet.“ Nachdem ich drei aufeinander folgende Töne gehört habe, finde ich in meiner Vorstellung das einheitliche Erinnerungsbild derselben, in welchem zwar die einzelnen Tonbilder keine zeitliche Folge bilden, wohl aber mit dem Bewusstsein verbunden sind, dass ich sie nicht gleichzeitig, sondern eines nach dem anderen erhalten habe. Von einem Umphantasiren der zeitlichen Folge in eine räumliche Reihe aber vermag ich nichts zu entdecken. Die Vorstellung einer Linie kann uns freilich als veranschaulichendes Bild für die weniger anschauliche Zeitvorstellung dienen; wenn wir uns aber den zeitlichen Verlauf als Linie vorstellen müssten, so würden wir Raum und Zeit gar nicht unterscheiden, wir hätten dann keine Zeitvorstellung.

Mit dem Umphantasiren des zeitlichen Nacheinander in ein räumliches Nebeneinander wäre übrigens, was Beetz übersieht, gerade nach seiner Ansicht für die Zahlauffassung auf dem Gebiete der Zeit wenig oder nichts gewonnen; denn es würde ja aus der zeitlichen Folge in der Vorstellung nicht etwa eine Gruppe, sondern eine räumliche Reihe. Nun bedenke man aber, dass er nur Gruppen als die Raumbilder gelten lässt, an welchen die Zahl zur Klarheit gelangen könne; die Reihen verwirft er, indem er sehr entschieden erklärt, wer Reihen vorführe, erreiche die Zahlauffassung gar nicht. Hier kann er sich aber, was er ebenfalls übersieht, keineswegs auf F. A. Lange stützen. Wenn dieser auch im Raumbilde der Ordnung das Wesen der Zahl gesucht

und nachgewiesen hätte, so läge darin gar kein Grund gegen die Anwendung der Reihen; denn diese sind eine besondere Art der Ordnung diskreter Grössen, gerade so gut wie die Gruppen. Nach Langes Darstellung würden wir freilich jeden Zahlbegriff ursprünglich als das sinnlich bestimmte Bild einer Gruppe von Raumgegenständen, z. B. von Fingern oder von Kugeln des Zählrahmens, erhalten. Es ist aber leicht ersichtlich, dass er in den Begriff der Gruppe die Reihen einschliesst. Die Kugeln des Zählrahmens sind in Reihen geordnet; die Finger einer Hand bilden eine Reihe, können aber auch in Gruppen zusammengestellt werden. Ausschlaggebend ist hier insbesondere ein Beispiel aus der Zählweise der Letten, welches Lange zur Illustration anführt. Bei den Letten sei nämlich das Wort „*kahlis*“ (Strick) ein Ausdruck für die Zahl 30, weil sie Flundern zu je 30 an einander zu reihen pflegen.

Dass die zweckmässige Auswahl und Verwertung der Zahlenbilder im ersten Rechenunterricht das Stadium unsicherer Versuche noch nicht überwunden hat, beweist gerade das von Beetz vorgeschlagene Typenrechnen, welches nach meiner Ansicht trotz der siegesgewissen Zuversicht seines Auftretens in der Ausführung gerade so verfehlt ist, wie in der logischen und psychologischen Begründung. Es ist also keine überflüssige Sache, wenn ich als einer der von Beetz so ungnädig behandelten „Zähler“ den „stichhaltigen Gegenbeweis“ auch dadurch erbringe, dass ich ein einfacheres, natürlicheres, erfolgreicheres Typenrechnen begründe.

Wenn nur ein Raumgegenstand gegeben ist, so hat es keinen Sinn, von einer Ordnung zu reden; dagegen ist es gerade die klar und deutlich abgegrenzte Stellung, wodurch sich jeder Gegenstand dem anschauenden Denken als ein Ding seiner Art, als Einheit kennzeichnet. Deshalb spricht Lange ausdrücklich von der „Ordnung und Stellung“ diskreter Grössen, während Beetz das Wesen der Zahl nur in der „Ordnung“ sucht. Die „Stellung“ kann er wohl deshalb nicht brauchen, weil er die 1 nicht als Zahl gelten lässt. Wie er trotzdem dazu kommt, das erste seiner Zahlenbilder der 1 zu widmen, ist mir unverständlich.

Für zwei Dinge gibt es nur eine Art der Anordnung. Wenn man sie in solcher Entfernung voneinander hinstellt, dass man sie deutlich zu unterscheiden und doch zugleich in einem Bilde zu erfassen vermag, so liegen sie auf den Endpunkten einer geraden Linie. Diese Anordnung kann man als Gruppe, aber auch als Reihe betrachten. Wie durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, so ist in der Stellung zweier Dinge das Bildungsgesetz einer Reihe gegeben. Das Raumbild

einer Zweierreihe weckt offenbar die Erwartung, dass die Fortsetzung in der anschaulich vorgebildeten Richtung erfolge.

