Studia Philosophica 39/1980

ANDRÉ DELESSERT

# Quelques observations sur la nature des mathématiques d'aujourd'hui

## *Introduction*

«La rigueur mathématique», «une précision toute mathématique», «glacé comme un raisonnement mathématique» sont des locutions appartenant au langage de tous les jours. Le profane hésite à recourir à la zoologie ou la cristallographie pour établir des comparaisons avec l'art, la sociologie ou la morale. Il craindrait de proférer des incongruités à propos des animaux ou des cristaux. Mais à l'égard des mathématiques, de tels scrupules sont superflus puisque, apparemment, elles ne sont rien d'autre qu'une tournure d'esprit. En fait il n'existe même pas de nom pour désigner ce qu'elles étudient.

De nombreux penseurs et essayistes s'efforcent d'élucider les rapports délicats entre les sciences, la morale et la politique. Ils énoncent souvent des remarques pleines d'à-propos au sujet des sciences, à un détail près: il est bien rare qu'elles s'appliquent aux mathématiques. Leurs thèses perdraient beaucoup de leur saveur en précisant qu'elles concernent toutes les sciences, à l'exception des mathématiques. En revanche, à cause de l'ignorance générale, elles ne courent aucun risque en prêtant aux mathématiques des traits qui leur sont totalement étrangers. D'autre part, les auteurs profanes qui s'aventurent sur le terrain mathématique en restent trop souvent à des observations valables du temps de Pascal ou de Leibniz, mais qui ont perdu aujourd'hui beaucoup de leur pertinence.

Il faut admettre que les mathématiciens se donnent peu de peine pour éclairer les non-initiés. Ils se choquent ou s'amusent aux discours profanes où ils ne retrouvent ni leurs convictions, ni leurs expériences quotidiennes. Mais ils répugnent à analyser publiquement les sources profondes de leur discipline et les raisons personnelles qu'ils ont de s'y adonner. De plus, ceux qui s'expriment sur l'essence de leur science professent des opinions

*Correspondance: Prof. Dr André Delessert, En Bugnon, CH-1099 Servion*

très diverses et souvent inconciliables. On peut relever, en particulier, trois attitudes bien tranchées qui suggèrent l'éventail des positions possibles:

- Les mathématiques sont inscrites au cœur de la réalité, qu'elles façonnent
- les mathématiques sont une construction intellectuelle autonome qui n'entretient avec la réalité que des connexions lâches, des liaisons d'adéquation tout à fait fortuites
- les mathématiques sont une langue ou un modèle verbal élaborés par approximations successives en vue de la description d'une réalité à laquelle ils ne s'adaptent jamais exactement.

Il semble difficile d'accepter indifféremment ces trois assertions, à moins qu'il soit permis de penser n'importe quoi de la nature des mathématiques.

Il serait intéressant de savoir si les mathématiques tirent avantage de ces confusions. Mais on peut poser une question plus fondamentale encore: existe-t-il des faits mathématiques qui imposent quelque limite aux jugements que quiconque a le droit de porter sur la nature des objets étudiés par les mathématiciens d'aujourd'hui?

Pour tenter de répondre à cette question, il serait naturel d'examiner les développements récents des mathématiques dans des secteurs où l'évolution et les tendances se sont marquées avec une netteté particulière. Malheureusement il faudrait déployer des moyens techniques accessibles au seul mathématicien de formation, de sorte que les constatations faites n'auraient aucune valeur convaincante pour le non-initié. Nous nous proposons d'adopter un plan différent. Nous allons considérer une notion relative aux nombres naturels, à l'endroit où elle quitte le sens commun pour acquérir un statut proprement mathématique. Les observations que nous pourrons faire seront à la fois assez élémentaires pour entraîner l'adhésion du profane et assez fondamentales pour toucher les mathématiques prises globalement.

## *I. Un exemple de notion mathématique: la collection des nombres naturels*

### Les axiomes de Peano

On appelle *nombres naturels* les entiers 0, 1, 2, 3 et ainsi de suite. Les mathématiciens ont besoin – ne serait-ce que pour parler du développement décimal du nombre «un tiers» – de la collection **N** de *tous* les nombres naturels, ce que nous noterons provisoirement:

**N** = {0, 1, 2, 3, etc}

Pour notre exposé, cette notion présente deux avantages décisifs. D'une part, elle n'admet aucune réalisation matérielle. D'autre part, elle est si essentielle que toute observation faite à son sujet est susceptible d'influencer la majeure partie des autres notions mathématiques.

Pour que la notion mathématique **N** soit utilisable, il faut d'abord qu'elle soit perçue par l'intuition, puis qu'elle soit assortie de quelques propriétés permettant de l'introduire dans des argumentations. En 1889, Peano publia une description de **N** qui parut remplir cette double exigence. En substance, elle se présentait ainsi:

1) Tout élément de **N** admet exactement un successeur. 0 n'est le successeur d'aucun élément de **N**. A l'exception de 0, tout élément de **N** est le successeur d'un élément de **N** exactement.

2) **N** vérifie le *principe d'induction complète* qu'on peut énoncer de la manière suivante: convenons de dire qu'une partie de **N** (i. e. un ensemble d'éléments de **N**) a la propriété P lorsqu'elle comporte 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments; alors **N** est l'unique partie de **N** qui a la propriété P.

Le contenu intuitif de cette description est clair et on peut montrer qu'elle contient tout ce qu'il faut pour démontrer les théorèmes d'arithmétique.

A la réflexion cependant, on constate que l'axiome 2 dissimule d'inquiétantes obscurités. Pour s'assurer que **N** vérifie bien le principe d'induction complète, il faut disposer *au préalable* de **N** et de toutes ses parties. On voit apparaître une sorte de cercle vicieux.

L'axiome 2 est un exemple d'énoncé «non-prédicatif» analogue à ceux qui sont à l'origine de nombreuses antinomies logiques telles que le paradoxe du menteur. En outre, cet axiome introduit subrepticement l'idée d'ensemble et celle de sous-ensemble dont on sait d'autre part qu'elles soulèvent des questions extrêmement délicates. Il en résulte que malgré les apparences, les axiomes de Peano sont loin d'être clairs. Ils ne peuvent pas servir à fonder **N**.

Cette expérience décevante montre que le parler commun, dont l'usage est constant en mathématiques, comporte des dangers lorsqu'on l'emploie à décrire une notion telle que **N**. Il permet des associations de mots si fluides que même un lecteur averti croit distinguer une situation claire là où se sont glissés l'ambiguïté et le paradoxe. Il faut donc soumettre la langue à des exigences beaucoup plus strictes. C'est en construisant un idiome contrôlable pas à pas, excluant l'équivoque et le cercle vicieux qu'on peut espérer y parvenir. Mais ce gain de précision va coûter cher. Jusqu'ici l'intuition de **N** et son mode d'emploi étaient complices. Désormais la notion **N** se trouvera à l'intersection de deux démarches indépendantes et peut-être contradictoires, l'*intuition* et la *caractérisation formelle.*

L'*intuition* nous montre que **N** existe. En outre elle nous pousse à admettre que **N** est essentiellement unique (essentiellement, c'est-à-dire à des équivalences de dictionnaire près).

