

**Zeitschrift:** Schweizerische pädagogische Zeitschrift  
**Band:** 8 (1898)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Zur Bruchrechnung  
**Autor:** Rüefli, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-789186>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur Bruchrechnung.

Von J. Rüefli, Seminarlehrer in Bern.

### I.

In seinem Werke: „Die naturgemäße Methode des Rechenunterrichtes“ hat sich der Rechenmethodiker Knilling unter anderem die Aufgabe gestellt, auch das Bruchrechnen aus dem nach seiner Meinung bis dahin herrschenden mysteriösen Dunkel herauszulösen und dasselbe auf einen wissenschaftlich sicheren und klaren Boden zu verpflanzen. Er glaubt, schon der Altmeister Hentschel sei auf dem richtigen Wege zur Lösung des Rätsels gewesen; da er aber von zum Teil fehlerhaften und unklaren Vorstellungen beeinflusst worden sei, so habe sein Versuch misslingen müssen. Dagegen glaubt nun Knilling, durch seine Untersuchungen auf dem Gebiete der Bruchrechnung mit einem ganzen Nest von methodischen Wunderlichkeiten und Schrullen endgültig aufgeräumt zu haben. Er erwartet deshalb sehr zuversichtlich, dass die Rechenlehrer der Zukunft ihr Lehrverfahren nach seinen Forschungsergebnissen einrichten werden. Diese lassen sich kurz in folgender Fassung wiedergeben:

Das Multipliziren ist ein Vermehren; das Resultat einer Multiplikation muss also unter allen Umständen grösser sein als jeder der beiden Faktoren. Die Multiplikation ist eine Addition gleicher Summanden, deren Anzahl der Multiplikator angibt. Nun hat es einen verständlichen Sinn, eine gegebene Zahl 2 mal, 3 mal, 4 mal . . . als Summand zu setzen; die Forderung aber, eine Summe aus  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{4}{3}/4$  . . . Summanden zu bilden, ist eine Ungereimtheit. Der Multiplikator kann also immer nur eine ganze Zahl, aber niemals ein Bruch oder eine gemischte Zahl sein. Das sog. Multipliziren mit Brüchen ist, bei Licht betrachtet, nichts als ein Dividiren, und was man bis dahin als ein Vermehren mit gemischten Zahlen betrachtet hat, erweist sich als ein zusammengesetztes Verfahren, das sowohl Multiplikation wie Division

und Addition in sich begreift. Wo also in einer Rechenaufgabe ein Bruch als Multiplikator auftritt, da ist der scheinbare Multiplikator gar kein wirklicher Bruch, er hat nur die Form eines Bruches.

Ähnlich ist es bei der Division im Sinne des Teilens. Man kann eine gegebene Zahl in zwei, drei, vier, fünf . . . gleiche Teile zerlegen; dagegen der „einviertelste“, „fünfsechstelste“, „vierundsiebenachtelste“ Teil einer Zahl ist etwas Widersinniges. Beim Dividiren im Sinne des Teilens kann also der Divisor weder ein Bruch noch eine gemischte Zahl sein, er ist immer eine ganze Zahl. Ein Bruch, welcher in einer Rechenaufgabe als Divisor vorkommt, ist weder ein wirklicher Divisor, noch ein veritabler Bruch.

Die Operationen, die man bis dahin irrtümlicherweise als ein Multipliziren und Dividiren mit Brüchen und gemischten Zahlen bezeichnet hat, gehören also eigentlich gar nicht dem Bruchrechnen an; sie haben sich nicht aus demselben heraus entwickelt, sie würden existiren, selbst wenn uns jeder Begriff von Brüchen mangelte. Wenn sich die irrtümliche Ansicht gebildet und festgesetzt hat, dass ein wirklicher Bruch als Multiplikator und ebenso auch als Divisor zu funktionieren vermöge, so geschah dies lediglich infolge eines gedankenlosen, unberechtigten und unbegründeten Analogisirens. Weil man Brüche zu Brüchen, zu ganzen und zu gemischten Zahlen addiren, oder auch von solchen subtrahiren kann, so bildete man sich ein, es müsse auch möglich sein, mit Brüchen zu multipliziren und zu dividiren.

Soweit Knilling. Wie steht es nun mit dieser „Entdeckung“, durch welche er sein Jahrhundert in die Schranken fordert und „die Geister wach ruft“? Es steht ganz einfach so, dass das, was er als seine Lösung des Rätsels anpreist, den Schulmännern, die über ein ausreichendes Mass elementar-mathematischer Bildung verfügen konnten, schon längst bekannt war. Zum Beweise führe ich aus Zähringers „Leitfaden für den Unterricht im praktischen Rechnen“ (Zürich, Verlag von Meyer und Zeller, 1866) folgende Stellen an:

„Zum Multipliziren gehören nur diejenigen Multiplikationen, wo der Multiplikator eine ganze Zahl ist, indem Fälle, wo der Multiplikator ein Bruch ist, zu den Teilungen gerechnet werden müssen.“ (Seite 329.) — „Wir haben schon früher der doppelten Form erwähnt, unter welcher die Teilungen angeschrieben werden können, nämlich wenn der vierte Teil von  $517\frac{1}{2}$  genommen werden soll, so können wir entweder schreiben  $517\frac{1}{2} : 4$  oder aber  $\frac{1}{4} \cdot 517\frac{1}{2}$ . Das mehrmalige Nehmen eines Teils wird immer unter der Bruchform geschrieben, z. B. wie viel ist 7 mal der achte Teil von  $12\frac{1}{2}$ ? wird geschrieben  $\frac{7}{8} \cdot 12\frac{1}{2} = ?$

(Seite 331) — „Jede Division mit einem Bruch muss als Enthaltssein aufgefasst werden, denn teilen kann man nur mit einer ganzen Zahl.“ (Seite 291.) — „Es ist allerdings wahr, dass nicht jede vorkommende Division mit einem Bruch eine Aufgabe über Enthaltssein ist; es kann oft auch nur eine abgekürzte Schreibweise für eine Teilung oder das mehrmalige Nehmen eines Teils sein. Z. B. bei der Lösung der Aufgabe:  $3\frac{1}{2}$  Ellen kosten  $19\frac{1}{4}$  Fr., was kostet 1 Elle? sagt man oft kurz: 1 Elle kostet  $19\frac{1}{4}$  Fr.:  $3\frac{1}{2}$ ; gelesen:  $19\frac{1}{4}$  Fr. dividirt durch  $3\frac{1}{2}$  . . . Das ist allerdings keine Aufgabe über Enthaltssein, und doch soll mit einem Bruch dividirt werden. Streng genommen hat die Auflösung überhaupt unter dieser Form keinen Sinn. Denn vom Preis der  $3\frac{1}{2}$  Ellen kann ich nicht unmittelbar auf den Preis einer Elle schliessen, sondern nur auf den Preis einer halben Elle. Nämlich eine halbe Elle kostet den siebenten Teil von dem, was  $3\frac{1}{2}$  Ellen kosten, oder von  $19\frac{1}{4}$  Fr.; und eine ganze Elle kostet 2 mal den siebenten Teil von  $19\frac{1}{4}$  Fr. So hat die Aufgabe einen Sinn und reduziert sich auf das mehrmalige Nehmen eines Teils.“ (Seite 292.)

Daraus ergibt sich also, dass die Lösung des Rätsels, welche Knilling gefunden zu haben glaubt, schon ein recht respektables Alter hat. Auch hier hat ihn sein aussergewöhnlich stark entwickelter Drang, als Reformator des Rechenunterrichtes tief einschneidende Entdeckungen zu machen, zu einem illusorischen Resultate geführt. Die Sache liegt in Wirklichkeit so, dass es weder Zähringer noch Knilling gelungen ist, die im Multipliziren und Teilen mit Brüchen enthaltene methodische und logische Schwierigkeit klarzustellen und zu überwinden.

Wenn ich es unternehme, in dieser Abhandlung meine Ansichten über den vorliegenden Gegenstand zu entwickeln, wie sie sich mir während einer vierzigjährigen Lehrpraxis herausgebildet haben, so bin ich mir bewusst, dass ich damit keine weltbewegende Tat ausführe. Während Knillings rechenmethodische Werke mit dem sehr wenig begründeten Anspruch auftreten, ein Markstein in der Geschichte des elementaren Rechenunterrichtes zu sein, begnüge ich mich damit, einen kleinen Beitrag zur Herausbildung einer naturgemässen Methode des Rechenunterrichts zu leisten.

In der Rechenpraxis und im Unterricht kommt es nicht selten vor, dass man im Interesse einer möglichst kurzen, bündigen Bezeichnungsweise Ausdrücke gebraucht, die, im gewöhnlichen Sinne des Wortes aufgefasst, eine Ungereimtheit wären, und deshalb für den betreffenden Fall einer besonderen Definition bedürfen. Wir pflegen z. B. zu sagen: „Der Inhalt eines Rechtecks wird berechnet, indem man die Grundlinie

mit der Höhe multiplizirt.“ Wollte man hier unter „Grundlinie“ und „Höhe“ die entsprechenden Linien verstehen, so wäre die Regel der barste Unsinn; denn auf dieser Stufe der Begriffsentwicklung hat es keinen verständlichen Sinn, Linien miteinander zu multiplizieren. Will man die Regel mit klarem Verständnis dessen, was man sagt, zur Anwendung bringen, so muss man unter den Ausdrücken „Grundlinie“ und „Höhe“ nicht die sonst durch dieselben bezeichneten Linien, sondern ihre Masszahlen verstehen. Ist z. B. der Inhalt eines rechteckförmigen Gartens von  $40\text{ m}$  Grundlinie und  $25\text{ m}$  Höhe zu berechnen, so kann man die Zählung der in der Gartenfläche enthaltenen Quadratmeter in der Weise ausführen, dass man dieselbe in  $40$  Streifen von je  $25\text{ m}^2$  oder dann in  $25$  Streifen von je  $40\text{ m}^2$  zerlegt denkt; man findet dann leicht, dass der Inhalt  $40 \cdot 25\text{ m}^2 = 25 \cdot 40\text{ m}^2 = 1000\text{ m}^2$  beträgt. Nun ist aber  $40$  die Masszahl der Grundlinie und  $25$  die Masszahl der Höhe, und wenn man das Produkt dieser Zahlen bildet, so erhält man die Anzahl der Quadratmeter, welche die Gartenfläche enthält. Bei der Feststellung dieser Regel pflegt man aber kürzehalber die Ausdrücke „Masszahl der Grundlinie“ und „Masszahl der Höhe“ durch die bündigen Bezeichnungen „Grundlinie“ und „Höhe“ zu ersetzen.