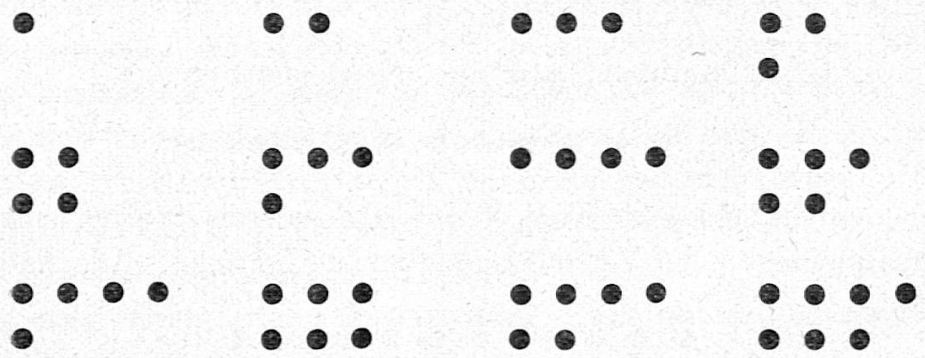
Erst bei drei Dingen gehen Reihe und Gruppe auseinander. Drei Dinge lassen sich in eine Reihe oder dann auf die Ecken eines Dreiecks ordnen. Ebenso kann man vier Dinge in eine Reihe oder dann auf die Ecken eines Vierecks zusammenstellen. Nun gelangen, wie die Erfahrung beweist, normal beanlagte Kinder ohne Schwierigkeit, wenn auch nicht durch blosse Anschauung, dazu, dass sie 1, 2, 3, 4 Dinge „auf den ersten Blick“ in ihrem bestimmten Vielheitsgrade erkennen, ob sie nun als Reihe oder als Gruppe geordnet seien. Es ist über jeden Zweifel erhaben, dass man drei Dinge ebenso leicht als Reihe wie als Gruppe erfasst. Auf Dominosteinen und Spielkarten ist die 3 immer als Reihe dargestellt; für die Darstellung der 4 aber dient das einemal die Gruppe, das anderemal, nämlich bei der 8, die Reihe. Es liegt also nicht der geringste Grund vor, Reihen von 3 und 4 Dingen als Raumbilder zu erklären, an welchen die klare Auffassung dieser Zahlen nicht erreicht werden könne. Wenn es sich nur um diese ersten vier Zahlen handelte, so wäre es nicht notwendig, besondere Arten der Anordnung von 3 oder 4 Dingen als Typen fester als andere einzuprägen. Im Gegenteil, gerade hier, wo es ohne die geringste Schwierigkeit möglich ist, muss dem Kinde die Tatsache vor Augen gelegt werden, dass es Mengen gibt, welche trotz verschiedener Anordnung gleich viel Dinge enthalten. Anders gestaltet sich die Sache, wenn es über 4 hinausgeht, da hier die unmittelbare Auffassung in einem klaren Reihenbilde nicht möglich ist. Hier erst haben die Gruppen ihre eigentliche Bedeutung und ihre wichtige Aufgabe. Bei der Bildung zweckmässiger Gruppen erweisen sich aber gewisse Anordnungen von 3 und 4 Dingen als unbrauchbar, während andere in trefflicher Weise dazu geeignet sind. Lediglich aus diesem Grunde empfiehlt es sich, diese letzteren schon bei der Auffassung der Zahlen 3 und 4 als leicht erkennbare Raumbilder fest einzuprägen.

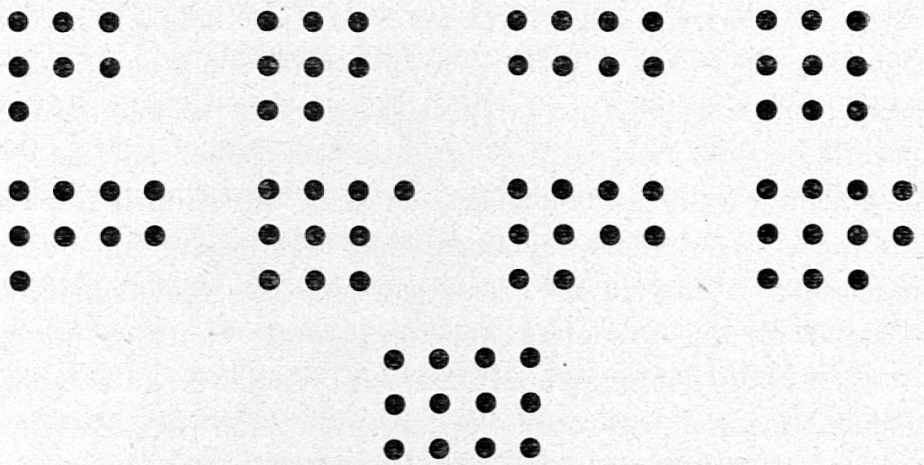
Wie müssen nun die Gruppen beschaffen sein, damit sie bei Mengen von mehr als 4 Dingen die Auffassung der Zahl in einem Bilde ermöglichen? Wirft man einen Blick auf die zwei nachstehenden Anordnungen, so wird die Beantwortung dieser Frage nicht schwer sein. Es unterliegt gar keinem Zweifel, dass die zweite Gruppe als Figur und als