Voyons maintenant à quoi nous conduit une caractérisation formelle acceptable de **N**. Pour parvenir à des constatations vraiment convaincantes, nous sommes contraints d'examiner un peu l'outil mis au point par les logiciens et les mathématiciens.

## L'outil formel

La première notion à dégager est celle de *langage formel du premier ordre*. Un tel langage est donné par une provision de symboles comportant:

- des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$, $=$
- un *quantificateur* $\forall$
- des symboles de *variables* x, x′, x″,...
- des symboles de *relations* $R_n$, $R'_{n'}$,...

Chaque symbole de relation tel que $R_n$ est affecté d'un entier naturel n qu'on appelle son ordre. Lorsque n égale 0, cette relation est dite *constante*. Les symboles de relations sont propres au langage L, tandis que les autres signes appartiennent à tous les langages formels du premier ordre. La détermination de L est complétée par une collection de règles permettant d'écrire des suites finies de symboles appelées *formules* de L. Ces règles conviennent à tous les langages formels du premier ordre. Elles sont simples à énoncer:

- si $R_n$ est un symbole de relation d'ordre n et si $t_1, t_2,..., t_n$ désignent des symboles de variables ou de constantes distincts ou non, $R_n t_1 t_2 ... t_n$ est une formule

- le signe «=» se comporte comme un symbole de relation d'ordre 2 (on note communément $x = x'$ au lieu de $= xx'$)
- si A et B sont des formules, $\neg A$, $A \wedge B$ et $A \rightarrow B$ aussi
- si A est une formule et si x est un symbole de variable, $\forall x A$ est une formule.

Cette dernière règle, qui limite l'emploi du quantificateur, est caractéristique des langages formels du premier ordre. On dit que le quantificateur lie le symbole de variable x. Une formule sans signe de variable ou dont tous les signes de variables sont liés est appelée *énoncé*. Par exemple, $\forall x\, x = x$ est un énoncé.

La deuxième notion à définir est celle de *système formel* du premier ordre. Un langage formel du premier ordre L étant choisi, on y prend une collection de formules baptisées *axiomes* et on se donne des *règles d'inférence*. Le résultat obtenu est un mécanisme imitant un système hypothético-déductif. Précisons cela.

Les axiomes sont de deux classes. La première est constituée par les *axiomes logiques*. Ce sont des formules de L, dont l'énumération est trop oiseuse pour que nous la fassions ici, traduisant formellement que les signes $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$, $=$ et $\forall$ se comportent comme les expressions «il est faux que», «et», «implique», «égale» et «quel que soit». Par exemple $\forall x\, x = x$ figure parmi les axiomes logiques, ou encore, pour toute formule A de L, la formule $A \rightarrow \neg\neg A$. La seconde classe d'axiomes, S, est formée d'énoncés choisis arbitrairement parmi ceux qui ne figurent pas dans la première. Ce sont donc les *axiomes non logiques*. Avec L, ils caractérisent le système formel, qu'en conséquence on note (L,S).

On considère alors l'idée de preuve. Une *preuve* de la formule $F_p$ dans le système formel (L,S) est une chaîne finie de formules de L:

$F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots, F_p$

dans laquelle chaque formule $F_k$ est soit un axiome (logique ou non), soit une formule obtenue à partir des formules qui la précèdent dans la chaîne à l'aide des *règles d'inférence*. Ces règles sont peu nombreuses. Les voici. La règle *«modus ponens»* permet d'écrire B à partir des formules A et $A \rightarrow B$. La règle de *généralisation* permet d'écrire $A \rightarrow \forall x B$ à partir de la formule $A \rightarrow B$, à condition que x soit un symbole de variable ne figurant pas dans A.

Un système formel du premier ordre (L,S) est dit *consistant* lorsqu'il n'existe pas de preuve dans (L,S) d'un énoncé de la forme «$A \wedge \neg A$».

Dans ce cas on dit aussi que (L,S) est une *théorie;* les énoncés qui y admettent une preuve en sont les *théorèmes.*

Dans tout ce qui précède, les symboles sont dénués de signification et les règles s'appliquent mécaniquement. Toutefois le dispositif n'a pas été construit au hasard. Il est susceptible de recevoir des illustrations et nous voyons apparaître une troisième notion importante. Soit L un langage formel du premier ordre. Une *interprétation* (ensembliste) de L est la donnée d'un ensemble non vide E et d'une loi J attachant à tout symbole de constante un élément de E et à tout symbole $R_n$ de relation d'ordre n ($n > 0$), un ensemble $J(R_n)$ de n-uples $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'éléments de E. Toute formule A de L peut alors être traduite par J dans E, à condition de donner aux signes $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$ et $\forall$ les sens respectifs de «il est faux que», «et», «implique», et «quel que soit». Evidemment le signe «=» se traduit par l'égalité ordinaire. Cette traduction J(A) se présente comme une assertion usuelle dans E, du genre de: «quel que soit l'élément x de E, il est faux que le couple (x,x) appartienne à $J(R_2)$». Elle peut être vraie ou fausse. Dans le premier cas, on dit que la formule A est *satisfaite* par l'interprétation (E,J). Il est peut-être utile de préciser que cette définition emploie une notion «naïve» d'ensemble et qu'elle ne suppose pas connue, au préalable, la théorie des ensembles.

On se convainc facilement qu'à cause même de la définition de l'interprétation, les axiomes logiques sont satisfaits dans *toute* interprétation de L. Si l'on se donne une collection S d'axiomes non logiques, l'interprétation (E,J) de L est un *modèle* du système formel (L,S) si tous les énoncés de S sont satisfaits par (E,J).

L'idée de modèle d'un système formel du premier ordre est intéressante pour le mathématicien. Il se trouve en effet que la plupart des notions mathématiques apparaissent comme de tels modèles. Prenons, par exemple, un langage formel L du premier ordre ne comportant qu'un seul symbole de relation $R_3$ d'ordre 3 ($R_3\, xx'x''$ sera interprété comme: le produit de x et x' est x''). Choisissons pour S les axiomes bien connus des groupes. Ce sont des énoncés dans L exprimant que la multiplication est bien définie et associative, qu'il existe un élément neutre et que chaque élément admet un symétrique. Alors tout modèle de (L,S) est un groupe et réciproquement. Il est clair que de tels modèles existent. Donc le système formel (L,S) est consistant: si (E,J) est un modèle de (L,S) et A un énoncé de L, il ne peut pas se produire que l'interprétation J(A) soit à la fois vraie et fausse. Le système formel (L,S) constitue donc une théorie: la *théorie des groupes.*

On peut maintenant poser une question naturelle: les règles d'inférences formelles permettent-elles de prouver tous les énoncés satisfaits par les groupes? Autrement dit: ce qui peut être prouvé dans la théorie des groupes coïncide-t-il avec ce qui est vrai pour les groupes? Il est heureusement possible de donner des réponses rassurantes. Enonçons-les:

*Proposition 1:* Pour qu'un système formel du premier ordre soit consistant, il faut et il suffit qu'il admette un modèle (ensembliste).

*Proposition 2:* Soit (L,S) une théorie. Les théorèmes de (L,S) sont exactement les énoncés qui sont satisfaits dans tout modèle de (L,S).