Es sind ganz ohne Zweifel zunächst Zweckmässigkeitsgründe ähnlicher Art gewesen, die in der Rechenpraxis und im Unterricht dahin gedrängt haben, Brüche und gemischte Zahlen als Multiplikator auftreten zu lassen. Knilling ist sehr im Irrtum, wenn er glaubt, dieses Verfahren habe seine Wurzel in unberechtigtem „Analogisiren“ oder in wunderlichen Schrullen der Rechenmethodiker; denn diese letztern haben offenbar lediglich das logisch zu begründen und methodisch zu entwickeln gesucht, was sich in der Rechenpraxis als nützlich erwies. — Ich werde zunächst vier angewandte Aufgaben als Vertreter entsprechender Gruppen anführen, um zu zeigen, wie man in ganz natürlicher Weise, ohne methodische Verkünstelung und ohne wunderliche Schrullen, in das Gebiet der Multiplikation mit Brüchen und gemischten Zahlen hineinwachsen kann.

*1. Aufgabe.* Wie teuer kommen  $25$  Liter Wein zu stehen, wenn  $1$  Hekto-liter  $58\text{ Fr. }60\text{ Rp.}$  gilt?

*Auflösung.*  $1\text{ hl} = 58,6\text{ Fr.};$

$$\frac{1}{4}\text{ hl} = 58,6\text{ Fr.} : 4 = 14,65\text{ Fr.}$$

*2. Aufgabe.* Wie viel kostet eine Wiese von  $6250\text{ m}^2$  Inhalt, wenn  $1\text{ ha}$   $3880\text{ Fr.}$  gilt?

*Auflösung.*  $1\text{ ha} = 3880\text{ Fr.};$

$$\frac{1}{8}\text{ „} = 3880\text{ Fr.} : 8 = 485\text{ Fr.};$$

$$\frac{5}{8}\text{ „} = 5 \cdot 485\text{ Fr.} = 2425\text{ Fr.}$$

Bei der Auflösung dieser Aufgaben wird es wohl keinem Schüler einfallen, zu behaupten, dass  $\frac{1}{4} hl$  „ $\frac{1}{4}$  mal“ 58,6 Fr., oder dass  $\frac{5}{8} ha$  „ $\frac{5}{8}$  mal“ 3880 Fr. kosten, und der Lehrer wird auch nicht dabin drängen, hier schon diese Ausdrucksweise anwenden zu lassen. Anders gestaltet sich die Sache bei den folgenden Gruppen von Aufgaben.

3. *Aufgabe.* Wie viel kosten 425 kg Kaffee, 1 q zu 217 Fr. 80 Rp.?

1. *Auflösung.*  $1 q = 217,8$  Fr.;

$$\begin{array}{r} 4 \text{ " } = 4 \cdot 217,8 \text{ Fr.} = 871,2 \text{ Fr.;} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \text{ " } = 217,8 \text{ Fr. : } 4 = 54,45 \text{ Fr.;} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{41}{4} q = \quad \quad \quad 925,65 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

2. *Auflösung.*  $1 q = 217,8$  Fr.;

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \text{ " } = 217,8 \text{ Fr. : } 4 = 54,45 \text{ Fr.;} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{17}{4} \text{ " } = 17 \cdot 54,45 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38115 \\ 5445 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 925,65 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

3. *Auflösung.*  $1 q = 217,8$  Fr.;

$$\begin{array}{r} \frac{41}{4} \text{ " } = \frac{41}{4} \cdot 217,8 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 871,2 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54,45 \text{ " } \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 925,95 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

Bei der Auflösung derartiger Aufgaben wählen die Schüler zunächst eine der beiden ersten Auflösungen; aber bald taucht, ohne dass der Lehrer dazu drängt, die dritte auf, um nach und nach die beiden andern ganz zu verdrängen. Die Schüler urteilen einfach so: Wenn  $1 q = 217,8$  Fr. gilt, so kosten  $\frac{41}{4} q$  „ $\frac{41}{4}$  mal“ 217,8 Fr. — Es ist leicht einzusehen, dass sie dabei ganz folgerichtig das anwenden, was sie vorher bei der Auffassung und Anwendung der Bruchzahlen schon gelernt haben. Sie sind angeleitet worden, statt der ausführlichen Bezeichnungsweise „4 Zentner und 1 Viertelzentner“ den kürzeren Ausdruck „ $\frac{41}{4}$  Zentner“ zu gebrauchen. Da muss sich ihnen also die naheliegende Konsequenz aufdrängen, dass man auch den ermüdend weitschweifigen Ausdruck „4 mal 217,8 Fr. und 1 Viertel von 217,8 Fr.“ durch die einfachere Bezeichnung „ $\frac{41}{4}$  mal 217,8 Fr.“ ersetzen dürfe. In der Tat gelten für beide Abkürzungen die gleichen Zweckmässigkeitsgründe, und ebenso lassen sich gegen beide die gleichen logischen Bedenken geltend machen, von welchen weiterhin noch die Rede sein soll. Dass man aber im vorliegenden Falle unter „ $\frac{1}{4}$  mal 217,8 Fr.“ den 4. Teil von 217,8 Fr. zu verstehen habe, braucht man bei der dargelegten Art der Behandlung den Schülern gar nicht zu sagen, sie kommen selber darauf.

4. *Aufgabe.* Wie viel kostet der Bau einer Strasse von 6 km 800 m Länge, wenn 1 km im Durchschnitt auf 26875 Fr. zu stehen kommt?

Nach den vorausgegangenen Übungen werden die Schüler hier nicht mehr lange nach der zweckmässigsten Auflösung suchen; sie werden die dritte Darstellung wählen, weil sie möglichst einfach und praktisch ist.

*Auflösung.*  $1 km = 26875$  Fr.;

$$\begin{array}{r} \frac{64}{5} \text{ " } = \frac{64}{5} \cdot 26875 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 161250 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21500 \text{ " } \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182750 \text{ Fr.} \\ \hline \end{array}$$

Durch die bisherige Entwicklung habe ich den Nachweis erbracht, dass Knillings Auffassung in zwei wesentlichen Punkten unrichtig ist.

Er behauptet, wenn in einer Aufgabe eine gemischte Zahl oder ein Bruch als Multiplikator vorkomme, so sei der scheinbare Multiplikator gar kein wirklicher Bruch, er habe nur die Form eines solchen; diese Rechenart gehöre gar nicht dem Bruchrechnen an und würde auch dann existiren, wenn uns jeder Begriff von Brüchen mangelte. Wenn man aber z. B. den Inhalt eines Rechtecks von  $40\text{ m}$  Länge und  $28\frac{3}{4}\text{ m}$  Breite zu berechnen hat, so findet man

$$J = 40 \cdot 28\frac{3}{4} \text{ m}^2 = 28\frac{3}{4} \cdot 40 \text{ m}^2.$$

Dem zweiten dieser beiden Ausdrücke entspricht die Zerlegung des Rechtecks in Streifen von  $40\text{ m}$  Länge,  $1\text{ m}$  Breite und  $40\text{ m}^2$  Inhalt. Dann bleibt aber zuletzt noch ein Reststreifen, welcher nur  $\frac{3}{4}\text{ m}$  breit, also nur  $\frac{3}{4}$  von einem der andern Streifen und somit eine wirkliche Bruchgrösse ist. In der Darstellung „ $28\frac{3}{4} \cdot 40\text{ m}^2$ “ bezeichnet also der Ausdruck „ $\frac{3}{4}$ “ einen „veritablen“ Bruch, und so ist es überhaupt immer, wenn der Multiplikand ein zahlenmässig bestimmtes Kontinuum, der Multiplikator aber ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist.

Vergegenwärtigen wir uns ferner eine Wertgleichung wie z. B.

$$4\frac{1}{4} \text{ Zentner} = 4\frac{1}{4} \cdot 217,8 \text{ Fr.},$$

so ist leicht einzusehen, dass in dem linksstehenden Ausdruck „ $4\frac{1}{4}$  Zentner“ auch nach Knillings Auffassung „ $\frac{1}{4}$ “ einen wirklichen Bruch darstellt. Aber gerade dieser Bruch ist es ja, welcher den Rechner in folgerichtigem Schlusse veranlasst, in dem rechtsstehenden Wertausdruck „ $4\frac{1}{4} \cdot 217,8 \text{ Fr.}$ “ die gemischte Zahl  $4\frac{1}{4}$  und damit auch den Bruch  $\frac{1}{4}$  als Multiplikator auftreten zu lassen. Wo bleibt also da die Unabhängigkeit dieser Operation vom Bruchbegriff und vom Bruchrechnen? Dazu kommt aber noch, dass auch in dem Wertausdruck „ $4\frac{1}{4} \cdot 217,8 \text{ Fr.}$ “ durch „ $\frac{1}{4}$ “ ein wirklicher Bruch bezeichnet wird. Es ist eben gar nicht gerechtfertigt, den Bruchbegriff auf kontinuirliche Grössen zu beschränken. Wer starrköpfig an dieser Beschränkung festhält, verwechselt eine methodische Frage mit einer logischen. Es unterliegt ja gar keinem Zweifel, dass man den Bruchbegriff am zweckmässigsten durch das Teilen kontinuirlicher Grössen, z. B. der gebräuchlichen Masse, anschaulich entwickeln kann; aber ebenso gewiss ist, dass gar keine Gründe des Denkens dagegen sprechen, diesen Begriff auch auf Mengen diskreter Dinge anzuwenden. Wenn 1 Fünftelmeter ein Bruchteil von einem Meter ist, so wird in gleichem Sinne auch 1 Viertelmillion ein Bruchteil von einer Million sein. Knilling wird einwenden, es gebe zwar Bruchteile von Sachen oder von Grössen, aber Bruchteile von „mal“ oder von Rechenakten seien Undinge. Deshalb vermöge er nicht einzusehen, dass der Ausdruck „Halbe mal“ eine Operation und noch dazu eine Multiplikation

anzeigen könne. Damit beweist er aber nur, dass er den Ausdrücken „Halbe“ und „mal“ nach subjektivem Belieben und ohne Rücksicht auf die Sachlage eine Bedeutung beilegt, welche sie hier gar nicht haben und nicht haben können. Diese Frage soll weiterhin ihre eingehende Beleuchtung finden.