Menge anschaulicher ist, sich also auch leichter und fester einprägt als

die erste. Und doch ist bei der ersten, wo die Einheiten in der Figur eines regulären Sechsecks zusammengestellt sind, die Anordnung eine so regelmässige, dass sie gar nicht regelmässiger sein könnte. Wird diese Figur so angeschaut, dass der Mittelpunkt des Bildes auf der Netzhaut mit dem gelben Fleck zusammenfällt, so sind alle Einheiten gleich weit von der Grenze des Sehfeldes entfernt und regelmässig um dessen Zentrum angeordnet. Man sollte also erwarten, dass die einheitliche Auffassung dieser Menge wesentlich leichter sei als diejenige der zweiten, weniger regelmässig geordneten Gruppe. In Wirklichkeit ist aber gerade das Gegenteil der Fall. Woher rührt dies? Ganz ohne Zweifel daher, dass hier das Gesetz der Anordnung anschaulicher, einfacher und leichter erkennbar ist. Die Gruppe ist nämlich so gebildet, dass sie aus wagrechten und senkrechten Reihen besteht. Ausserdem wird die Einheitlichkeit des Raumbildes auch dadurch gefördert, dass der Abstand der aufeinanderfolgenden Einheiten und der Reihen für die ganze Gruppe die gleiche ist. Bei diesem Verfahren gilt also für die Bildung der Gruppen genau das gleiche Gesetz wie für diejenige der Reihen. Gerade in der Ordnung, in welcher die einzelne Reihe ihre Einheiten enthält, ist die Gruppe aus Reihen aufgebaut; sie ist eine Reihe von Reihen, so dass sich in der Gruppenbildung nur wiederholt, was schon in der Reihe anschaulich vorgebildet ist. Eine anschaulichere, leichter erfassbare Anordnung als diese ist gar nicht möglich. Bildet man solche Gruppen, so verfährt man gerade so naturgemäss wie das Kind, das seine Dinge in eine Reihe ordnet und dann, wenn ihm diese „über den Kopf“ wächst, eine neue Reihe anfängt. Ich hatte einmal Gelegenheit, drei kleine Knaben beim Soldatenspiel zu beobachten. Sie marschirten im „Gänsemarsch“. Es kam ein vierter Junge dazu, und sie fuhren fort, in einer Reihe zu marschiren. Erst als noch zwei weitere junge Krieger sich zur Teilnahme meldeten, wurde das kleine Heer „zwei Mann hoch“ in einen Reihenkörper geordnet.

Zur Veranschaulichung mögen die nachstehenden Zahlenbilder dienen:





Nun wird man auch einsehen, warum für die Zahlen 3 und 4 ausser den betreffenden Reihen sich auch noch zwei Gruppen recht gut als Zahlenbilder eignen, nämlich die quadratische Gruppe und die Anordnung auf die Ecken eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks. Diese Gruppen sind nämlich Spezialfälle der von mir empfohlenen Gruppenbildung aus Reihen. Die erste besteht aus wagrechten und senkrechten Zweierreihen; die zweite enthält zu einer Zweierreihe ausserhalb derselben noch eine dritte Einheit, welche den Anfang einer zweiten Reihe bildet. Bei solcher Art der Gruppenbildung wird das Verfahren, für jede Zahl nur eine Gruppe als fixes Raumbild einzuprägen, ausgeschlossen. Man hat z. B. die Zahl 4 als Reihe, oder als quadratische Gruppe, oder auch als Dreierreihe nebst einer ausserhalb derselben liegenden Einheit als Anfang einer zweiten Reihe darzustellen, je nachdem sich das eine oder andere als zweckmässig erweist. Aber dies ist gar kein Mangel, sondern ein wesentlicher Vorzug; denn dieses Verfahren bewahrt das Typenrechnen vor der Schablonenhaftigkeit und der unnatürlichen Künstelei, welche mit der ausschliesslichen Anwendung fixer Zahlenbilder notwendig verbunden sind.

In dem Masse aber, wie im Geiste des Kindes die Kraft der Synthesis erstarkt, kann es auch angeleitet werden, mehr als 4 in einer Reihe liegende Dinge auf den ersten Blick, oder doch nahezu momentan, in ihrer bestimmten Zahl zu erkennen.