Ces deux affirmations constituent ensemble ce qu'on appelle le *théorème de complétude de la logique du premier ordre,* publié d'abord par Gödel en 1930 puis, sous une forme renforcée, par Henkin en 1949. La première proposition montre que pour les notions mathématiques qui relèvent de la logique du premier ordre, leur existence est équivalente à la non-contradiction du système formel qui les décrit. Si l'on préfère, la production d'un système formel du premier ordre consistant a un caractère constructif. La deuxième proposition assure que, dans le même domaine, toute proposition mathématique vraie admet une preuve formelle. Ensemble, les deux propositions établissent que le formalisme du premier ordre est parfaitement adapté aux besoins d'une bonne partie des mathématiques, en réalité, de toutes les mathématiques classiques.

Au premier abord, ces résultats sont donc satisfaisants. Pourtant, ils deviennent un peu inquiétants lorsqu'on sait que les mathématiciens utilisent effectivement des systèmes formels du premier ordre convenant à la description des ensembles. Or depuis les critiques de Russell et de Cantor lui-même, on sait que les ensembles du mathématicien ne constituent pas *un* ensemble. Ils ne sont donc pas un modèle d'une théorie des ensembles. Tout porte à croire pourtant que ces systèmes formels sont consistants, mais personne n'est capable d'en décrire un vrai modèle.

Nous allons énoncer une autre assertion un peu surprenante qui va nous rapprocher de notre problème. Par les méthodes qui permettent d'établir le théorème de complétude de Gödel, on peut démontrer un résultat découvert par Tarski:

*Proposition 3:* Soit (L,S) un système formel du premier ordre vérifiant l'une au moins des deux hypothèses suivantes:

– $H_1$) (L,S) admet un modèle infini

– $H_2$) (L,S) admet des modèles finis dont le nombre des éléments est arbitrairement grand.

Alors, quel que soit l'ensemble F, il existe un modèle (E,J) de (L,S) tel que F soit une partie de E.

La conclusion de cette proposition implique que (L,S) admet des modèles arbitrairement grands, donc des modèles infinis et une infinité de modèles essentiellement distincts. Examinons deux conséquences étranges de ce fait.

Considérons le cas où (L,S) est la théorie des groupes. Essayons d'adjoindre à S de nouveaux énoncés T exprimant que ces groupes sont finis. (L,S+T) admettrait donc comme modèles tous les groupes finis. On sait bien qu'il en existe dont le nombre des éléments est arbitrairement grand. L'hypothèse $H_2$ étant satisfaite, il existerait un groupe infini satisfaisant les axiomes S+T. On constate que la logique du premier ordre est hors d'état de formaliser le *fini* en tant que tel. Si bizarre que cela paraisse, en mathématiques d'aujourd'hui, c'est le fini qui est indéfini.

Il résulte aussi du théorème de Tarski que tout système formel du premier ordre qui admet un modèle infini en admet une infinité d'autres essentiellement différents. Par suite, aucun de ces modèles ne peut être caractérisé exactement par un système formel du premier ordre. Il en résulte qu'aucun système d'axiomes du premier ordre ne saurait décrire spécifiquement **N**, pas plus que les nombres réels, les espaces euclidiens ou les ensembles. Si l'on se donne une liste – fût-elle infinie – d'axiomes du premier ordre consistants satisfaits par la collection des nombres naturels, il existe une infinité de modèles satisfaisant tous ces axiomes et personne ne peut dire lequel d'entre eux est l'authentique collection des nombres naturels.

Rappelons que les phénomènes que nous venons d'évoquer ne sont pas imputables à la logique du premier ordre. Celle-ci permet de prouver tout ce qui est démontrable. Ce sont des propriétés inhérentes au «fini» et au «nombre naturel» qui sont à l'origine de ces abominations.

## Présentation formelle de **N**

Nous venons de voir qu'aucun système formel du premier ordre n'est capable de caractériser **N**. Mais on peut se demander s'il en existe un, (L(**N**), S(**N**)), dont **N** soit un modèle en ce sens que toutes les propriétés connues en arithmétique soient des théorèmes dans (L(**N**), S(**N**)).

Il n'est pas utile d'entrer ici dans les détails techniques. L'idée est la suivante. On commence par introduire un langage formel L(**N**) comportant deux symboles de constantes, 0 et 1, et deux symboles de relations d'ordre 3 capables de désigner l'addition et la multiplication. L'ensemble S(**N**) des axiomes se présente ainsi. Un premier axiome est la conjonction des énoncés traduisant les propriétés algébriques élémentaires de l'addition et de la multiplication des nombres naturels. Toutes ces propriétés peuvent être démontrées à partir des «axiomes» de Peano. Il reste à inclure dans S(**N**) une traduction du principe d'induction complète. Mais au lieu de considérer *tous* les ensembles de nombres naturels, on ne prend que ceux qui sont déterminés par une formule A(x) de L(**N**). Pour cela on écrit que si A(0) et $A(x) \rightarrow A(x+1)$, alors $\forall x\, A(x)$. S(**N**) contient autant d'axiomes de cette forme qu'il y a de formules dans L(**N**).

Par sa construction même, ce système formel ne comporte que des axiomes satisfaits par toute collection de nombres vérifiant les «axiomes» de Peano. En outre, on peut montrer que toutes les propositions de l'arithmétique classique peuvent être énoncées et prouvées dans ce système. Il est donc admis que (L(**N**), S(**N**)), que nous abrégerons désormais en F(**N**), est un système formel convenable pour **N**. On reprochait aux «axiomes» de Peano d'être non-prédicatifs et d'avoir recours aux notions trop complexes d'ensemble et de sous-ensemble. Ces défauts sont bannis de F(**N**).

La seule question en suspens est la suivante: F(**N**) est-il consistant? Mais elle est d'une extrême gravité. Si oui, nous tenons une théorie des nombres naturels admettant une infinité de modèles distincts. Si non, les «axiomes» de Peano sont a fortiori inconsistants. Il est possible d'en déduire logiquement une contradiction telle que «0= 1» et la notion de nombre naturel devient inutilisable en mathématiques.

La question posée touche une propriété formelle d'un système formel. On est donc tenté de la traiter formellement. C'est alors que se présente un premier fait singulier. Les formules et, par suite, les preuves dans F(**N**) peuvent être numérotées systématiquement (on emploie ici une notion «naïve» de nombre naturel, le *numéral,* naïve en ceci qu'on ne fait jamais appel à *tous* les nombres naturels). On exprime que F(**N**) est consistant en disant que «quel que soit le nombre naturel n, il n'est pas le numéro d'une preuve de "0= 1"». Or, cette phrase peut être traduite sous forme d'un énoncé de F(**N**) que nous désignerons par «Consis F(**N**)». Nous sommes conduits à demander si cet énoncé admet une preuve dans F(**N**). Un deuxième fait étrange apparaît. Il est connu sous le nom de *théorème d'incomplétude de Gödel:*

*Proposition 4:* Si F(**N**) est consistant, il n'existe dans F(**N**) une preuve ni de «Consis F(**N**)», ni de sa négation.

Autrement dit, s'il est consistant le système formel du premier ordre F(**N**) est assez fort pour prouver tous les théorèmes de l'arithmétique classique et même pour énoncer qu'il est consistant; mais il ne l'est pas assez pour prouver qu'il est consistant. Cependant l'intuition nous dit que F(**N**) est non-contradictoire et plus, qu'il en est de même des «axiomes» de Peano, faute de quoi l'idée de nombre naturel s'évanouirait.