Knilling behauptet ferner, eine Multiplikation mit einer gemischten Zahl als Multiplikator sei gar keine einfache Operation, sondern eine Operationsverknüpfung, denn sie erfordern zu ihrer Ausführung Multiplikation, Division und Addition. Dagegen lässt er Aufgaben, in welchen eine gemischte Zahl oder ein Bruch als Multiplikand auftritt, als wirkliche Multiplikationen gelten, trotzdem hier die Sachlage ganz die gleiche ist. Hat man z. B. die Aufgabe „ $48 \cdot 5\frac{3}{4}$  Fr.“ zu lösen, so wird man sie in die beiden Partialmultiplikationen  $48 \cdot 5$  Fr. und  $48 \cdot \frac{3}{4}$  Fr. zerlegen. Zur Ausführung der letzteren muss man aber die Division als Mittel anwenden. Knilling wird dies bestreiten; er wird sagen,  $48$  mal  $3$  Viertelfranken seien doch gewiss  $144$  Viertelfranken, dies sei aber nichts mehr und nichts weniger als eine simple Multiplikation. Gewiss, so ist es. Aber nun hat man die Aufgabe gar nicht in der Form gelöst, in welcher sie gestellt ist; man hat Viertelfranken multipliziert, während man eigentlich Franken hätte vervielfachen sollen. Deshalb sind die Viertelfranken in Franken umzurechnen, was durch Messen mit  $4$ , also durch Division geschieht. Man kann indes die Aufgabe direkt in der Weise lösen, dass man, wie die Fragestellung es fordert, mit Franken operirt, indem man schliesst:  $48 \cdot 1$  Fr. sind  $48$  Fr.;  $48 \cdot \frac{1}{4}$  Fr. sind der  $4$ . Teil von  $48$  Fr. oder  $12$  Fr.;  $48 \cdot \frac{3}{4}$  Fr. aber sind  $3 \cdot 12$  Fr. oder  $36$  Fr. Dabei lässt man  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{3}{4}$  als Anzahl der Franken funktionieren, wie es der Darstellung entspricht, in welcher die Operation auftritt; der Bruchstrich aber hat die Bedeutung des Divisionszeichens, mag er nun wagrecht oder schief gesetzt werden. Es unterliegt also gar keinem Zweifel, dass man zur Ausführung der Operation „ $48 \cdot 5\frac{3}{4}$  Fr.“ auch die Division als Mittel anwenden muss. Dadurch wird aber an der Tatsache, dass diese Operation, als Ganzes betrachtet, eine Multiplikation ist, nicht das Geringste geändert. Ähnlich steht es mit den Multiplikationsaufgaben, in welchen der Multiplikator eine gemischte Zahl ist. Hat man z. B.  $6\frac{5}{8} \cdot 40$  Fr. zu rechnen, so ist damit die Forderung gestellt, dass man eine Summe aus  $7$  Summanden bilde, von welchen jeder der ersten sechs  $40$  Fr., der letzte aber  $\frac{5}{8}$  von  $40$  Fr. ist. Die Operation hat also ganz ohne Zweifel den Charakter des Vermehrens, des Anhäufens, des Vervielfachens. Der Umstand, dass der Multiplikator ausser der ganzen Zahl noch einen Bruch enthält, hat zur

Folge, dass das Produkt um so grösser wird. Die Aufgabe, welche dem Bruch im Rechenzusammenhang zugewiesen ist, hat also gar nicht den Charakter der Division; denn der Bruch leistet seinen Beitrag zum Vermehrern gerade so gut, wie die Einheiten der ganzen Zahl.

Nachdem der Schüler in der dargelegten Weise zu der Einsicht gelangt ist, welche Bedeutung man Ausdrücken wie „ $\frac{1}{4}$  mal“, „ $\frac{5}{8}$  mal“ u. s. w. beilegen muss, wenn man sie aus Gründen der Zweckmässigkeit beim Rechnen anwenden will, kann es für ihn gewiss nicht mehr schwer sein, auch Brüche mit Brüchen, z. B.  $\frac{9}{10}$  mit  $\frac{5}{6}$  zu multiplizieren.

1. *Auflösung.*  $\frac{5}{6}$  mal  $\frac{9}{10}$  ist 5 mal der 6. Teil von  $\frac{9}{10}$ . Der 6. Teil von  $\frac{9}{10}$  ist  $\frac{9}{60}$  oder  $\frac{3}{20}$ ; 5 mal  $\frac{3}{20}$  aber sind  $\frac{15}{20}$  oder  $\frac{3}{4}$ .

2. *Auflösung.* 1 mal  $\frac{9}{10}$  sind  $\frac{9}{10}$ ;  $\frac{1}{6}$  mal  $\frac{9}{10}$  ist der 6. Teil von  $\frac{9}{10}$ , das gibt  $\frac{9}{60}$  oder  $\frac{3}{20}$ ;  $\frac{5}{6}$  mal  $\frac{9}{10}$  sind also 5 mal  $\frac{3}{20}$ , was  $\frac{15}{20}$  oder  $\frac{3}{4}$  gibt.

3. *Auflösung.* Rechnet man 5 mal 9, so erhält man 45. Da man nun aber eine 10 mal zu grosse Zahl mit einer 6 mal zu grossen Zahl multipliziert hat, so ist das Produkt 6 mal 10 oder 60 mal zu gross und muss deshalb durch 60 geteilt werden. Der 60. Teil von 45 ist aber  $\frac{45}{60}$  oder  $\frac{3}{4}$ .

Derartige Multiplikationen mit gemeinen Brüchen haben aber heutzutage für das Volksschulrechnen wenig praktischen Wert. Mit Vor teil lassen sie sich etwa noch beim Kopfrechnen anwenden. Ist z. B. die Fläche einer quadratischen Parquettafel von 35 cm Seitenlänge berechnen so wird  $J = 3\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} dm^2 = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} dm^2 = \frac{49}{4} dm^2 = 12\frac{1}{4} dm^2$ . Hat man ferner den Inhalt eines quaderförmig behauenen Steines von 75 cm Länge, 35 cm Breite und 45 cm Höhe zu bestimmen, so wird

$$\begin{aligned} J &= 7\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} dm^3 = \frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} dm^3 \\ &= \frac{945}{8} dm^3 = 118\frac{1}{8} dm^3 = 118 dm^3 125 cm^3. \end{aligned}$$

Ausserdem können diese Fälle des Multiplizirens mit gemeinen Brüchen als zweckmässige Grundlage für das Verständnis der Dezimalbruchmultiplikation dienen. Ist z. B. die Fläche eines rechteckförmigen Zimmerbodens von 6,85 m Länge und 5,48 m Breite zu berechnen, so findet man:

$$J = 6,85 \cdot 5,48 m^2.$$

Man nimmt nun vorläufig an, man habe mit ganzen Zahlen zu rechnen, also  $685 \cdot 548 = 375\ 380$ .

Von da an kann das richtige Resultat auf zwei verschiedenen Wegen erreicht werden. Da  $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$  ist, so erhält man nicht Ganze, sondern Zehntausendstel; man muss also das Produkt nun erst noch in Ganze verwandeln, indem man es mit 10000 misst. Man kann aber auch so schliessen: Da eine 100 mal zu grosse Zahl mit einem 100 mal

zu grossen Multiplikator vervielfacht worden ist, so hat man ein 100 mal 100 oder 10000 mal zu grosses Produkt erhalten, weshalb man es durch 10000 teilen muss. In beiden Fällen erhält man als Resultat  $37,538 \text{ m}^2$ .

Knilling wird einwenden, durch die bisherigen Erörterungen sei eigentlich doch nur gezeigt worden, auf welche Weise ein logisch nicht begründetes Rechenverfahren sich in der Praxis und im Unterricht eingebürgert habe; aber die logischen Bedenken, welche er gegen die Multiplikation mit Brüchen und gemischten Zahlen geltend mache, seien damit noch nicht gehoben. Die Multiplikation sei nun einmal ein Vermehren, eine Addition gleicher Summanden; deshalb könne der Multiplikator nur eine ganze Zahl sein, und das Produkt müsse unter allen Umständen grösser sein als jeder der beiden Faktoren. Um zunächst die letztere Behauptung zu beleuchten, mögen folgende Beispiele als Grundlage dienen:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad 36 \cdot 5 = 180; & 4. \quad 1 \cdot 36 = 36; \\ 2. \quad 36 \cdot 1 = 36; & 5. \quad 1 \cdot 1 = 1. \\ 3. \quad 36 \cdot \frac{3}{4} = 27; & \end{array}$$

Alle fünf Beispiele entsprechen der Forderung Knillings, dass der Multiplikator immer eine ganze Zahl sein müsse. Er kann aber gleichwohl, wenn er konsequent sein will, nur die ersten drei Aufgaben als wirkliche Multiplikationen gelten lassen. Aber auch dann, wenn wir unsere Untersuchung zunächst auf diese drei Beispiele beschränken, so ist doch leicht einzusehen, dass die Behauptung, das Produkt müsse grösser sein als jeder der beiden Faktoren, nur im ersten Falle, nämlich nur dann zutreffend ist, wenn beide Faktoren grösser sind als 1. In den beiden andern Fällen ist zwar das Produkt grösser als der Multiplikand; aber das eine Mal ist es genau so gross als der Multiplikator, das andere Mal ist es sogar kleiner als dieser Faktor.