Um z. B. zu ermitteln, dass die ungegliederte Reihe

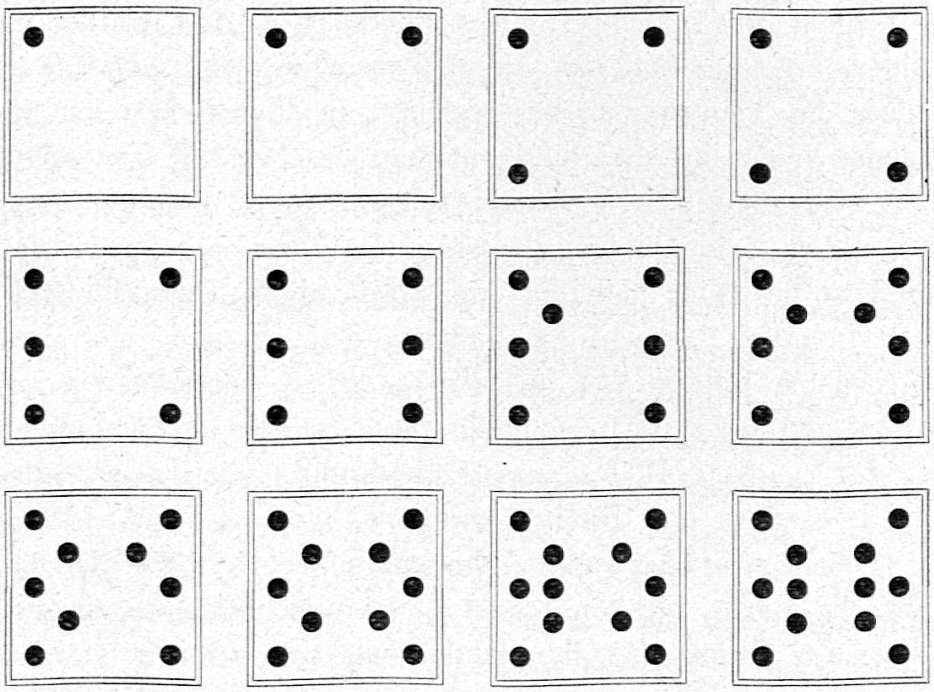
10 Dinge enthält, muss das Kind diese Reihe jedesmal wieder nachzählen, da es ihr Bild nicht in der Vorstellung festzuhalten vermag. Die Anordnung

aber wird es auf Grund vorausgegangener Übungen leichter als Bild der Zahl 10 erkennen und der Vorstellung einprägen. Das Gleiche gilt für die Reihe

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Dies wird dadurch ermöglicht, dass man die Hauptreihe aus Partialreihen von 2, 3 oder 4 Einheiten zusammensetzt und diese Teilreihen dadurch anschaulicher heraushebt, dass man ihren Abstand etwas grösser macht, als denjenigen der Einheiten in den einzelnen Abteilungen. Auch hier ist jedes Zahlenbild eine Reihe von Reihen aus 2, 3 oder 4 Einheiten, gerade wie bei der Bildung der Gruppen.

Diese Ausführungen enthalten offenbar eine entschieden ablehnende Kritik gegen die von Beetz für die Zahlen von 1 bis 12 vorgeschlagenen Typen, welche so aussehen:

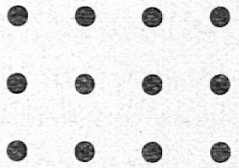


Es unterliegt gar keinem Zweifel, dass die ersten 6 dieser Typen anschaulich und brauchbar sind, aber zu einem guten Teil deshalb, weil sie mit den von Beetz aufgestellten leitenden Grundsätzen im Widerspruch stehen; die 6 folgenden Typen aber zeigen die Haltlosigkeit dieser Grundsätze in mehr als ausreichendem Masse, da sie sich durch das barste Gegenteil der Anschaulichkeit auszeichnen. Nach Beetz würde z. B. die Anschaulichkeit seines Sechserbildes darin liegen, dass es aus zwei dreieckigen Gruppen besteht; diese Zusammensetzung ist aber gar nicht unmittelbar anschaulich, während das Kind auf den ersten Blick sieht, dass diese Gruppe 2 senkrechte Dreierreihen und ebenso 3 wag-

