Zeitschrift: Studia philosophica : Schweizerische Zeitschrift für Philosophie = Revue suisse de philosophie = Rivista svizzera della filosofia = Swiss journal of philosophy

Herausgeber: Schweizerische Philosophische Gesellschaft

Band: 7 (1947)

Artikel: Die mathematische Logik von Leibniz

Autor: Dürr, Karl

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-883470

Die mathematische Logik von Leibniz

Von Karl Dürr

§ 1. Leibniz darf als einer der Begründer der mathematischen Logik bezeichnet werden. Dies ist der Gesichtspunkt, von dem aus ich hier einen Beitrag zur Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen geben möchte.

§ 2. Die logischen Schriften von Leibniz waren der gelehrten Welt während langer Zeit kaum bekannt.

Leibniz hat nur eine der Schriften, in denen er logische Probleme behandelt, selbst veröffentlicht, nämlich das Jugendwerk «Dissertatio de arte combinatoria» (Leipzig 1666).

Nach dem Tode von Leibniz sind seine logischen Schriften in langen Zeitabständen zur Veröffentlichung gelangt.

Wir heben hier die Tatsache hervor, daß in der Gesamtausgabe der philosophischen Werke von Leibniz, die Johann Eduard Erdmann besorgt hat, und die 1840 erschienen ist, eine erste Auswahl aus den logischen Schriften Leibnizens geboten war.

Es ist auch zu sagen, daß diese Schriften, soweit sie vorlagen, zunächst nur wenig beachtet wurden, und daß man erst geraume Zeit nach der Veröffentlichung der einzelnen Schriftstücke dazu kam, ihren tieferen wissenschaftlichen Gehalt zu verstehen.

Einen ersten Versuch, die Logik von Leibniz nach ihren Quellen darzustellen, machte *Franz B. Kvet*, der 1857 eine Monographie «Leibnitz'ens Logik» veröffentlicht hat.

Als Quelle diente ihm die eben genannte Ausgabe Erdmanns.

In dem Kapitel, das betitelt ist «Leibnitzens philosophischer Calcül», gibt er Auszüge aus zwei bedeutsamen Schriftstücken, die in jener Sammlung enthalten sind, und im Anschluß an diese Auszüge gibt er eine Kritik der von Leibniz entwickelten Theorie.

Wir können hier auf diese Kritik nicht eingehen; doch können wir nicht umhin, zu bemerken, daß diese Kritik zeigt, daß der Verfasser der Monographie noch nicht zu einem tieferen Verständnis der Theorie, die er behandelt, gelangt war.

Eine Wandlung in der Würdigung der Logik von Leibniz bahnte sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts im englischen Kulturkreis an. Es ist bekannt, daß hier insbesondere durch die erfolgreichen Forschungen von George Boole eine neue Form der Logik, die Beachtung fand, zur Entwicklung kam; dadurch wurde das Interesse für ältere Versuche verwandter Art geweckt. Es darf in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen werden, daß *John Venn* in dem Werke «Symbolic Logic» (1881) vielfach Stellen logischer Schriften von Leibniz, die in der Ausgabe Erdmanns zu finden waren, berücksichtigt und in modernem Sinne gedeutet hat.

Über diese Ansätze hinaus gelangte die Leibniz-Forschung zu Anfang des 20. Jahrhunderts durch die Arbeiten des Franzosen *Louis Couturat*. In dem großen Werke « La logique de Leibniz d'après des documents inédits » (1901) hat Couturat das gesamte Schrifttum Leibnizens, soweit es für die theoretische Logik von Bedeutung ist, vom Standpunkt der modernen Logik aus beleuchtet; auch hat er eine Fülle logischer Schriften Leibnizens, die bis dahin unveröffentlicht geblieben waren, in der Sammlung « Opuscules et fragments inédits de Leibniz » (1903) herausgegeben.

Heute, darf man sagen, ist es unbestritten, daß mit Leibniz in der Geschichte der Logik eine neue Epoche beginnt. Zum Beweis dafür sei erwähnt, daß in der von Alonzo Church verfaßten Bibliographie der symbolischen Logik, die ein chronologisch geordnetes Verzeichnis der einschlägigen Literatur gibt, die logischen Schriften Leibnizens an erster Stelle genannt sind.

§ 3. Ich möchte hier den Versuch machen, in engem Anschluß an die Forschungen von Couturat die Logik Leibnizens zu beleuchten und eine neue Deutung seiner Theorie zu geben.

§ 4. Um das Zitieren von Stellen, die den von uns benutzten Werken angehören, zu erleichtern, führen wir zur Bezeichnung dieser Werke einfache Zeichen ein; wir stellen die Erklärungen dieser Zeichen hier zusammen.

CL = La logique de Leibniz d'après des documents inédits par Louis Couturat (Paris 1901)

CO = Opuscules et fragments inédits de Leibniz extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis Couturat (Paris 1903)

GL = Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Herausgegeben von C. J. Gerhardt. Siebenter Band (Berlin 1890)

PM = Principia mathematica by Alfred North Whitehead and Bertrand Russell Volume I (Cambridge 1. Auflage 1910, 2. Auflage 1925).