Wie aber, wenn, wie im vierten und fünften Beispiel, die Zahl 1 als Multiplikator auftritt. Diesen Spezialfall der Multiplikation hat Knilling in seiner „Reform des Rechenunterrichts“ häufig zur Anwendung gebracht. Die Sätze  $1 \cdot 2 = 2$ ,  $1 \cdot 3 = 3$  u. s. w. hat er dem Einmaleins, also einer Sammlung von Multiplikationssätzen eingeordnet. Auch stellt er dort die Regel auf: „Mit 10 vermehrt man, wenn man eine Null macht und noch mit 1 vermehrt.“ Entsprechende Regeln gibt er für die Multiplikation mit 100 und mit 1000. Wenn er aber in seinem neuen Werke behauptet, die Multiplikation müsse in allen Fällen ein Vermehren, eine Addition gleicher Summanden sein, so werden dadurch die Aufgaben, in welchen die Zahl 1 als Multiplikator

auftritt, aus dem Gebiete der Multiplikation ausgeschlossen; denn in diesem Falle hat man keine Addition gleicher Summanden auszuführen und es findet auch kein Vermehren statt, das Produkt ist genau so gross als der Multiplikand.

Nun bedenke man, dass wir beim Sprechen die Multiplikation mit dem Wörtchen „mal“ bezeichnen, während wir beim Schreiben diese Operation dadurch andeuten, dass wir zwischen die ziffermässigen Bezeichnungen der beiden Faktoren ein schiefes Kreuz oder einen Punkt setzen. Wären also Aufgaben, in welchen die Zahl 1 als Multiplikator erscheint, keine wirklichen Multiplikationen, so dürfte man sie auch nicht mehr in der für diese Operation festgesetzten Bezeichnungsweise auftreten lassen; denn sonst würde man ja einer argen Konfusion Tür und Tor öffnen. Man dürfte also nicht mehr sagen: „1 mal 8 ist 8“, und man dürfte auch nicht mehr schreiben: „ $1 \times 12 = 12$ “ oder: „ $1 \cdot 6 = 6$ “. Dass 4 in 4 „1 mal“ enthalten sei, müsste dann ebenfalls als eine fehlerhafte Ausdrucksweise verurteilt und aus der Rechensprache verbannt werden. Für die bekannten Sammlungen von Rechensätzchen müsste man ebenfalls andere Namen wählen, denn „Einmaleins“ und „Einsineins“ dürfte man sie nicht mehr nennen. Was wollte man bei solcher Sachlage mit Aufgaben wie „ $21 \cdot 40$ “ und „ $8$  in  $168$ “ anfangen?

Es ist aber das Gewisseste unter allem Gewissen, dass man jede Zahl „1 mal“ — und nur einmal — setzen kann, und dass das Resultat dieser einmaligen Setzung eben diese Zahl ist. Hier also ist der Ausdruck „1 mal“ durchaus der Sachlage angemessen und so selbstverständlich, dass seine Bedeutung keiner besonderen Definition bedarf. Wesentlich anders gestaltet sich die Sache, wenn der Multiplikator eine über 1 hinausgehende ganze Zahl ist, in dem einzigen Falle also, den Kuilling, um konsequent zu sein, als wirkliche Multiplikation gelten lassen kann. Ist z. B. die Multiplikation  $3 \cdot 8$  auszuführen, so kann man freilich eine Summe aus 3 Summanden bilden, von welchen jeder 8 ist; aber jede dieser 8 ist eine andere 8, und jede kann nur einmal gesetzt werden. Wären alle drei eine und dieselbe 8, so hätte man eben nur eine 8 und nicht drei. Hier also ist die Bedeutung des Wortes „mal“ keineswegs selbstverständlich, sie bedarf einer besonderen Festsetzung und Begründung. Diese aber ergibt sich als Folgerung aus der axiomatischen Gewissheit, dass  $1 \cdot 8 = 8$  ist. Man hat nämlich:

$$3 \cdot 8 = (1 + 1 + 1) \cdot 8 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 8 + 8 + 8.$$

In diesem Falle qualifiziert sich die Multiplikation als Addition gleicher Summanden. Dies ändert aber gar nichts an der Tatsache, dass dabei

der Satz: „ $1 \cdot 8 = 8$ “ als einfacher, grundlegender Multiplikationsakt mitgedacht ist. Wer also dem Rechenakte „ $1 \cdot 8 = 8$ “ den Charakter der Multiplikation abspricht, bedenkt offenbar gar nicht, dass er gerade dadurch auch der Auffassung, dass die Multiplikation eine Addition gleicher Summanden sei, den Boden unter den Füssen wegzieht. Die Multiplikation mit der Zahl 1 ist also gar nicht etwa nur eine willkürliche, praktisch nützliche Festsetzung, sondern sie hat den Charakter einer grundlegenden Wahrheit. Damit ist also der Nachweis erbracht, dass die Multiplikation zwar eine Addition gleicher Summanden sein kann, es aber nicht in allen Fällen sein muss. Damit ist freie Bahn geschaffen für die Multiplikation mit Bruchzahlen.

Für das Multipliziren mit ganzen Zahlen gilt das Gesetz, dass bei gleichbleibendem Multiplikanden das Produkt im gleichen Masse zu- und abnimmt wie der Multiplikator. Wenn man dieses Gesetz verallgemeinert und rückschreitend zur Anwendung bringt, so gewinnt man die Definition des Multiplizirens mit einem Bruch. Man hat z. B.

$$\begin{array}{ll} 1. \quad 4 \cdot 24 = 96; & 3. \quad \frac{1}{4} \cdot 24 = 6; \\ 2. \quad 1 \cdot 24 = 24; & 4. \quad \frac{3}{4} \cdot 24 = 18. \end{array}$$

Wenn aber „ $\frac{1}{4}$  mal 24“ den 4. Teil von 24 und „ $\frac{3}{4}$  mal 24“ 3 mal den 4. Teil von 24 bedeutet, so sind dies, wie Knilling behauptet, in Wirklichkeit gar keine Multiplikationen, sondern es ist nach seiner Meinung lediglich ein Teilen mit gleichzeitiger oder nachfolgender Reduktion auf einen oder mehrere Teile. Dagegen mache ich geltend, dass die Ausdrücke „24 geteilt durch 4“ und „ $\frac{1}{4}$  mal 24“ gar nicht die gleiche operative Bedeutung haben. Durch den ersten Ausdruck wird gefordert, dass die Zahl 24 in 4 gleiche Teile zerlegt werde; was aber mit einem solchen Teil geschehen solle, ist damit nicht gesagt. Der zweite Ausdruck enthält die Forderung, dass man den 4. Teil von 24 „1 mal“ setze; ist aber die Aufgabe „ $\frac{3}{4}$  mal 24“ gegeben, so hat man den 4. Teil von 24 „3 mal“ zu setzen. In beiden Fällen kommt nun freilich auch ein Teilen durch die Zahl 4 vor; aber es hat lediglich den Charakter einer Hülfsoperation, durch welche der Teil des Multiplikanden ermittelt wird, welcher 1 mal, resp. 3 mal gesetzt werden soll. Die Hauptoperation aber hat ganz entschieden den Charakter der Multiplikation, während das Teilen nur als Hülfsmittel erscheint, um den in der Aufgabe geforderten Multiplikationsakt ausführen zu können. Die Aufgabe

$$80 \cdot 3^{\frac{3}{4}} + \frac{64 \cdot 75}{96} + \frac{6(83^{\frac{1}{2}} - 47^{\frac{2}{3}})}{5}$$

ist offenbar eine Addition; aber die Zahlen, welche addirt werden sollen, sind nicht unmittelbar gegeben, sondern durch angedeutete Operationen bestimmt. Um also die als Hauptoperation dargestellte Addition ausführen zu können, muss dies zuerst mit den in ihren Zusammenhang eingeordneten und nur angedeuteten Hülfsoperationen geschehen. Dadurch wird aber am wesentlichen Charakter der Addition gar nichts geändert.

Nach der Formel

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

berechnen wir bekanntlich den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$ , wobei  $\frac{a+b+c}{2}$  kürzehalber durch das Zeichen  $s$  ersetzt wird.

Diese Operation ist offenbar eine Wurzausziehung; aber damit diese ausgeführt werden kann, muss man zuvor addiren, dividiren, subtrahiren und multipliziren. In dem Sinne nun, in welchem die erste dieser Aufgaben als Addition, die zweite als Wurzausziehung dargestellt ist, gerade in dem Sinne haben die Operationen „ $\frac{1}{8} \cdot 30$ “ und „ $\frac{5}{8} \cdot 30$ “ den Charakter der Multiplikation, trotzdem bei ihrer Ausführung das Teilen durch die Zahl 8 als Hülfsmittel benutzt werden muss. Bei der Aufgabe „ $\frac{5}{8} \cdot 30$ “ ist diese Sachlage leicht ersichtlich. Wenn aber in der Operation „ $\frac{1}{8} \cdot 30$ “ gar keine Multiplikation, sondern nur ein Teilen vorzuliegen scheint, so röhrt dies daher, weil der durch den Bruchnenner 8 bestimmte Teil des Multiplikanden durch die Multiplikation mit 1 gar nicht verändert wird. Um die Operation vollständig, korrekt und exakt durchzuführen, müsste man sagen: „ $\frac{1}{8} \cdot 30$  ist 1 mal der 8. Teil von 30. Nun ist der 8. Teil von  $30 = 3\frac{3}{4}$  und 1 mal  $3\frac{3}{4}$  ist  $3\frac{3}{4}$ .“ Man pflegt aber das, was an dieser Darstellung als selbstverständlich erscheint, im Interesse einer bündigen Ausdrucksweise stillschweigend vorauszusetzen, also nicht zu sprechen oder zu schreiben, und man tut wohl daran. Das aber ist nicht wohl getan, dass man dieses Selbstverständliche auch nicht mehr denkt und schliesslich als gar nicht vorhanden betrachtet.