Nous voici parvenus à la situation suivante. Nous interrogeons l'intuition et le formalisme au sujet de la collection **N** des nombres naturels. Nous leur demandons: «Existe-t-elle?». L'intuition répond affirmativement; le formalisme répond qu'il ne peut ni le prouver, ni le réfuter. Nous leur demandons ensuite: «La collection **N** est-elle unique?». L'intuition répond à nouveau oui, sans hésiter. Mais le formalisme répond: «Certainement pas! Il existe une description formelle de la collection des nombres naturels à partir de laquelle on peut prouver tous les théorèmes classiques de l'arithmétique. Si on me donne un modèle convenant à cette description, je peux en exhiber une infinité d'autres, tous essentiellement distincts, où tous ces théorèmes sont aussi satisfaits».

Pour sortir de cet imbroglio, quatre voies sont ouvertes. Premièrement on peut rejeter à la fois intuition et formalisme, ce qui revient à se désintéresser des nombres naturels et de toutes les mathématiques classiques en général. Deuxièmement on peut faire confiance à l'intuition et rejeter le formalisme. C'est imprudent, car on a vu que l'intuition peut se tromper. C'est même incohérent: on ne peut pas récuser le formalisme en s'appuyant sur des théorèmes (Gödel, Tarski) établis grâce à lui. Cette observation vaut aussi pour la première éventualité. La troisième voie consiste à rejeter l'intuition au bénéfice du formalisme. Ce serait à la fois illusoire et inefficace puisque, pour en rester aux remarques que nous avons vues, le formalisme à lui seul est définitivement incapable de régler le problème de l'existence d'une collection des nombres naturels. Reste la quatrième voie, qui seule est compatible avec l'analyse qui précède. Elle consiste à prendre en charge les contributions de l'intuition et du formalisme, puis à tenter de les harmoniser.

Trois éléments sont en cause. Un *concept* désigné par la locution «la collection **N** des nombres naturels», l'*intuition* de **N** et un *système formel* F(**N**) pour **N**. Pris isolément, ni l'intuition, ni le système formel ne sont capables de saisir le concept **N**. On peut évoquer l'image suivante: représentons-nous **N** comme une pile verticale de disques égaux; l'intuition, observant cette pile de dessus, distingue nettement le premier disque de la pile et celui-là seulement; elle conclut à l'existence et l'unicité du disque; en revanche, le formalisme, regardant horizontalement, affirme qu'il ne saurait dire si les choses empilées sont des disques, mais qu'en tous cas, il y en a plusieurs. Comment concilier ces deux visions? Voilà comment se présente le problème de la nature de **N**.

## Attitudes des mathématiciens

Ce qui précède expose les faits dont on doit tenir compte quand on veut étudier la nature de **N**. A partir de là, il faut faire place à des interprétations extra-mathématiques.

Il est intéressant d'évoquer brièvement la manière dont les mathématiciens règlent pratiquement la question. La plupart d'entre eux affectent à l'égard des problèmes de fondements une indifférence complète. Ils considèrent les théorèmes de Gödel ou de Tarksi comme l'une des innombrables façons de scruter son ombilic. Ils en restent au point de vue de Peano. D'autres mathématiciens ressentent l'existence d'un système **N** plus simple que les autres, qu'ils baptisent *standard*; ils savent qu'il existe des systèmes différents, constituant des bizarreries plus ou moins plaisantes, qualifiées de *non-standard*. D'autres enfin admettent que la désignation **N** couvre une famille infinie de modèles distincts satisfaisant, tous, les théorèmes de l'arithmétique classique. Si l'on se donne l'un d'eux – nul ne sait comment! – on peut en évoquer un autre, tout différent, englobant le premier et qu'on pourra considérer comme non-standard.

Bien que la troisième attitude paraisse un peu plus raisonnable que les autres, l'appartenance à l'une ou l'autre de ces sectes n'a aucune importance tant qu'on reste dans le cercle des mathématiciens. En effet, ceux-ci ne s'accordent que sur les énoncés qui sont des théorèmes sur les nombres naturels. Nous avons vu que cela peut se faire sans équivoque au sein d'un système formel qui est admis sans ambiguïté. Il n'en est plus de même lorsqu'on s'adresse à des profanes, dans l'enseignement, par exemple.

## **N** considéré comme objet réel

Reprenons maintenant le problème de la nature de **N**. Placés face au concept de «collection des nombres naturels», l'intuition et le formalisme fournissent deux images différentes. Cette remarque n'a de signification que s'il existe quelque chose qui garantisse la convergence de leurs visées. Le terme de «chose», qui évoque l'idée de *réalité*, d'objet réel, est-il justifié?

Je me réfère à une notion de réalité plutôt naïve. Un objet peut être réel: la plume dont je me sers maintenant, le soleil, Rembrandt le peintre. Un autre objet peut être une fiction, une illusion, un fantasme: l'horizon, un polyèdre régulier à quatorze faces, Madame Bovary. Il est alors dénué de toute réalité, sans nuance intermédiaire. Un objet réel se révèle à moi par trois caractères:

- *l'identité:* Il doit être distinct et reconnaissable. Pratiquement il existe même une procédure applicable permettant à des observateurs différents de l'isoler de tous les autres objets. Lorsque j'évoque l'automobile portant à telle date, dans tel pays, tel numéro officiel, je donne des éléments grâce auxquels cette voiture peut être distinguée de tout autre objet.
- *l'autonomie:* Une fois identifié, l'objet réel reste indépendant de celui qui l'observe. Il n'est pas enfermé dans la formule qui permet de le reconnaître. Les données relatives à la voiture de tout à l'heure ne permettent ni de deviner sa puissance, ni de lui en attribuer une arbitrairement.
- *l'inépuisabilité:* L'observateur, à son tour, reste indépendant à l'égard de l'objet réel. Il n'existe pas de borne aux interrogations pertinentes auxquelles l'objet réel peut être soumis, autrement dit aux rapports susceptibles d'exister entre lui et d'autres objets. En revanche on pourrait, à la rigueur, dresser une liste des données attribuées par Flaubert à Mme Bovary. Si cette liste ne contient pas de renseignements sur la

coqueluche que son héroïne a contractée ou non dans son enfance, il n'existe définitivement aucun moyen d'en avoir le cœur net.

Si grossière que soit la notion de réalité évoquée ici et si lacunaires les caractères qui lui sont assignés, il est surprenant de constater avec quelle efficacité ils s'appliquent au monde matériel qui nous entoure, aux choses et aux personnes apparaissant en Histoire, dans les œuvres de fiction ou dans les rêves.