rechte Zweierreihen enthält. Beetz steht offenbar unter dem Einflusse dieser Logik der Tatsachen, wenn er sagt: „Von der 6 stehen aussen links 3 und rechts 3.“ Dies ist aber, im Lichte seiner Grundsätze betrachtet, ein arger Widerspruch; da er vorher für die Zahl 3 als einzigen Typus die Gruppe festgestellt hat, so darf eine Reihe von 3 Einheiten bei seiner Gruppenbildung gar nicht in Betracht kommen. Was an den Gruppen von 7 bis 12 etwa noch anschaulich ist, liegt ebenfalls darin, dass sie parallele Reihen von 2 und 3 Einheiten enthalten, während die Teilgruppen, aus welchen sie nach Beetz bestehen sollen, sich für die Anschauung gar nicht unmittelbar herausheben, sondern vom Kinde mühsam aufgesucht werden müssen. Die Typen sind alle in gleich grosse quadratische Felder eingeordnet, so dass der Abstand der Einheiten in den einzelnen Gruppen sowohl als auch in ihrer Gesamtheit nicht übereinstimmend gleich ist. Dies schadet offenbar der Anschaulichkeit und erschwert die einheitliche Auffassung der einzelnen Raumbilder. Ausserdem hat diese Anordnung die weitere schlimme Folge, dass die Teilgruppen, aus welchen die Typen bestehen sollen, in verwirrender Weise in- und durcheinander geschachtelt sind. Von dieser Sachlage wird man sich leicht überzeugen, wenn man nur einen Blick auf eines dieser Zahlenbilder, z. B. auf die Zwölfergruppe wirft. Dieses Zahlenbild sollte unter anderem eine anschauliche Darstellung der Multiplikationsaufgaben „4 mal 3“ und „3 mal 4“ sein. Nun enthält es zwar 4 parallele Reihen von je 3 Einheiten, je eine längere aussen links und rechts und zwei kürzere innen, so dass also die einheitliche Auffassung des ganzen Bildes nicht unmittelbar durch Anschauung möglich ist, sondern nur durch Abstraktion von der Ausdehnung der Reihen erreicht werden kann. Ausserdem sind ja die Reihen Raumbilder, welche Beetz, um konsequent zu sein, sorgfältig vermeiden müsste. Nach seinem Gesetz der Gruppenbildung soll sein Zwölferbild aus 4 dreieckigen Gruppen bestehen; aber diese sieht das Kind nicht auf den ersten Blick, es muss sie heraussuchen. Wenn übrigens Beetz für die Zahl der Einheiten nur Gruppen gelten lässt, so sollte auch die Zahl der Teilgruppen nach diesem Gesetz dargestellt werden. Um also ein konsequent aufgebautes Viererbild von Dreiern zu erhalten, müsste er 4 anschaulich ausgeprägte Dreiergruppen als Kollektiveinheiten auf die Ecken eines Quadrates ordnen. Das Beetzsche Zwölferbild enthält ferner eine grosse und innerhalb derselben eine kleine Vierergruppe, wozu noch quer durch beide hindurch eine wagrechte Reihe von 4 Einheiten kommt. Und dies soll ein anschauliches Bild von „3 mal 4“ sein? Um auch hier das erwähnte Bildungsgesetz konsequent durchzu-

führen, müsste Beetz offenbar 3 Vierergruppen als Einheiten auf die Ecken eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ordnen; denn nur in diesem Falle könnten die Vierergruppen zusammen seinen Dreiertypus darstellen. Man sieht also, dass nach dem von Beetz aufgestellten, aber nicht konsequent durchgeführten Bildungsgesetz der Gruppen die Aufgaben „4 mal 3“ und „3 mal 4“ nicht in einem Bilde dargestellt werden können, von der Darstellung anderer Aufgaben, wie z. B. „2 mal 6“ oder „6 mal 2“ gar nicht zu reden.

Ganz anders präsentirt sich auf den ersten Blick das von mir vorgeschlagene Zwölferbild:



Hier sieht das Kind ohne weiteres 3 Reihen von je 4 und ebenso 4 Reihen von je 3 Einheiten. Ausserdem bietet ihm die Gruppe ein Sechserbild von Zweiern und ein Zweierbild von Sechsern. Hier liegt eine einfache, anschauliche, folgerichtig durchgeführte Anordnung vor; die Gruppe ist eine Reihe von Reihen, während Beetz seine Gruppen von Gruppen im Widerspruch mit den von ihm festgesetzten Grundtypen aufbaut. Um für eine Zahl und ihren Zusammenhang mit der vorhergehenden und der nachfolgenden ein klares, für den Rechenunterricht brauchbares Anschauungsbild zu erhalten, darf man die neue Einheit, durch deren Hinzufügen aus einer Gruppe die nachfolgende abgeleitet wird, nicht in die Gruppe hineinsetzen, sondern man muss sie aussen anschliessen, so dass die Gruppe anwächst. Auf den Spielkarten wird zwar bei der Darstellung der Zahlen 5, 7 und 9 eine Einheit in die Mitte des Bildes gesetzt. Es unterliegt auch gar keinem Zweifel, dass diese Anordnungen zweckmässige Zahlenbilder für das Kartenspiel sind, aber nicht für den Rechenunterricht. Aus Gründen, welche mit dem Rechnen nichts zu tun haben, werden auf den Spielkarten die Einheiten auf rechteckige Felder von gleicher Grösse geordnet. Diese Art von Zahlenbildern hat lediglich den Zweck, das momentane Erkennen der Zahlen zu ermöglichen; im Rechenunterricht aber kommt den Typen die weitere Bestimmung zu, dass man mit ihnen anschaulich rechnen kann, dass sie sich also nicht nur in leicht erkennbare Reihen oder Gruppen zerlegen, sondern auch zu solchen vereinigen lassen.