Durch meine Untersuchungen habe ich nun nachgewiesen, dass die Multiplikation mit Brüchen gar nicht so widersinnig ist, wie Knilling sie darzustellen sucht. Sie wäre es nur dann, wenn die Multiplikation in allen Fällen ein Vermehren, eine Addition gleicher Summanden sein müsste. Sobald wir es aber zweckmässig finden, so hindert uns gar nichts daran, den Begriff dieser Operation zu erweitern und als Gattungsbegriff so zu definiren, dass er die Multiplikation mit belieben ganzen Zahlen, mit der Zahl 1, mit Brüchen und gemischten Zahlen

als besondere Arten in sich fasst. Man kann diesem Begriff etwa folgende Fassung geben:

*Eine gegebene Zahl (den Multiplikanden) mit einer zweiten gegebenen Zahl (dem Multiplikator) multipliziren heisst, eine dritte Zahl (das Produkt) suchen, welche den Multiplikanden so viel mal enthält, als der Multiplikator angibt.*

Diese Definition ist einfach, leicht verständlich und schliesst sich möglichst genau der allgemein gebräuchlichen an, deren Erweiterung sie bildet. Welchen Sinn es dann in den einzelnen Spezialfällen haben kann und muss, den Multiplikanden so und so viel mal zu setzen, ergibt sich jeweilen als Folgerung aus dem Begriff der Zahl, welche als Multiplikator funktionirt. Ist der Multiplikator eine beliebige ganze Zahl, so hat man eine Summe aus gleichen Summanden zu bilden, deren Anzahl der Multiplikator ist. Ist die Zahl 1 Multiplikator, so muss einfach der Multiplikand gesetzt werden. Ist aber der Multiplikator eine Bruchzahl, so hat man den durch ihren Nenner bestimmten Bruchteil des Multiplikanden so viel mal zu nehmen, als der Zähler Einheiten enthält.

Begriffe sind nicht etwas Absolutes. So wenig es in der wirklichen Welt der Dinge absolute, unveränderliche Arten gibt, gerade eben so wenig bestehen für das Denken absolute, für alle Zeiten feststehende Begriffe. Um unser Wissen zu ordnen und unsren Zwecken dienstbar zu machen, bilden und fassen wir unsere Begriffe nach dem jeweiligen Stande des Erkennens. In dem Masse aber, wie das Erkennen sich erweitert, wächst es aus den Kinderschuhen, d. h. aus den ursprünglichen Begriffen heraus und schafft sich neue. Wenn eine Henne ein Entenei ausgebrütet hat und dann zusehen muss, wie das junge Entchen lustig auf dem Wasser schwimmt, so kommt ihr dies sehr ungereimt und gefährlich vor. Gerade eine solche Glückhennenlogik aber wäre es, wenn man, nachdem das Rechnen mit Bruchzahlen eingeführt ist und vorzügliche Dienste leistet, dem Multipliziren mit Brüchen und gemischten Zahlen verständlichen Sinn, Berechtigung und Zweckmässigkeit absprechen wollte. Wenn in dieser Art des Multiplizirens wirklich eine logische Schwierigkeit vorhanden sein sollte, so liegt sie jedenfalls nicht im Bruch als Multiplikator, sondern in der Bruchzahl als solcher. Davon soll weiterhin noch die Rede sein.

## II.

Da die Division im Sinne des Teilens diejenige Umkehrung der Multiplikation ist, durch die aus dem Produkt und dem Multiplikator der Multiplikand gesucht wird, so gelten meine Untersuchungen über die

Multiplikation mit Brüchen und gemischten Zahlen in ihren Folgerungen auch für das Teilen, so dass ich mich hier kürzer fassen kann. Immerhin wird es zweckmässig sein, die Entwicklung durch Beispiele zu illustrieren.

1. *Aufgabe.* Wie teuer kommt 1 q Kaffee, wenn 20 kg 43 Fr. 55 Rp. kosten?

$$\text{Auflösung. } \frac{1}{5} q = 43,55 \text{ Fr.}; \\ 1 q = 5 \times 43,55 \text{ Fr.} = 217,75 \text{ Fr.}$$

2. *Aufgabe.* Ein Fässchen Wein von 75 Liter kostet 48 Fr. 75 Rp.; wie teuer kommt demnach 1 hl?

$$\text{Auflösung. } \frac{3}{4} hl = 48,75 \text{ Fr.}; \\ \frac{1}{4} hl = 48,75 \text{ Fr.} : 3 = 16,25 \text{ Fr.}; \\ 1 hl = 4 \cdot 16,25 \text{ Fr.} = 65 \text{ Fr.}$$

Auch hier wird man die Erfahrung machen, dass es den Schülern gar nicht einfällt, zu behaupten, dass ein Zentner den „einfünftelsten“ Teil von 43,55 Fr., oder dass ein Hektoliter den „dreiviertelsten“ Teil von 48,75 Fr. koste; der Lehrer aber wird seine Schüler weder bei diesem Aulasse noch später veranlassen, diese abstruse Ausdrucksweise zu gebrauchen. Die entscheidende Wendung in der Schlussweise macht sich auch beim Teilen erst dann geltend, wenn eine gemischte Zahl als Divisor auftritt.

3. *Aufgabe.* Wie teuer kommt 1 m Tuch zu stehen, wenn 18 m 75 cm 180 Fr. kosten?

$$\text{1. Auflösung. } \frac{75}{4} m = 180 \text{ Fr.}; \\ \frac{1}{4} m = 180 \text{ Fr.} : 75 = 2,4 \text{ Fr.}; \\ 1 m = 4 \cdot 2,4 \text{ Fr.} = 9,6 \text{ Fr.}$$

$$\text{2. Auflösung. } 18\frac{3}{4} m = 180 \text{ Fr.}; \\ 75 m = 4 \cdot 180 \text{ Fr.} = 720 \text{ Fr.}; \\ 1 m = 720 \text{ Fr.} : 75 = 9,6 \text{ Fr.}$$

$$\text{3. Auflösung. } 18\frac{3}{4} m = 180 \text{ Fr.}; \\ 1 m = 180 \text{ Fr.} : 18\frac{3}{4} \\ = 720 \text{ Fr.} : 75 = 9,6 \text{ Fr.}$$

Man wird auch hier die Erfahrung machen, dass die dritte Darstellung die andern allmälig verdrängt, ohne dass der Lehrer extra dafür sorgen müsste. Die Schüler urteilen einfach so: „Wenn  $18\frac{3}{4} m$  180 Fr. kosten, so gilt  $1 m$  180 Fr. geteilt durch  $18\frac{3}{4}$ .“ Durch diese Darstellung wird gefordert, dass man 180 Fr. in 19 Teile zerlege, von welchen alle bis an einen gleich sind, dieser letztere aber nur  $\frac{3}{4}$  von einem der gleichen Teile ist. Die Operation hat also ganz ausgeprägt den Charakter des Teilens, und in der Tat gelten für dieselben die Gesetze, welche für das Teilen massgebend sind. Der Umstand, dass der Divisor ausser der ganzen Zahl 18 noch den Bruch  $\frac{3}{4}$  enthält, hat zur Folge, dass ein Teil um so kleiner wird. Der Bruch leistet also seinen Beitrag zum Teilen gerade so gut wie die Einheiten der ganzen

Zahl. Auch hier wird also durch die Aufgabe, die dem Bruch im Rechenzusammenhang zugeteilt ist, der wesentliche Charakter der Operation nicht verändert.

Zähringer und Knilling behaupten aber übereinstimmend, es sei gar nicht möglich, die Teilung durch eine gemischte Zahl unmittelbar zu erschliessen und auszuführen; man müsse die gemischte Zahl in einen Bruch verwandeln, dann zunächst auf die Brucheinheit und erst von dieser auf die ganze Massseinheit schliessen. Diese durchaus unrichtige Behauptung beweist, welche Macht die Gewohnheit auch auf dem Gebiete des Denkens hat. Wenn  $2\frac{1}{2} \text{ kg}$  Kaffee 5 Fr. kosten, so gilt  $1 \text{ kg}$  5 Fr. geteilt durch  $2\frac{1}{2}$ ; dies gibt 2 Fr., denn  $2\frac{1}{2}$  mal 2 Fr. sind 5 Fr. Wenn man für  $3\frac{3}{4} \text{ m}$  Tuch 30 Fr. bezahlen muss, so kostet  $1 \text{ m}$  30 Fr. geteilt durch  $3\frac{3}{4}$ ; das gibt 8 Fr., denn  $3\frac{3}{4}$  mal 8 Fr. sind 30 Fr. Bezahlte man für  $6\frac{1}{4} \text{ kg}$  Butter 15 Fr., so ist der Preis für  $1 \text{ kg}$  15 Fr. geteilt durch  $6\frac{1}{4}$ , was 2 Fr. 40 Rp. gibt; denn  $6\frac{1}{4}$  mal 2 Fr. 40 Rp. sind 15 Fr. Auch in dem oben angeführten Beispiel kann die Operation „180 Fr. geteilt durch  $18\frac{3}{4}$ “ unmittelbar ausgeführt werden. Man erhält für den Preis von  $1 \text{ m}$  zunächst 9 Fr., und wenn man das Produkt  $18\frac{3}{4} \cdot 9$  Fr. oder  $168\frac{3}{4}$  Fr. von 180 Fr. subtrahirt, so bleibt ein Rest von  $11\frac{1}{4}$  Fr. Teilt man diesen Betrag durch  $18\frac{3}{4}$ , so erhält man  $\frac{3}{5}$  Fr., denn  $18\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}$  Fr. sind  $11\frac{1}{4}$  Fr. Der gesuchte Einheitspreis ist also  $9\frac{3}{5}$  Fr. oder 9 Fr. 60 Rp. Diese Beispiele zeigen, dass die Teilung durch eine gemischte Zahl ganz ohne Zweifel unmittelbar ausgeführt werden kann, dass aber dieses Verfahren in den meisten Fällen, wo man mit grösseren Zahlen zu operiren hat, sehr unbequem ist. Die Schüler wissen aber diese Schwierigkeit leicht zu überwinden oder vielmehr zu umgehen. Sie haben ja früher schon gelernt, dass das Resultat einer Division unverändert bleibt, wenn man Dividend und Divisor mit der gleichen Zahl multiplizirt. Um in unserem Falle als bequemer Divisor eine ganze Zahl zu erhalten, haben sie einfach Dividend und Divisor mit 4 zu multiplizieren, also die Darstellung „180 Fr. :  $18\frac{3}{4}$ “ durch „720 Fr. : 75“ zu ersetzen. Dieses Verfahren verdient auch deshalb den Vorzug, weil es für die zahlreichen Fälle, in welchen der Divisor eine gemischte Zahl mit Dezimalbruch ist, eine möglichst einfache Darstellung gibt, die in gleicher Weise auch für die Division im Sinne des Enthaltsenseins anwendbar ist.