Les critères de réalité ci-dessus conviennent-ils à la collection **N** des nombres naturels? La question ne se pose que si la notion générale de nombre naturel a un sens, ce dont personne ne doute sérieusement. L'identification de **N** est alors assurée par la donnée du système formel considéré comme consistant, F(**N**). L'autonomie est garantie par le fait que les énoncés vrais pour les nombres naturels ne sont généralement ni évidents, ni arbitraires. On peut même établir formellement qu'il n'existe aucune règle raisonnable fournissant la liste des énoncés vrais pour les nombres naturels, ni leur preuve éventuelle. Enfin l'inépuisabilité de **N** est exprimée par la proposition 3 (Tarski). Il est toujours possible d'adjoindre à F(**N**) de nouveaux symboles de relations et de nouveaux axiomes, de sorte que le nouveau système formel obtenu soit satisfait par certains modèles de F(**N**) et pas par d'autres. Ce système formel possède une collection de théorèmes strictement plus grande que celle de F(**N**). Il admet à son tour une infinité de modèles. Cette opération peut être répétée indéfiniment et d'une infinité de manières différentes.

On constate que **N** satisfait d'une façon particulièrement stricte aux conditions qui me permettent d'affirmer qu'un objet est réel. Si l'on accepte les principes que j'ai posés à propos de la notion d'objet réel, les propositions 1 à 4 conduisent à quelques conclusions que nous allons énoncer.

1. Le concept de «collection **N** des nombres naturels» désigne un objet réel. Cet objet n'admet aucune manifestation matérielle. Il est donc un *objet (réel) de pensée.*

2. **N** n'apparaît pas au terme d'une construction pas à pas, à partir d'objets réels élémentaires (atomiques). En particulier, l'énumération 0, 1, 2,... etc. n'épuise pas **N**. **N** surgit au moment où une intuition et un formalisme convenables se nouent sur le concept de nombre naturel. Elle résulte donc d'un acte de pensée spécifique que nous appellerons l'*acte de fondation* de **N**.

Cette terminologie, sans doute maladroite, est choisie afin de mettre en évidence que la recherche des fondements de **N** ne conduit pas, comme on s'y attend, à des matériaux de base indécomposables, associés ensuite méthodiquement pour construire **N**. Au contraire, **N** apparaît tout armée à la suite d'un acte de pensée irréductible portant sur des données dénuées jusque là de cohérence et de signification.

3. Les conclusions précédentes s'étendent aux notions qui peuvent être construites ou décrites à l'aide des nombres naturels telles que les nombres réels, la géométrie euclidienne. Elles valent aussi pour les ensembles dont la situation formelle est très semblable à celle de **N**. Il est vrai que certaines structures générales, comme celle de groupe, ont un statut formel beaucoup plus simple et qu'en conséquence ils ne montrent pas les mêmes aspects paradoxaux. Mais ils ne présentent d'intérêt que lorsqu'on les emploie comme outils pour l'étude des notions dérivant des nombres naturels et des ensembles.

Par suite, les mathématiques sont la science d'un secteur de la réalité constitué par des objets de pensée identifiables par des systèmes formels.

## *II. Quelques conséquences*

Les faits rapportés précédemment et les interprétations que nous en avons tirées permettent d'éclairer la nature propre des mathématiques, leurs relations avec les autres sciences, leur situation face à la philosophie, la psychologie et l'éducation. Nous nous proposons de toucher quelques-uns de ces thèmes, à titre d'exemples.

*Mathématiques pures – mathématiques appliquées.* – Il est commun d'opposer mathématiques pures et mathématiques appliquées. La pureté évoquée est d'ailleurs tout affective, en général. Elle traduit pour les uns l'amour désintéressé de la vérité scientifique; pour d'autres, un manque total de sens pratique. Il est tout aussi banal d'affirmer qu'il est impossible de distinguer entre mathématiques pures et appliquées. Cette opinion est proche de celle selon laquelle les mathématiques seraient une science sans objet propre. Le mathématicien serait une manière de souffleur de verre dont les productions ne trouvent un sens qu'au service des autres sciences ou techniques. Nous avons vu, au contraire, que les mathématiques étudient un secteur très spécifique de la réalité non matérielle. Leur critère de réussite est une meilleure connaissance de certains objets réels de pensée. Pour les mathématiques appliquées, en revanche, le succès se mesure par l'adéquation d'un objet mathématique à la description d'une situation «physique» donnée. Celui qui assimile une population de bactéries – qui ne peut prendre que des valeurs entières – à une fonction dérivable du paramètre temps ne se préoccupe que de l'excellence de ses prévisions. Il se désintéresse de la dialectique du continu et du discret qui est pourtant un thème constant des mathématiques. Il convient donc de distinguer mathématiques (pures) et mathématiques appliquées. Le fait qu'une même personne puisse alternativement les pratiquer les deux ne change rien à la chose.

*Mathématiques = science des systèmes formels?* – Nous avons vu que cette assimilation est valable, au moins en partie. En effet, les mathématiques sont la seule science dont les objets sont caractérisés par des systèmes formels. Deux mathématiciens ne peuvent s'entendre que sur les propriétés formelles des objets mathématiques. Jamais ils ne pourront savoir s'ils pensent au même modèle de **N**. Mais le formalisme seul ne saurait reconnaître les systèmes formels intéressants et, pour lui, tous les théorèmes se valent. C'est l'acte de fondation qui confère une signification à un objet identifié par un système formel. L'intuition distingue des théorèmes plus significatifs que d'autres. Elle les organise en un réseau fortement chargé symboliquement.

En un temps où l'opinion publique considère la science mathématique comme l'humble servante des autres sciences, il convient de rappeler qu'elle a un objet d'étude propre, caractérisé par la notion de système formel. En période «formaliste», en revanche, il faut insister sur le réalisme des mathématiques.

*Mathématiques et quantité.* – Le profane rapporte aux mathématiques tout ce qui est quantitatif. Il parle de la notion de temps «telle que nous la livrent les mathématiciens». Bien qu'on puisse douter que les mathématiciens soient capables de fournir une chose pareille, il semble acquis que les mathématiques sont la science de ce qui se mesure.

La mesure – au sens physique du mot – repose sur la possibilité de répéter une «unité» un nombre fini de fois, puis de recommencer avec une «sous-unité», etc. Cet «etc.» signifie qu'on réitère effectivement la manipulation un nombre de fois fini mais non précisé. La pauvreté de cette opération, qu'on peut confier même à une machine, a toujours semblé une tare. On s'est complu à opposer l'«esprit de finesse» à l'«esprit de géométrie».

L'assimilation des mathématiques à la science de la mesure exige au préalable celle de la collection **N** des nombres naturels à $\{0, 1, 2, ..., \text{etc.}\}$. Nous sommes en situation de critiquer cette manière de faire que, par gain de temps, nous avons employée au début de cet exposé. Dans tout modèle de F(**N**), et on sait qu'il en existe tant qu'on veut, on peut effectivement écrire les *numéraux*: 0, son successeur 1, puis 2, et quelques milliers d'autres. Mais ces numéraux ne constituent pas une totalité. Ils n'épuisent aucun modèle de F(**N**). Si, contre toute attente, on parvenait à écrire dans le langage formel de F(**N**) que les modèles ne doivent comporter rien d'autre que des numéraux, il existerait encore une infinité de candidats, selon le théorème de Tarski. On peut exprimer cela plus simplement en disant que «etc.» et «ainsi de suite» n'ont aucun sens mathématique.

Il en résulte que la compréhension de **N** transcende à la fois l'idée de mesure physique et la logique mathématique. Le phénomène s'accentue encore quand on passe aux nombres réels et aux ensembles, à cause de nouveaux phénomènes paradoxaux propres à ces notions. On a dit que la naissance de la topologie marquait l'avènement de la qualité en mathématiques. On constate que la qualité est inhérente aux notions mathématiques les plus élémentaires déjà.