Beetz stellt in sehr zuversichtlicher Weise die Forderung auf: „Erst die nötigen Grundvorstellungen, dann das Zahlensystem!“ Er hat also nicht eingesehen, dass diese Forderung gerade mit seiner Auffassung,

nach welcher das Wesen der Zahl in der Ordnung diskreter Grössen läge, in schroffem Widerspruche steht. Eine gesetzmässige Zusammenstellung, also eine Ordnung von Dingen, ist doch gewiss System, denn sonst wäre sie keine Ordnung. Jede Zahlenfigur ist eine systematische Zusammenstellung von Einheiten, und wenn die Gruppen in ihrer Gesamtheit brauchbar sein sollen, so müssen sie auch nach Beetz in systematischem Zusammenhang aufgebaut werden. Das Wesen der von ihm geforderten Grundvorstellungen besteht gerade darin, dass sie System sind; folglich kann ihnen das, was sie schon von Haus aus sind, nicht erst noch nachfolgen. Wenn sich aus dieser naturwüchsigen Systematik ein besonderes System, nämlich unser Zahlensystem, herausarbeitet, so wird dadurch an der von mir gezeichneten Sachlage gar nichts geändert. Die von Beetz aufgestellte Behauptung, die Zahlauffassung schreite nicht fort wie die natürliche Zahlenreihe, bedarf schon deshalb keiner Widerlegung, weil er selber sie durch das von ihm empfohlene Lehrverfahren wieder aufhebt. Denn auch er lässt die Zahlen gerade in der Folge auffassen, wie die natürliche Zahlenreihe sie bietet, und auch der Aufbau seiner Typen ist derart, dass eine andere Folge dadurch ausgeschlossen wird. Was wir die „natürliche Zahlenreihe“ zu nennen pflegen, ist übrigens gar keine Reihe von Dingen, sondern die logische Folge der Zahlbegriffe, für welche es ganz gleichgültig ist, ob die Dinge in Reihen oder in Gruppen oder gar nicht geordnet seien.

Endlich fordert Beetz: „Erst die Zahlvorstellung, dann die Operation!“ Um auch hier den „stichhaltigen Gegenbeweis“ zu erbringen, brauche ich nur die Tatsache zu konstatiren, dass er selber ihn geführt hat. Er sagt ja, so lange der vorstellende Geist in der Wahrnehmung schlechtweg befangen bleibe, kommen ihm nur Dinge und Qualitäten zum Bewusstsein. Erst wenn die innere Tätigkeit sich zur Vergleichung erweitere, sei die Möglichkeit zur Zahlauffassung gegeben. Der in einem Zahlenbilde enthaltene Vorstellungskomplex müsse zunächst durch Analysis in seine Sonderheiten auseinandergelegt werden. Dagegen habe ich gar nichts einzuwenden. Wenn aber diese psychische Tätigkeit zur Zahlauffassung führen soll, so dürfen die Sonderheiten nicht blosse Teilanschauungen bleiben, sondern sie müssen durch das „gedankliche Beziehen“ mit dem klaren Bewusstsein verbunden werden, dass jede ein Ding ihrer Art ist. Das Resultat der Analysis ist dann: 1, 1, 1, 1 . . . . Damit ist aber auch nach Beetz die Zahlauffassung nicht vollendet. Die Sonderheiten müssen nun durch Synthesis als Teile eines Ganzen erfasst und zur einheitlichen Vielheit vereinigt werden;

aus 1, 1, 1, 1 . . . . wird dadurch die logische Folge: 1 + 1 + 1 + 1 . . . ., ob nun die Dinge räumlich als Reihe oder als Gruppe geordnet seien. Dieser Vorgang der Zahlauffassung, wie er von Beetz selber dargestellt wird, ist aber gerade das, was ich Zählen nenne. Die wirkliche Zahlvorstellung, d. h. im vorliegenden Falle das mit dem klaren und bestimmten Bewusstsein des Mengeverhältnisses verbundene Raumbild der Reihe oder Gruppe, kommt also auch nach Beetz nicht durch blosse Anschauung, sondern durch die auf grund derselben vollzogene Analysis und Synthesis der Einheiten, somit nach meiner Auffassung durch das Zählen, durch die Operation zu stande. Hier wird Beetz vielleicht einwenden, nach vorausgegangener Analysis erfolge der Zusammenschluss der Einheiten nicht durch sukzessives Hinzufügen von einem zu einem, also nicht durch Zählen, sondern durch einen simultanen Akt der Synthesis. Es mag so scheinen, aber es ist nicht so. Man darf nicht vergessen, dass bei der Durchführung einer solchen scheinbar einfachen Synthesis die Resultate früherer Zahlauffassung zur Anwendung kommen. Als erstes gewinnt das Kind das Raumbild der Einheit. Dieses findet es nun offenbar auch in dem Raumbilde der Zwei, wenn es dasselbe durch die Analysis in Sonderheiten zerlegt. Die nachfolgende Synthesis aber besteht zweifellos darin, dass eins zu einem hinzugefügt wird. Man braucht nur diesen Vorgang in seinem weiteren Verlaufe zu verfolgen, um einzusehen, dass auch die Zahlauffassung auf Grund von Typen ursprünglich nur durch sukzessives Hinzufügen von einem zu einem möglich ist. Im Grunde kämpft also Beetz nicht gegen das Zählen überhaupt, sondern gegen besondere Arten seiner Ausführung. In seiner Abhandlung über das Wesen der Zahl sagt er: „Die einen bestreiten den sinnlichen Ursprung und Inhalt der Zahl und rechnen mit Zahlwörtern, mit Wortreihen schlankweg; sie zählen, treiben Sprechübungen, die inhaltlos in der Luft schweben. Die andern geben den sinnlichen Ursprung und Inhalt der Zahl in sehr beschränktem Umfange zu und rechnen mit Dingen. Sie suchen aber das Wesen der Zahl in der Sukzession unter Bestreitung der Simultanität und führen Dingreihen vor, an welchen sie ebenfalls zählen. Diesen und jenen Zählern gegenüber betonen wir nun die Analysis und Synthesis als Elemente der Zahlbildung und die simultane, räumliche Zahlauffassung an bestimmten Dinggruppen.“ Das Verfahren „dieser und jener Zähler“ ist ganz ohne Zweifel ein verfehltes; denn durch Zählen mit blossen Wortreihen ohne sinnliche Grundlage oder dann nur an einer Reihe von Raumgegenständen kann die Zahlauffassung nicht zur Klarheit gelangen. Trotzdem muss der erste Rechen-