Nachdem der Schüler zu der Einsicht gelangt ist, dass ein Bruch als Bestandteil einer gemischten Zahl beim Dividiren im Sinne des Teilens mitwirken kann, ohne dass dies widersinnig wäre, so wird er auch in der Aufgabe, eine gegebene Zahl durch einen Bruch zu teilen, einen

verständlichen Sinn finden. Durch zahlreiche Übungen im Auflösen angewandter Teilungsaufgaben hat sich ihm die Regel aufgedrängt, dass man den Einheitspreis einer Ware berechnet, indem man den Wert der ganzen Menge durch die Anzahl der Masseneinheiten teilt. Er wird, ohne gerade viel dabei zu denken, dieses Verfahren auch auf Brüche anzuwenden suchen. Er hat vielleicht kurz vorher bei der Auflösung einer Aufgabe geschlossen: „Wenn  $\frac{4}{5}$  ha Wiesland 14800 Fr. kosten, so gilt 1 ha 14800 Fr. geteilt durch  $\frac{4}{5}$ .“ In dieser Weise wird er weiter schliessen: „Wenn man für  $\frac{4}{5}$  ha 2980 Fr. bezahlen muss, so kostet 1 ha 2980 Fr. geteilt durch  $\frac{4}{5}$ .“ Erst wenn man ihn veranlasst, sich den Sinn dieser Operation zu vergegenwärtigen, so wird er stutzig und sieht ein, dass er mit der vorgeschlagenen Darstellung über den ursprünglichen Begriff des Teilens hinausgegangen ist. An dieser Stelle ist es also, wenn nicht unbedingt notwendig, so doch ratsam, diese Art des Teilens begrifflich klar zu stellen; denn sie empfiehlt sich insbesondere beim schriftlichen Rechnen, um auch für das Teilen eine mit dem Enthaltensein durchgehend übereinstimmende Darstellung zu gewinnen.

Welchen Sinn das Teilen haben muss, wenn der Divisor ein Bruch ist, ergibt sich aus dem Gesetz, dass bei gleichbleibenden Dividenden der Divisor und der Quotient sich in umgekehrtem Verhältnisse verändern. In dem Masse, wie der Divisor zu- oder abnimmt, wird der Quotient kleiner oder grösser. Wenn man dieses Gesetz rückschreitend zur Anwendung bringt, so gewinnt man die Definition des Teilens durch einen Bruch. Man hat z. B.:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad 75 : 4 = 18\frac{3}{4}; & 3. \quad 75 : \frac{1}{4} = 300; \\ 2. \quad 75 : 1 = 75; & 4. \quad 75 : \frac{3}{4} = 100. \end{array}$$

Nun hat es einen verständlichen Sinn, die Zahl 75 in 4 gleiche Teile zu zerlegen; aber schon die Forderung, sie in einen Teil zu teilen, scheint widersinnig zu sein. Wenn aber, wie ich nachgewiesen habe, der Satz „1 mal 75 = 75“ von axiomatischer Gewissheit ist, so muss notwendig auch 75 geteilt durch 1 = 75 sein. Man muss sich nur von der Auffassung losmachen, dass das Teilen unter allen Umständen ein Zerlegen sein müsse. Durch die Darstellung „75 geteilt durch 1“ wird gefordert, dass man die Zahl 75 als einen Teil setze. Dies ist aber gar nichts Ungereimtes; der gesuchte Teil ist eben dann die gegebene Zahl. Ist aber die Aufgabe „75 geteilt durch  $\frac{1}{4}$ “ zu lösen, so wird damit gefordert, dass die Zahl 75 als „ $\frac{1}{4}$  von einem Teil“ gesetzt werde, was zur Folge hat, dass der gesuchte Teil  $4 \cdot 75$  wird. Aber ergibt sich denn nicht gerade daraus, dass diese Operation gar

kein Teilen, sondern eine Multiplikation ist? Keineswegs! Die Zahl 75 wird zunächst gar nicht multipliziert, sondern durch  $\frac{1}{4}$  geteilt, d. h. als  $\frac{1}{4}$  von einem Teil gesetzt. Erst aus dieser Setzung, aus dem Teilen durch  $\frac{1}{4}$ , ergibt sich dann die Folgerung, dass man die Multiplikation mit 4 als Mittel anwenden muss, um den gesuchten Teil zu bestimmen.

Unser Gegenstand soll indes noch von einer andern Seite beleuchtet werden. Wenn eine zahlenmässig bestimmte Grösse in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen ist, so kann man auf zwei verschiedenen Wegen zum Ziel gelangen. Ist z. B. die Grösse „8 Meter“ durch 4 zu teilen, so kann man einmal die Anzahl der Meter teilen, wobei die als Einheiten gezählten Massstrecken unverändert bleiben. Man erhält als Resultat „2 Meter“. Die Teilung lässt sich aber auch in der Weise ausführen, dass man jede Masseinheit in 4 gleiche Stücke teilt, so dass jedes Stück ein „Viertelmeter“ ist, und dann jedem der vier Teile so viele Viertelmeter zusätzt, als die ganze Strecke Meter enthält. Das Resultat ist dann nicht etwa  $\frac{8}{4}$  Meter“, sondern „8 Viertelmeter“.

Da die Resultate beider Teilungen offenbar gleich sind, so hat man die Grössengleichung:

$$2 \text{ Meter} = 8 \text{ Viertelmeter.}$$

Ist eine Grösse wie z. B. „3 Meter“ durch 4 zu teilen, so erhält man nach dem zweiten Teilungsverfahren „3 Viertelmeter“. Versucht man aber die Lösung nach dem ersten Verfahren, so stellt sich heraus, dass die Teilung der Zahl 3 durch 4 gar nicht ausführbar ist. Dies drückt man dadurch aus, dass man setzt: „ $\frac{3}{4}$  Meter“, wobei der horizontale Strich die Bedeutung des Divisionszeichens hat. Nun findet man sich vor die Frage gestellt: Darf man die Verknüpfung der Zahlen 3 und 4 durch Division, trotzdem sie nicht weiter ausführbar ist, also in einer Zahl nicht ausgedrückt werden kann, dennoch als eine Zahl, nämlich als Bruchzahl betrachten und sie der ohne Teilung gedachten Masseinheit „Meter“ als Anzahl beilegen? Die Antwort lautet: Gewiss darf man dies, wenn man den Begriff der Zahl entsprechend erweitert und sich bei der Auswertung strikte nach der Grössengleichung richtet:

$$\frac{3}{4} \text{ Meter} = 3 \text{ Viertelmeter.}$$

Es ist einleuchtend, dass diese beiden Ausdrücke vorläufig noch nicht die gleiche operative Bedeutung haben. Der Ausdruck „3 Viertelmeter“ bezeichnet eine Bruchgrösse; das Wort „Viertelmeter“

benennt die der Zählung zu grunde liegende Masseinheit nach ihrer Art und Grösse; die Bezeichnung „Viertel“ ist nicht eine Zahl, sondern ein Name, die Zahl 3 aber ist eine ganze Zahl. Es liegt also hier eine Bruchgrösse vor, aber keine Bruchzahl. Der Ausdruck „ $\frac{3}{4}$  Meter“ aber setzt eine ganz andere Betrachtungsweise voraus, indem die Masseinheit „Meter“ ohne Teilung gedacht und die Bruchzahl  $\frac{3}{4}$  als Anzahl der ganzen Meter dargestellt wird. Um also von den beiden Ausdrücken „ $\frac{3}{4}$  Meter“ und „3 Viertelmeter“ den einen für den andern setzen zu dürfen, muss man sie als Größenbestimmungen auffassen, so dass die Darstellung

$$\frac{3}{4} \text{ Meter} = 3 \text{ Viertelmeter}$$

nicht eine Definition, sondern eine Grössengleichung wäre. In der Entwicklung der Rechensprache hat es sich aber als nützlich erwiesen, die beiden Ausdrücke überhaupt als gleichbedeutend zu betrachten, also zu definiren:

$$\frac{3}{4} \text{ Meter heisst } 3 \text{ Viertelmeter.}$$

Wenn es sich darum handelt, den gesprochenen Ausdruck „3 Viertelmeter“ zu schreiben, so setzt man dafür „ $\frac{3}{4}$  Meter“; soll man aber den geschriebenen Ausdruck „ $\frac{3}{4}$  Meter“ lesen, so spricht man „3 Viertelmeter“. Nun wird man auch begreifen, woher es kommt, dass über den Charakter des „Bruchnenners“ diametral entgegengesetzte Ansichten herrschen. Die einen, zu welchen Knilling gehört, behaupten, ein Bruch enthalte nur eine Zahl, nämlich den Zähler; der Nenner sei nicht eine Zahl, sondern ein Name, nicht „4“, sondern „Viertel“. Die Vertreter dieser Ansicht haben offenbar lediglich die Bruchgrösse im Auge; sie vergessen aber, dass man mit solchen Größen rechnen kann, ohne Bruchzahlen anzuwenden. Um ihre Ansicht konsequent durchzuführen, müssten sie das Rechnen mit Bruchzahlen vermeiden; sie dürften die Bezeichnung „ $\frac{3}{4}$  Meter“ nicht anwenden, sie müssten immer sprechen und schreiben:

„3 Viertelmeter“. Nach der zweiten, offenbar einzig richtigen Auffassung enthält eine Bruchzahl ganz ohne Zweifel zwei Zahlen, den Zähler und den Nenner; aber man betrachtet sie trotzdem als eine Bruchzahl, da

sie ja eine operative Verknüpfung zweier ganzer Zahlen sind. Wird die Bruchzahl ihrer Bestimmung gemäss zur Darstellung von Bruchgrössen verwendet, dann ist der Nenner die Anzahl der Teile, in welche das Ganze geteilt wird, der Zähler aber ist die Anzahl der Teile, welche die Bruchgrösse enthält.