*Mathématiques et rigueur.* – La rigueur est une notion assez confuse et fortement marquée affectivement. Elle peut être atteinte à des degrés divers. On considère habituellement que psychologie, biologie, chimie, physique, mathématiques forment une chaîne de disciplines de rigueur croissante. Un autre lieu commun veut que «la rigueur absolue n'existe pas», assertion assez amusante puisqu'elle se nie elle-même. Néanmoins, sous le rapport de la rigueur, les mathématiques semblent constituer un terme idéal vers lequel tendent toutes les autres sciences. Cette position en vue les expose à diverses critiques. Nous allons en évoquer brièvement quelques-unes parce qu'elles montrent les confusions dont les mathématiques sont l'objet.

On reproche aux mathématiques de fournir des résultats non rigoureux.

Ainsi on observe qu'elles ne sont pas capables de donner la valeur exacte du nombre $\pi$. «$3 < \pi < 4$» est considéré comme peu rigoureux, tandis que «$3{,}1 < \pi < 3{,}2$» est plus rigoureux. Sans doute s'appuie-t-on sur le fait que la deuxième assertion implique la première. Mais alors, il faudrait admettre que «$\pi < 3$» les dépasse toutes deux en rigueur puisque, en bonne logique, un énoncé faux permet de prouver tout énoncé. En réalité, les deux premiers énoncés sont valides l'un et l'autre et pas plus l'un que l'autre. Le fait que l'un d'eux soit plus intéressant que l'autre et qu'on puisse le vérifier facilement est accidentel, comme on le voit lorsqu'on les compare à l'énoncé «$\pi$ est irrationnel». A aucun moment la rigueur n'est en cause. Mais le préjugé sous-jacent à ce genre de critiques est que les énoncés mathématiques sont tous quantitatifs, qu'ils sont éventuellement entachés d'erreurs et que la mesure de cette erreur détermine le degré de rigueur.

La rigueur des mathématiques est mise en cause dans l'expression des lois naturelles. «La loi de Mariotte n'est qu'approximative», «les mathématiques sont impuissantes à rendre compte de tel phénomène», dit-on. Il est clair cependant que ce ne sont pas les mathématiques qui sont atteintes, mais l'adéquation d'un couplage entre un système «physique» et un système mathématique. Celui qui prend la responsabilité de décrire, voire d'expliquer un phénomène non-mathématique à l'aide d'un modèle mathématique court un risque. Comme l'écrivent les mathématiciens Crowell et Fox: «Mathematics never proves anything about anything except mathematics». Le reproche fait aux mathématiques se fonde sur la croyance que celles-ci n'ont pas d'autre raison d'être que de fournir des images et des explications de la réalité matérielle.

Une critique plus judicieuse a sa source dans l'observation suivante: les démonstrations présentées par les mathématiciens sont toujours lacunaires; en conséquence, elles peuvent être plus ou moins rigoureuses. Pour mettre les choses au point, il convient de rappeler que la logique du premier ordre couvre les besoins des mathématiques classiques. Or dans une théorie du premier ordre, tout théorème admet une preuve formelle. Dire qu'une preuve est rigoureuse est dénué de sens. Toutefois la présentation complète d'une preuve formelle dépasserait les capacités d'écriture et d'attention de n'importe qui, même pour des théorèmes très élémentaires de géométrie. Pratiquement une démonstration mathématique est une suite d'assertions telles que le passage formel de l'une d'elles à la suivante soit évident ou d'un type connu. Une partie de l'apprentissage mathématique consiste justement à reconnaître ces chaînons élémentaires. En fait toute démonstration mathématique vise deux buts: convaincre qu'il existe une preuve formelle du théorème énoncé et faire comprendre un phénomène mathématique. (On retrouve naturellement la dialectique de l'intuition et du formalisme.) Elle doit néanmoins réaliser un compromis entre ces deux intentions. Un abus de détails logiques fait perdre de vue la réalité mathématique. Un excès d'observations heuristiques peut faire douter de la validité du théorème à établir. Cette question mériterait des développements. Bornons-nous à remarquer qu'on peut trouver, sur un même sujet, des exposés mathématiques plus ou moins rigoureux, c'est vrai. Mais la pleine rigueur est atteinte lorsqu'un mathématicien moyen est capable, s'il le désire, de restituer la preuve complète de n'importe quel chaînon figurant dans les démonstrations. Cela ne touche en rien une prétendue rigueur des mathématiques et il serait faux de croire que le progrès des mathématiques va dans le sens d'une rigueur accrue. Ajoutons que ce qui précède suppose connus les théorèmes de complétude de Gödel qui datent de 1930. Cela n'a donc de sens que relativement au canon des mathématiques actuelles. On peut penser que les choses resteront en l'état quelque temps encore, mais il n'est pas impossible qu'un revirement de la pensée mathématique vienne un jour modifier la situation.

Une critique plus profonde encore a été adressée aux mathématiques. Leur prétendue rigueur résulterait de leur indépendance, c'est-à-dire de leur aptitude à se déterminer elles-mêmes, sans référence à une science extérieure. Or, a-t-on dit, le problème des fondements (des mathématiques) n'est pas résolu.

Il n'est pas possible de faire apparaître ici tous les développements que mérite cette question. Bornons-nous à une remarque: on ne peut pas interpréter les travaux de Gödel, de Tarski et d'autres comme un simple échec dans la tentative de résoudre le problème des fondements. Classiquement, le problème des fondements s'est posé comme la recherche de matériaux atomiques, de briques élémentaires à partir desquels il serait possible de construire mécaniquement tout l'édifice mathématique. Certains formalistes ont cru pouvoir établir que les nombres naturels ou les ensembles étaient ces éléments premiers. Le succès de ce projet aurait sans doute été la ruine des mathématiques classiques, monument élevé «à la gloire de l'esprit humain», et l'avènement d'un dogmatisme insupportable en mathématiques et dans les sciences qui en dépendent. Certains mathématiciens et philosophes imaginaient que l'échec souhaité se produirait lorsqu'une analyse plus poussée des nombres naturels et des ensembles conduirait à des notions plus fines qui, à leur tour, se révéleraient non élémentaires. Ils admettaient que cette descente infinie convergerait vers une sorte de vérité asymptotique. Le théorème d'incomplétude de Gödel fut salué par eux comme la faillite du formalisme.

Notons d'abord qu'il n'est vraiment pas possible de s'appuyer sur les théorèmes de Gödel pour rejeter l'étude et l'usage des systèmes formels. Il est même très remarquable qu'on soit parvenu, de l'intérieur, à montrer les pouvoirs et les limites de la logique du premier ordre. Songeons au succès que ce serait pour la physique si elle parvenait à prouver qu'il n'existe pas de particules élémentaires. En réalité, les théorèmes de complétude et d'incomplétude (Gödel, Tarksi), qui doivent être pris ensemble, montrent d'abord que **N** n'est pas une notion simple, sans ambiguïté, à partir de laquelle on peut construire mécaniquement l'édifice mathématique; et ensuite qu'aucune autre notion mathématique ne peut jouer ce rôle. Ils ruinent à la fois le projet des formalistes et celui des partisans de la descente infinie. A tous les niveaux, l'impuissance du formalisme et l'aberration de l'intuition restent les mêmes. On ne progresse vers rien, pas plus que ne s'approche de l'épuisement des nombres naturels celui qui récite: «Zéro, un, deux,...». En attribuant d'autorité aux «fondements» des mathématiques la forme d'atomes à partir desquels on pourrait construire systématiquement, provisoirement ou non, l'édifice mathématique, on ne se règle pas sur la nature des objets mathématiques. Ce qu'il convient d'étudier, c'est un acte de pensée spécifique, irréductible et inévitable, l'acte de fondation, opérant sur des concepts relativement complexes.