unterricht, wenn er nicht auf Abwege geraten soll, ein Zählunterricht sein. Damit aber das Kind eine ausreichende Menge klarer Grundvorstellungen gewinne, muss das Zählen von 4 an nicht an einer Reihe, sondern an Gruppen ausgeführt werden, welche nach dem von mir dargestellten Bildungsgesetz aus Reihen aufgebaut sind. Analysis und Synthesis sind nach meiner Auffassung nicht Elemente der Zahlbildung, sondern die beiden gleich notwendigen Seiten des richtigen Zählverfahrens. Die vollendete Zahlvorstellung ist eine simultane, aber sie entsteht durch sukzessives Hinzufügen von einem zu einem.

Die Bedeutung der Zahlenbilder für den ersten Rechenunterricht liegt zunächst darin, dass sie als zweckmässige Mittel zur Veranschaulichung der Zahlen dienen und dem Denken klare und deutliche stellvertretende Vorstellungen für die Zahlbegriffe bieten. Sind diese Raumbilder einmal klar und bestimmt als wirkliche Zahlenbilder, d. h. nicht nur nach ihrer Figur, sondern auch in ihrem Mengeverhältnis erfasst, so können sie auch als anschauliche Masse zur Ermittlung der Zahlen gute Dienste leisten und als Ersatzmittel für das umständlichere Zählen dienen. Endlich sind sie aber auch ein treffliches Mittel zur Veranschaulichung der Operationen, was wohl so allgemein anerkannt ist, dass ich es nicht noch besonders zu begründen brauche.

Hier soll nur noch die so viel und mit so wenig Verständnis umstrittene Grubesche Methode in ihrem berechtigten und lebensfähigen Kern ins Licht der gewonnenen Resultate gestellt werden. Das früher allgemein übliche Verfahren, zunächst in verhältnismässig grösserem Umfang, so z. B. bis 20, bis 50, sogar bis 100 nur das Addiren und Subtrahiren zu üben, das Vervielfachen und Entvielfachen aber erst später einzuführen, ist auch heutzutage noch lange nicht vollständig überwunden. Man bekommt immer noch von einflussreichen Schulmännern die Behauptung zu hören, der Begriff „mal“ gehöre gar nicht ins erste Schuljahr, das Vervielfachen sei für diese Stufe zu abstrakt und zu schwierig. Bei richtiger Einsicht in die Bedeutung der Zahlenbilder wird man aber leicht einsehen, dass die wirkliche Sachlage genau die entgegengesetzte ist. Gerade auf dieser Stufe wird durch die Einführung der Multiplikation die Arbeit des Schülers in der Herausbildung der Zahlbegriffe nicht erschwert, sondern wesentlich erleichtert. Richtig behandelt, ist hier das Vervielfachen auch gar nicht zu abstrakt, im Gegenteil, es bewahrt den Schüler vor verfrühter Anwendung des abstrakten Denkens. Das Kind vermag nicht mehr als 4 Dinge in dem Raumbilde einer Reihe aufzufassen. Lassen wir es also z. B. 8 Dinge in eine Reihe ordnen, und sie zugleich zählen, so gewinnt es lediglich eine unbestimmte,