Es besteht keine logische Notwendigkeit, beim Rechnen Bruchzahlen anzuwenden. Es sind lediglich Gründe der Zweckmässigkeit, die ihre Einführung veranlasst haben; sie dienen als Mittel, die Sprache der Arithmetik wesentlich zu vereinfachen. Hat man die Teilung „ $35\text{ m} : 8$ “ auszuführen, so erhält man nach dem zweiten Verfahren „4 Meter und 3 Achtelmeter“ oder dann: „4 Meter, 3 Zehntelmeter, 7 Hundertstelmeter und 5 Tausendstelmeter“. Das Resultat ist also eine zwei- oder mehrfach benannte Bruchgrösse mit ganzen Zahlen. Die mit dieser Darstellungsweise verbundene, ermüdend weitschweifige Ausdrucksform lässt sich aber durch eine kürzere ersetzen; man kann eben, indem man Bruchzahlen anwendet, die zwei- oder mehrfach benannte Bruchgrösse unter einer Benennung bringen, also setzen „ $\frac{3}{8}$  Meter“ oder „4,375 Meter“.

Ähnlich ist es beim Messen. Es sei z. B. die Frage gestellt: Wie oft ist eine Strecke von 8 m in einer Strecke von 29 m enthalten? Will man keine Bruchzahlen anwenden, so muss man antworten: Eine Strecke von 29 m enthält „3 mal 8 m + 5 mal den 8. Teil von 8 m“, oder dann: „3 mal 8 m + 6 mal den 10. Teil von 8 m + 2 mal den 100. Teil von 8 m + 5 mal den 1000. Teil von 8 m.“ Man erhält also auch hier eine zwei- oder mehrfach benannte Bruchgrösse mit ganzen Zahlen. Abgesehen von der lästig weitschweifigen Ausdrucksweise hat aber diese Darstellung auch noch das gegen sich, dass die gestellte Frage nur zum Teil beantwortet wird; denn die Strecke von 29 m ist ja nicht nur in Strecken von 8 m, sondern ausserdem noch in andern Massstrecken ausgedrückt. Wie zweckmässig nun die Bruchzahlen sind, ist auch hier augenfällig; denn sie ermöglichen die bündige Antwort: 8 m sind in 29 m „ $\frac{3}{8}$  mal“ oder „3,625 mal“ enthalten. Diese Darstellungsweise hat aber die notwendige Voraussetzung, dass  $\frac{3}{8} \cdot 8\text{ m} = 29\text{ m}$  und ebenso, dass  $3,625 \cdot 8\text{ m} = 29\text{ m}$  sind, d. h. sie würde in der Luft schweben, wenn der Multiplikator kein Bruch und auch keine gemischte Zahl sein könnte.

Für die Multiplikation gilt das Gesetz:

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c},$$

d. h. ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, indem man nur einen Faktor des Produktes durch diese Zahl dividirt. Nachdem nun die Bruchzahlen definiert und eingeführt sind, kommt diesem Gesetz allgemeine Geltung zu; es muss also auch

$$\frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{3}{4} \cdot 5 = 3 \cdot \frac{5}{4}$$

sein. Damit ist aber festgestellt, was man unter  $\frac{3}{4} \cdot 5$  verstehen muss, wenn man sich dieser Darstellung beim Rechnen bedienen will. Damit ist aber auch die Notwendigkeit konstatirt, die Operation  $\frac{3}{4} \cdot 5$  unter den Begriff der Multiplikation zu bringen. Die durch  $\frac{3 \cdot 5}{4}$  dargestellte Operation ist eine Verknüpfung von Multiplikation und Division. Dabei ist offenbar die Reihenfolge der Operationen gleichgültig. Man kann zuerst die Multiplikation ausführen und dann dividiren; man kann aber auch zuerst einen der Faktoren dividiren und nachher multiplizieren. Wenn man nun das letztere Verfahren wählt, wenn man also zuerst den Multiplikator 3 durch 4 dividirt, so weit dies überhaupt möglich ist, so muss die nun noch auszuführende Operation  $\frac{3}{4} \cdot 5$  notwendig eine Multiplikation sein.

Wenn also die Bruchzahlen ihren Zweck, die Sprache der Arithmetik zu vereinfachen, erfüllen sollen, so müssen für das Rechnen mit diesen Zahlen die Gesetze gelten, welche für ganze Zahlen massgebend sind. Wäre dies nicht möglich, so hätte man die Bruchzahlen gar nicht eingeführt; denn sie würden dann die Rechensprache nicht vereinfachen, sondern in arger Weise komplizieren und verwirren. Insbesondere die Algebra, welche die Gesetze der Zahlenveränderungen zu einer allgemeinen Arithmetik auszubauen hat, wäre ganz einfach gegenstandslos, wenn diesen Gesetzen nicht allgemeine, durchgehende Geltung zukäme.

Für die Multiplikation gilt das kommutative Gesetz

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

nach dem das Produkt von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist. Nach der Einführung der Bruchzahlen gilt dieses Gesetz allgemein; es ist ja auch

$$12 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 12.$$

Die durch  $\frac{3}{4} \cdot 12$  dargestellte Operation muss also unter den Begriff der Multiplikation gebracht werden, da für die Division das kommutative Gesetz nicht gilt. Dieses Gesetz ist auch gar nicht nur etwas Äusserliches, es ist im innersten Wesen der Multiplikation begründet. Wenn man die Multiplikation  $160 \cdot 3\frac{3}{4}$  Fr. aufzulösen hat, so kann man freilich so verfahren, dass man  $160 \cdot 3$  Fr. und dann  $160 \cdot \frac{3}{4}$  Fr. rechnet und die Produkte addiert. Man kann aber auch so schliessen:  $160$  mal  $1$  Fr. sind  $160$  Fr.;  $160$  mal  $3\frac{3}{4}$  Fr. sind offenbar  $3\frac{3}{4}$  mal so viel, also  $3\frac{3}{4}$  mal  $160$  Fr. Nun haben also durch folgerichtige Schlüsse Multiplikand und Multiplikator als Zahlen ihre Rollen vertauscht. Dieser Wechsel der Funktionen kann aber auch bei der Lösung angewandter Aufgaben eintreten, was durch folgende Beispiele illustriert werden soll:

1. *Aufgabe.* Wie teuer kommen  $480 \text{ kg}$  Kaffee zu stehen, wenn  $1 \text{ kg}$   $2 \text{ Fr. } 75 \text{ Rp.}$  kostet?

1. *Auflösung.*  $1 \text{ kg}$  Kaffee kostet  $2\frac{3}{4}$  Fr.;  $480 \text{ kg}$  kosten also  $480$  mal  $2\frac{3}{4}$  Fr. oder  $1320$  Fr.

2. *Auflösung.* Zu  $1$  Fr. per  $1 \text{ kg}$  würden  $480 \text{ kg}$  Kaffee  $480$  Fr. kosten; da aber  $1 \text{ kg } 2\frac{3}{4}$  Fr. gilt, so kosten  $480 \text{ kg } 2\frac{3}{4}$  mal  $480$  Fr. oder  $1320$  Fr.

2. *Aufgabe.* Welches Gewicht hat eine Marmorplatte von  $250 \text{ dm}^3$  Inhalt, wenn das spezifische Gewicht des Marmors  $2\frac{4}{5}$  ist?

1. *Auflösung.*  $1 \text{ dm}^3$  Marmor wiegt  $2\frac{4}{5} \text{ kg}$ ;  $250 \text{ dm}^3$  wiegen also  $250$  mal  $2\frac{4}{5} \text{ kg}$  oder  $700 \text{ kg}$ .

2. *Auflösung.*  $250 \text{ dm}^3$  Wasser wiegen  $250 \text{ kg}$ . Da nun der Marmor  $2\frac{4}{5}$  mal so schwer ist als das Wasser, so wiegen  $250 \text{ dm}^3$  Marmor  $2\frac{4}{5}$  mal  $250 \text{ kg}$ , also  $700 \text{ kg}$ .

3. *Aufgabe.* Wie gross ist der jährliche Zins von  $3200$  Fr. zu  $4\frac{3}{8}\%$ ?

1. *Auflösung.*  $100$  Fr. Kapital tragen jährlich  $4\frac{3}{8}$  Fr. Zins;  $3200$  Fr. tragen also  $32$  mal  $4\frac{3}{8}$  Fr. oder  $140$  Fr. Zins.

2. *Auflösung.*  $1\%$  von  $3200$  Fr. ist  $32$  Fr.;  $4\frac{3}{8}\%$  sind also  $4\frac{3}{8}$  mal  $32$  Fr. oder  $140$  Fr.

Man sieht also, dass bei der Lösung derartiger Aufgaben durch folgerichtige Schlüsse jeder der beiden Masszahlen die Rolle des Multiplikanden oder dann diejenige des Multiplikators zugeteilt werden kann. Wenn nun ein Bruch als Multiplikand auftritt, dann ist er nach Knillings Meinung ein wirklicher Bruch; wird aber bei der Lösung der nämlichen Aufgabe der gleiche Bruch als Multiplikator in den Rechenzusammenhang eingeführt, dann spricht er ihm den Charakter des Bruches und des Multiplikators ab. Sind dies nicht auch rechenmethodische Schrullen, welche, bei Licht betrachtet, in blauen Dunst zerfliessen?