La dernière critique à laquelle nous nous arrêterons est encore plus fondamentale. Les mathématiques, dit-on, sont un langage construit à partir de la langue ordinaire, par laquelle s'introduit le manque de rigueur. Relevons d'abord qu'il faudrait administrer la preuve que les mathématiques sont bien un langage. Ce ne doit pas être plus facile que pour la chimie ou la psychologie. Comme elles, les mathématiques ont un objet d'étude propre, elles se donnent un jargon technique et elles se prêtent à des analogies. Une même question mathématique peut être présentée de dix manières différentes. Assimiler les mathématiques à un langage serait, à nouveau, croire à tort qu'elles élaborent des formules vides dont la signification serait fournie ultérieurement par d'autres instances. Il est vrai, en revanche, que les mathématiques sont d'abord présentées à partir de la langue ordinaire et qu'elles pourraient, en principe, l'être entièrement. Par parenthèse, on peut se demander si une telle chose est possible à partir d'une langue exotique, où, par exemple, n'existerait aucun terme pour désigner l'Arbre, mais un mot pour chaque arbre suivant l'espèce, l'âge et la disposition.

Les mathématiques sont-elles contaminées par l'imprécision de la langue ordinaire? Il semble qu'un phénomène intéressant joue en leur faveur. C'est celui des «creux sémantiques», selon une image que j'emprunte au mathématicien René Thom. Le champ sémantique d'un discours peut être comparé à un terrain accidenté. Formuler une assertion, c'est lancer une boule dans ce terrain. Il arrive que la boule aboutisse au fond d'un creux. Dans ce cas, la position finale de la boule ne change pas quand on modifie un peu sa trajectoire. Lorsque les creux sémantiques sont assez marqués, même un discours approximatif permet de transmettre un message précis. Cela se produit particulièrement quand celui-ci est impersonnel, quand il ne comporte que des données spatio-temporelles très simples ou encore quand les attributs mentionnés ne peuvent être que présents ou absents, sans nuance intermédiaire. C'est justement dans ce domaine que se déploie le discours mathématique à ses débuts. Par la suite il use d'un jargon qui est une autre manière de créer des creux sémantiques. Le fait est que, même si les mathématiciens s'opposent sur l'intérêt de telle ou telle théorie, ils sont toujours d'accord sur ce qu'est un énoncé correct et sur le sens à lui donner. Notons que l'image des creux sémantiques correspond certainement à un phénomène réel. Il est évident, en effet, que sur le chapitre de la rigueur, toute langue capable d'énoncer qu'elle n'est pas rigoureuse doit posséder un dispositif auto-correctif.

En résumé, il semble bien que l'idée de rigueur joue un rôle plutôt effacé en mathématiques. Les disciplines où la rigueur est essentielle – pensons aux sciences humaines – devraient éviter de démarquer les mathématiques sur ce point.

*Mathématiques et réalité.* – Ce thème inépuisable est très souvent abordé sous l'angle d'une opposition entre les fictions du mathématicien et le monde concret de la matière. Cette façon de voir constitue déjà une prise de position très tranchée à l'égard de la nature des objets mathématiques. Nous avons vu qu'il est au moins aussi «naturel» d'admettre que la réalité englobe également des objets de pensée. Le problème peut alors s'énoncer ainsi: «Existe-t-il entre le domaine des objets réels des mathématiques et celui des objets matériels des relations qui aient valeur d'explications?»

Deux données doivent être prises en compte. D'une part l'extraordinaire accord entre certaines situations mathématiques et certaines situations spatio-temporelles. Pensons à la géométrie euclidienne ou à la loi de la gravitation newtonienne. D'autre part, l'étrange désaccord entre ces mêmes situations. Les objets matériels s'obstinent à ne jamais suivre sérieusement les schémas mathématiques. Les efforts de conciliation entre ces faits contradictoires s'échelonnent entre deux positions extrêmes: l'idéalisme mathématique pur et le réalisme mathématique pur. La plupart des mathématiciens se placent – et souvent même, oscillent – entre les deux.

L'idéalisme mathématique extrême donne l'initiative à la pensée. Celle-ci, semblable à un homme qui braque une lampe dans une forêt obscure et inconnue, projette un éclairage mathématiquement organisé. Elle reçoit en retour une image lacunaire qu'elle complète de façon à la rendre mathématiquement cohérente. Elle est amenée à forger pour cela de nouveaux outils de pensée (par exemple, la masse ou la résistance électrique se présentent comme des facteurs de proportionnalité) et des hypothèses à partir desquels elle projette de nouveaux éclairages. On ne dit rien d'une réalité ultime, qui serait inatteignable. La seule réalité reconnue coïncide avec l'image obtenue à chaque instant. Elle est une construction indéfinie de la pensée.

Cette attitude est très cohérente. Elle rend bien compte de l'accord entre les mathématiques et la réalité puisqu'on ne découvre que ce qui est compatible avec l'éclairage projeté. Leur désaccord s'explique tout aussi bien: on n'emploie jamais toutes les mathématiques possibles. Un modèle mathématique n'est remis en question que lorsqu'on devine par quoi on pourra le remplacer. Les objections qu'on peut opposer à cette conception sont avant tout d'ordre philosophique. Il est difficile, en effet, d'être idéaliste jusqu'au bout. Si l'on refuse l'existence d'un anneau de Saturne absolument réel, comment sait-on que les diverses images présentées sous le nom d'anneau de Saturne concernent la même chose et que notre connaissance progresse de l'une à l'autre? Mais il existe au moins une difficulté d'ordre mathématique. Comment expliquer que la réalité matérielle soit foncièrement finie (il n'existe aucun dispositif matériel capable de décider si une collection d'objets – atomes, étoiles – est finie ou non) alors que les notions mathématiques à partir desquelles elle est construite sont essentiellement infinies?

Le réalisme mathématique extrême admet la coexistence d'une réalité mathématique et d'une réalité matérielle et, selon lui, la première façonne la deuxième. Les lois mathématiques ne sont pas des modèles, ce sont des explications. Le mathématicien ne crée rien, il découvre. Il prend conscience de ce qu'il savait sans s'en douter. C'est pourquoi les mathématiques révèlent parfois des lacunes, rarement des erreurs. L'accord entre mathématiques et réalité matérielle s'ensuit naturellement. Quant à leur désaccord, il s'explique par l'imperfection de l'homme de science.