verschwommene Mengevorstellung und ein Wort, welches die Zahl der Dinge bezeichnet. Dies setzt aber beim Kinde ein abstraktes Denken voraus, welchem es noch nicht gewachsen ist. Ordnen wir aber die 8 Dinge in zwei Reihen von je vier Einheiten, so wird ihm damit ein durchsichtig klares Bild der Zahl 8 geboten. Soll nun dieses Zahlenbild, welches die anschauliche Darstellung der Multiplikation 2 . 4 = 8 ist, geistiges Eigentum des Kindes werden, so muss dieses zu der sicheren Einsicht gelangen, dass die vor seinen Augen liegende Gruppe zwei Reihen und jede derselben vier Dinge enthält, d. h. es muss multipliziren. Hier wird aber gar kein abstraktes Denken von ihm gefordert. Eine Reihe mit ihren vier Einheiten ist Multiplikand, die Zahl der Reihen Multiplikator. Dieser aber ist im vorliegenden Falle eine konkrete Zahl so gut wie der Multiplikand. In der vor den Augen des Kindes liegenden Gruppe ist ja die Zahl der Reihen gerade so klar und deutlich ausgeprägt, wie die Zahl der in einer Reihe enthaltenen Dinge.

Ohne Anwendung der Multiplikation kann das Kind, sobald die Zahl 4 überschritten wird, nicht mehr klare Zahlvorstellungen gewinnen; es muss sich mit unbestimmten Mengevorstellungen und mit Worten begnügen, wird also zu einer abstrakten Auffassung angehalten, für welche die nötigen Grundvorstellungen fehlen. Das Kind kann sich 6, 8, 9, 12, 16 Dinge nicht in einer Reihe vorstellen, dagegen sehr leicht in Gruppen von 2, 3, 4 Reihen, von welchen jede 2, 3 oder 4 Dinge enthält. Gerade in dem so wichtigen Zahlenraum von 1 bis 10 kann das Kind nur dann zur sicheren geistigen Beherrschung der Zahlen gelangen, wenn auch das Vervielfachen in den Dienst der Zahlauffassung gezogen wird. Vermeidet man die Anwendung der Zahlenbilder und lässt nur auf Grundlage des einen ungegliederten Reihenbildes zu- und abzählen, so macht man die Bildung einer genügenden Menge klarer Zahlvorstellungen unmöglich und lässt das abstraktere Verfahren vorausgehen, um später das anschaulichere nachfolgen zu lassen. Vermeidet man aber die Einführung in die Multiplikation und wendet gleichwohl Zahlenbilder, also Gruppen an, welche nach dem Prinzip der Multiplikation anschaulich aufgebaut sind, so mutet man dem Schüler zu, gerade das nicht zu sehen, was man ihm durchsichtig klar vor Augen legt.

Statt der Gruppen können am richtigen Orte auch gegliederte Reihen, welche aus Partialreihen von 2, 3 oder 4 Einheiten gebildet sind, gute Dienste leisten. Sie sind aber weniger anschaulich als die Gruppen, weshalb diese für den Anfang den Vorzug verdienen. Dazu kommt aber noch, dass sich durch Gruppen mehr Aufgaben veranschau-

lichen lassen als durch die entsprechenden Reihenbilder. Diese eignen sich am besten dazu, den Übergang vom Rechnen mit Gruppen zum Operiren mit symbolischen Begriffen zu vermitteln.

Unser Zahlensystem ist ein kombinirtes Additions- und Multiplikationssystem. Es ist also ganz ohne Zweifel methodisch verfehlt, die Zahlen über 20 hinaus auffassen zu lassen, ohne die Kinder vorher in die Multiplikation eingeführt zu haben. Denn der Ausdruck „zwanzig", d. h. 2 Zig oder 2 Zehn, bezeichnet die Zählung von Vielheiten, also eine Multiplikation. Um aber Vielheiten von diesem Umfang mit Verständnis zählen zu können, muss das Kind vorher schon das Zählen kleinerer Vielheiten geübt haben. Dazu kommt aber noch, dass die Basis unseres Zahlensystems, die Zahl 10, nicht unmittelbar anschaulich ist, da das Kind sich eine Menge von 10 Dingen nicht in dem Raumbilde einer ungegliederten Reihe vorzustellen vermag. Die sichere geistige Beherrschung dieser Zahl setzt also voraus, dass es auch für die Zahlen von 5 bis 9 nicht nur Worte und verschwommene Bilder von Reihen, sondern klare, deutlich ausgeprägte Vorstellungen gewonnen habe. Dies ist aber nur möglich durch die methodisch richtige Verwertung der Zahlenbilder in Verbindung mit der Multiplikation.

An die Spitze dieser Abhandlung habe ich die Frage gestellt: „Typenrechnen oder Zählen?" Die durch meine Untersuchungen begründete Antwort lautet: „Typenrechnen und Zählen!" Als zahlauffassendes Denken wird das Zählen die besten Erfolge erzielen, wenn es die Zahlenbilder als Grundvorstellungen in seinen Dienst zieht; diese Art des Zählens aber ist zugleich das einzige psychologisch und methodisch wohlbegründete Typenrechnen.