Für beide Arten der Division gilt das Gesetz, dass der Quotient unverändert bleibt, wenn Dividend und Divisor mit der gleichen Zahl multiplizirt oder durch die nämliche Zahl dividirt werden. Beim Messen hat man z. B. auch nach Knillings Ansicht:

$$3600 \text{ Fr.} : 75 \text{ Fr.} = 900 \text{ Fr.} : 18^{3/4} \text{ Fr.} = 36 \text{ Fr.} : \frac{3}{4} \text{ Fr.} = 48 \text{ mal.}$$

Wenn nun das angeführte Gesetz allgemein auch nur für ganze Zahlen gelten soll, so muss beim Teilen

$3600 \text{ Fr.} : 75 = 900 \text{ Fr.} : 18^{3/4} = 36 \text{ Fr.} : \frac{3}{4} = 48 \text{ Fr.}$   
sein. Dazu ist aber erforderlich, dass eine gemischte Zahl oder eine Bruchzahl auch Divisor im Sinne des Teilens sein kann.

Angewandte Divisionsaufgaben lassen sich auf zwei Arten in der Weise auflösen, dass das Enthaltensein zum Teilen wird, und umgekehrt. Dies mag durch folgende Beispiele illustriert werden:

1. *Aufgabe.* Wie lang ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang  $17,6 \text{ m}$  beträgt? ( $\pi = 3\frac{1}{7}$ .)

1. *Auflösung.*  $3\frac{1}{7}$  Durchmesser betragen  $17,6 \text{ m}$ ; 1 Durchmesser ist also  $17,6 \text{ m}$  geteilt durch  $3\frac{1}{7}$ , oder  $5,6 \text{ m}$ .

2. *Auflösung.* Wenn der Umfang eines Kreises  $3\frac{1}{7} \text{ m}$  misst, so hat der Durchmesser eine Länge von  $1 \text{ m}$ ; ist aber der Umfang  $17,6 \text{ m}$ , so beträgt der Durchmesser so viele Meter, als  $3\frac{1}{7} \text{ m}$  in  $17,6 \text{ m}$  enthalten sind, also  $5,6 \text{ m}$ .

2. *Aufgabe.* Wie breit ist ein rechteckförmiger Zimmerboden von  $9\frac{3}{5} \text{ m}$  Länge und  $72 \text{ m}^2$  Inhalt?

1. *Auflösung.* Denkt man die Fläche des Zimmerbodens in der Richtung der Länge in Streifen von  $1 \text{ m}$  Breite zerlegt, so misst jeder dieser Streifen  $9\frac{3}{5} \text{ m}^2$ . Die Breite des Zimmerbodens beträgt also so viele Meter als  $9\frac{3}{5} \text{ m}^2$  in  $72 \text{ m}^2$  enthalten sind, somit  $7,5 \text{ m}$ .

2. *Auflösung.* Denkt man die Fläche des Zimmerbodens in der Richtung der Breite in Streifen von  $1 \text{ m}$  Längenausdehnung zerlegt, so ist die Zahl dieser Streifen  $9\frac{3}{5}$ , und jeder derselben misst  $72 \text{ m}^2$  geteilt durch  $9\frac{3}{5}$ , oder  $7,5 \text{ m}^2$ . Die Breite des Zimmerbodens misst aber so viele Meter, als einer dieser Streifen Quadratmeter enthält, also  $7,5 \text{ m}$ .

Diese Beispiele zeigen, dass bei der Lösung einer angewandten Divisionsaufgabe eine und dieselbe gemischte Zahl oder Bruchzahl Divisor im Sinne beider Divisionsarten sein kann. Auch aus diesem Grunde ist es total verfehlt, einer solchen Bruchzahl im Falle des Teilens den Charakter des wirklichen Divisors abzusprechen.

Wir berechnen den Inhalt eines Rechtecks, indem wir die Masszahl der Länge mit derjenigen der Breite multiplizieren. Ist also ein rechteckförmiger Bauplatz  $43,8 \text{ m}$  lang und  $34,7 \text{ m}$  breit, so ist sein Inhalt

$$\begin{aligned} J &= 438 \cdot 347 \text{ dm}^2 = 43,8 \cdot 34,7 \text{ m}^2 \\ &= 4,38 \cdot 3,47 \text{ a} = 0,438 \cdot 0,347 \text{ ha}. \end{aligned}$$

Nach Knillings Auffassung würde aber diese Regel nur für die erste der vier Darstellungen gelten; denn nur in diesem Falle hätte man nach seiner Theorie eine wirkliche Multiplikation, während in den drei andern Fällen entweder eine Division oder dann eine aus Multiplikation, Division und Addition bestehende Operationsverknüpfung vorliegen würde. Man müsste also für die Berechnung des Rechtecks nicht nur eine, sondern

drei Regeln aufstellen, wodurch offenbar nicht Wahrheit und Klarheit, sondern arge Konfusion ins Rechnen gebracht würde.

Auch Knilling definirt die Potenz als ein Produkt aus gleichen Faktoren. Da aber nach seiner Ansicht der Multiplikator nie ein Bruch oder eine gemischte Zahl sein kann, so könnte man nur ganze Zahlen potenziren. Von den Operationen  $25^3$ ,  $18,4^2$ ,  $6,25^3$ ,  $0,5^4$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ ,  $\left(\frac{3}{4}\right)^3$  wäre nur die erste ein wirkliches Potenziren; man stünde also vor der geradezu ungeheuerlichen Konsequenz, dass man auch nur in diesem ersten Falle die Form der Potenz anwenden dürfte. Es ist eine Forderung der Wahrheit und Klarheit, dass man die für eine Operation festgesetzte Darstellungsweise nur da anwendet, wo die Aufgaben entweder schon unter den Begriff dieser Operation fallen oder dann durch Erweiterung dieses Begriffes widerspruchsfrei unter denselben gebracht werden können.

Das Wurzelausziehen betrachtet Knilling als eine Art des Teilens, als Reduktion der Potenz auf ihre Wurzel. Da man aber nach seiner Definition des Multiplizirens nur ganze Zahlen potenziren könnte und die Potenzen ganzer Zahlen wiederum nur ganze Zahlen sind, so dürfte man eine Operation nur dann als ein wirkliches Radiziren gelten lassen, wenn der Radikand eine ganze Zahl ist und ausserdem die Wurzel rational wird. Wenn irgendwo, so drängt sich hier als Logik des Denkens und der Tatsachen auf: Wenn das Rechnen nicht nur ein lückenhaftes, zusammenhangloses Sammelsurium von Einzelrezepten, sondern eine allgemeine Arithmetik mit durchgehenden Gesetzen sein soll, so ist dazu unbedingt erforderlich, dass auch Bruchzahlen und gemischte Zahlen als Multiplikator und als Divisor beim Teilen funktioniren können.

Die Bruchzahl ist als Anzahl zu dem Zwecke definirt und eingeführt worden, damit man Bruchgrössen in einfacherer Form darstellen könne, als es durch ganze Zahlen möglich wäre. Wer also die Bruchzahl in diesem Sinne als Anzahl gebraucht, muss sie notwendig auch als Multiplikator, d. h. als die Anzahl funktioniren lassen, welche die Setzung des Multiplikanden normirt. Die von Knilling geplante Reform des Bruchrechnens wurzelt nun aber ganz ohne Zweifel in der Verwechslung der Begriffe „Bruchgrösse“ und „Bruchzahl“. Was er als „wirkliche und veritable“ Brüche betrachtet, das sind nach meiner Auffassung Bruchgrössen mit ganzen Zahlen, aber keine Bruchzahlen. Nun kann man eine Zahl oder eine Grösse zwar mit einer Zahl, aber nicht mit einer Grösse multipliziren. Es hat keinen verständlichen Sinn, 7 Fr. mit 5 m zu multipliziren, wohl aber kann man 7 Fr. mit der Zahl 5 vervielfachen. Ebenso wäre auch die Forderung, 40 Fr. mit 5 Achtelzentner

zu multiplizieren, eine unsinnige, wohl aber kann man „ $\frac{5}{8}$  mal 40 Fr.“ rechnen. Dass und warum man aber diese Operation unter den Begriff der Multiplikation bringen muss und in welchem Sinne dies geschehen kann und darf, habe ich nachgewiesen.

Was dem Denken Knillings Schwierigkeiten bereitet, das ist nicht eigentlich der Bruch als Multiplikator, sondern die Bruchzahl als solche. Wenn er die von ihm vorgeschlagene logische und methodische Purifikation des Bruchrechnens konsequent durchführen wollte, so dürfte er eigentlich nur noch mit ganzen Zahlen und mit Bruchgrößen rechnen, das Rechnen mit Bruchzahlen aber müsste er ganz vermeiden. Dies hätte man ja von jeher tun können; aber dann wäre das Rechnen auf der Stufe der Kindheit stehen geblieben. Wenn man die Entwicklungsgeschichte der Arithmetik von ihren einfachsten Anfängen bis zu ihrer heutigen Höhe durchwandert, so findet man einen aufsteigenden Stufengang von Erweiterungen des Zahlbegriffs und der Operationsbegriffe. Da wurden zu den ganzen Zahlen nacheinander eingeführt: die Bruchzahlen, die negativen, die imaginären, die komplexen Zahlen u. s. w. Jedesmal aber mussten mit dem erweiterten Zahlbegriff auch die Begriffe der Operationen so gut als möglich in Einklang gebracht werden. Die Operationen  $(-5) \cdot (-7)$  und  $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-3}$  sind nach Knillings Auffassung in viel höherem Grade widersinnig als die Multiplikation mit einer Bruchzahl. Die Rechenlehrer der Zukunft werden aber trotz Knillings „Forschungsresultaten“ fortfahren, diese Operationen unter den zweckentsprechend erweiterten Begriff der Multiplikation zu bringen. Es wäre offenbar ein aussichtsloses Unternehmen, das Rad dieser Entwicklung rückwärts drehen zu wollen.