Cette conception est donc aussi très cohérente. Mais elle soulève à son tour des objections. Remarquons par exemple que les mathématiques dont il est question ici sont une construction propre à la culture occidentale. Si les mathématiques étaient logées au cœur du réel, elles devraient se manifester dans toutes les représentations mentales de l'univers un tant soit peu cohérentes, et il n'en manque pas hors de la pensée occidentale. On peut aussi soulever une difficulté liée à la nature même des objets mathématiques. Considérons un système formel du premier ordre (L,S) convenant aux nombres réels et que nous supposerons consistant. On peut trouver un énoncé A compatible avec (L,S) et tel que sa négation, $\neg$ A, soit aussi compatible avec (L,S). L'axiome dit «du continu» en est un exemple. Alors, (L,S + A) et (L,S + ($\neg$ A)) sont des systèmes formels consistants. Soit R un modèle du premier et R′ un modèle du second. R et R′ sont deux modèles acceptables pour les nombres réels, mais R satisfait A et R′ ne le satisfait pas. On peut alors poser la question alternative suivante: comment deux systèmes de nombres réels contradictoires peuvent-ils façonner la même réalité matérielle? ou alors, si l'un d'eux seulement façonne cette réalité matérielle, quelle est la situation de l'autre?

Les mathématiques seules ne permettent pas de trancher sur de pareils sujets. Mais elles fournissent l'occasion de tester certaines hypothèses philosophiques. Elles apportent à la philosophie une sorte de laboratoire grâce auquel certains objets de pensée deviennent concrets. Il serait intéressant, par exemple, d'utiliser **N** pour mettre à l'épreuve les notions de compréhension et d'extension d'un concept, ou les propriétés respectives des individus et des classes.

*Mathématiques et formation de la personne.* – Bien des questions changent d'aspect lorsqu'on prend en considération les remarques faites ici sur la nature des objets mathématiques. On pourrait étudier, par exemple, les rapports entre mathématiques et abstraction. L'infini mathématique tel qu'il se manifeste dans **N** est-il abstrait? Si oui, à partir de quoi? Il serait intéressant aussi d'aborder la psychologie du mathématicien. Pourquoi tel énoncé est-il considéré comme significatif? Certaines situations mathématiques ont-elles une valeur symbolique? Pourquoi les mathématiciens sont-ils si réservés sur la nature de leur activité? Mais il existe un vaste domaine où il est impératif de tenir compte de ce qui est quant aux objets mathématiques les plus importants, c'est celui de l'enseignement. La majorité des écoliers est astreinte à une formation en mathématiques élémentaires. On pourrait supposer que tous les auteurs des manuels ou des plans d'études destinés à ces enfants sont dûment avertis des étranges complications présentées par les nombres naturels et les ensembles. Or c'est rarement le cas. La plupart d'entre eux considèrent les nombres naturels comme une notion assez simple pour qu'on puisse demander aux élèves de la construire. On leur suggère même de le faire à partir des ensembles finis, ce qui est aussi profond que de définir les arthropodes à partir des articulés. Il est évidemment intéressant d'étudier l'apparition de l'idée de nombre naturel chez l'enfant, comme on peut le faire pour la masse ou le champ magnétique. Mais il faut renoncer à découvrir ainsi quoi que ce soit de sérieux sur la notion même de nombre naturel, pas plus que sur la masse ou le champ magnétique. Ce sont là pourtant des recherches très à la mode aujourd'hui.

Limitons-nous à un aspect très particulier de l'enseignement et examinons ce qu'on peut attendre des mathématiques pour la *formation de la personne.* J'entends par là l'acquisition des moyens qui permettent à chacun de se situer dans le monde culturel qui l'entoure et d'y penser son action. Présentons un tableau un peu caricatural de la civilisation dite avancée d'aujourd'hui. Il y règne une religion plus profondément enracinée que toutes les autres, que j'appellerai le *matérialisme sommaire*. Les dogmes en sont très simples: tout ce qui est, est strictement matériel et spatio-temporel; le reste n'est qu'illusion, fantasme, abstraction en un mot.

Le catéchisme en est transmis par l'école qui «ne doit pas s'isoler dans l'abstraction, mais se mettre au service de la société» et par une classe d'intellectuels qui ont honte d'une pensée où ils voient le contraire de l'action. Cette religion est minée de l'intérieur. On pourrait attendre, en effet, que les discours qu'elle produit soient généralement ancrés dans le concret, évoquant en termes sensibles des objets palpables. Il n'en est rien. Par un singulier retournement, il est indécent aujourd'hui d'appeler une chose par son nom. On peut entendre un exposé sur les maladies tropicales sans que soit prononcé le nom d'un pays, d'une maladie, d'un organe ou d'un traitement, mais où l'on a enfilé des formules convenant à n'importe quoi. Sans doute craint-on, en parlant d'une manière appropriée de choses tangibles, de se trouver face à l'horreur diabolique d'une réalité non matérielle. Aussi n'a-t-on jamais autant soulevé de problèmes de langage. La sagesse ultime en ce domaine est de confesser que le vrai contenu d'un message, c'est ce qui reste quand on en a ôté le contenu. Quant à l'information, d'autant plus obsédante que le mot est vidé de son sens, elle se réduit à réunir une myriade de données insignifiantes traitées par une machine inconnue.

On peut exprimer cela d'une façon apparemment moins outrée en reprenant la formule de Lévy-Bruhl qui, comparant les primitifs et les civilisés, notait: «L'Européen pratique l'abstraction presque sans y penser.» Le terme d'abstraction ne désigne pas ici l'acte d'abstraire, mais l'emploi des mots faits pour penser. Ainsi, contrairement aux primitifs, nous sommes entraînés dès l'enfance à nous servir, sans y penser, de mots faits pour penser. Toutes les conditions sont réunies pour engendrer le désarroi collectif et le délire verbal.

L'initiation aux mathématiques donne l'occasion d'employer à propos et consciemment des mots pour des choses matérielles et d'autres pour des objets réels de pensée, autrement dit de faire de l'abstraction en y pensant. Cette véritable introduction à la «méta-physique» est accessible à chacun, car elle n'exige qu'un apport culturel et un effort minimaux. A un niveau plus élevé, les mathématiques permettent de découvrir qu'il est possible, en appliquant avec discernement des règles simples et raisonnables, de déboucher sur une fantaisie illimitée. Nous avons essayé de le suggérer à propos des nombres naturels. Il existe des exemples beaucoup plus démonstratifs encore, mais ils portent sur des notions mathématiques trop élaborées pour qu'il soit possible de les présenter ici.

En dehors de quelques secteurs isolés, considérés avec condescendance comme de «simples variétés d'amusements», la science s'est trop souvent mise au service du matérialisme sommaire. Non seulement les mathématiques ont été l'agent d'un réductionnisme analytique qui appauvrit la réalité, qui substitue le savoir à la compréhension et l'information au savoir, mais elles lui ont encore servi d'alibi. La loi physique devient simplement une collection de données et les mathématiques un langage pour l'exprimer. Les systèmes mathématiques étant considérés comme dépourvus de toute substance propre, l'existence d'une loi exprimée mathématiquement dispense de chercher une explication. La présence au cœur des notions mathématiques les plus usuelles de faits inconfortables dérange ces conceptions simplistes, comme nous avons tenté de le faire voir. C'est pourquoi il est permis de ranger les étranges découvertes faites au cours du dernier semi-siècle sur la nature des objets mathématiques parmi les événements culturels majeurs de ce temps.