§ 5. Wir gehen von der Feststellung aus, daß für Leibniz die Gesamtheit der Wissenschaften ein einheitliches Ganzes, eine Art «Körper» bildet (vgl. CO S. 512 und S. 530—531), und daß nach der Auffassung Leibnizens das methodische Verfahren in allen Wissenschaften im wesentlichen dasselbe ist. Es liegt darin insbesondere der Gedanke, daß in allen Disziplinen Beweise in derselben Weise zu führen sind. Leibniz ist sich dessen wohl bewußt, daß strenge Beweise bis dahin fast nur im Gebiete der mathematischen Wissenschaften zu finden sind; aber er ist davon überzeugt, daß es prinzipiell möglich ist, in jeder Wissenschaft derartige Beweise zu führen.

Seit den Zeiten seiner Jugend bis ins hohe Alter hinein war Leibniz darum bemüht, den Gedanken einer enzyklopädischen Darstellung der Wissenschaften zu verwirklichen. In einem Schriftstück, das aus dem Jahre 1679 zu stammen scheint, findet sich eine ausführliche Disposition des geplanten Werkes (vgl. GL S. 49—51). Diese Disposition läßt erkennen, daß besondere Abschnitte der Enzyklopädie Themen gewidmet sein sollten, die in folgender Weise bezeichnet sind:

1. Elemente der ewigen Wahrheit, und von der Kunst, in allen Disziplinen Beweise zu führen wie in der Mathematik;
2. von einem neuen Kalkül, mit dessen Hilfe alle Meinungsverschiedenheiten unter denen, die sich darauf geeinigt haben, behoben werden können (vgl. GL S. 49).

Es ist damit die Idee eines allgemeinen oder, wie Leibniz auch sagt, eines logischen Kalküls andeutungsweise bestimmt.

§ 6. Leibniz hat verschiedene Systeme des logischen Kalküls entwickelt. Es scheint uns zweckmäßig, hier zwei Hauptgruppen zu unterscheiden.

Zur *ersten* Gruppe zählen wir die älteren Versuche, die von dem Gedanken ausgehen, es sei für den Fortschritt der menschlichen Erkenntnis förderlich, daß jedem Begriff eine Zahl zugeordnet werde. Da Leibniz selbst die den Begriffen zugeordneten

Zahlen die charakteristischen Zahlen der Begriffe oder Ideen nennt (vgl. GL S. 187), so sei es uns erlaubt, diese Versuche hier kurz die Systeme der charakteristischen Zahlen zu nennen.

Zur *zweiten* Gruppe zählen wir die neueren Versuche, in denen von den charakteristischen Zahlen der Begriffe nicht mehr die Rede ist.

Wir werden hier nur kurz eingehen auf die Versuche der ersten Gruppe, die mit der modernen mathematischen Logik kaum etwas gemein haben, und uns dafür eingehender befassen mit den späteren Versuchen, die für die Geschichte der Logik weit bedeutsamer sind.

§ 7. Systeme der charakteristischen Zahlen sind entwickelt in Schriftstücken, die im April des Jahres 1679 enstanden sind und die erst in Couturats Sammlung der kleinen Werke und Fragmente (vgl. oben § 2) veröffentlicht wurden.

Unter diesen Versuchen sei hier der erste kurz beleuchtet.

Es wird festgesetzt, daß, wenn der Begriff *a* aus den Begriffen *b* und *c* zusammengesetzt ist, dann dem Begriff *a* die Zahl zugeordnet wird, welche das Produkt der beiden Zahlen ist, die den Begriffen *b* und *c* zugeordnet sind (vgl. CO S. 42).

Daraufhin werden für die vier Formen «kategorischer» Propositionen oder Aussagen folgende Kriterien der Wahrheit aufgestellt:

1. eine allgemein bejahende Aussage ist dann und nur dann wahr, wenn die Zahl, welche ihrem Subjektsbegriff zugeordnet ist, teilbar ist durch die Zahl, welche ihrem Prädikatsbegriff zugeordnet ist;

2. eine partikulär bejahende Aussage ist dann und nur dann wahr, wenn entweder die Zahl, welche ihrem Subjektsbegriff zugeordnet ist, teilbar ist durch die Zahl, welche ihrem Prädikatsbegriff zugeordnet ist, oder die Zahl, welche ihrem Prädikatsbegriff zugeordnet ist, teilbar ist durch die Zahl, welche ihrem Subjektsbegriff zugeordnet ist;

3. eine allgemein verneinende Aussage ist dann und nur dann wahr, wenn weder die Zahl, welche ihrem Subjektsbegriff zugeordnet ist, teilbar ist durch die Zahl, welche ihrem Prädikatsbegriff zugeordnet ist, noch die Zahl, welche ihrem Prädikatsbegriff zugeordnet ist, teilbar ist durch die Zahl, welche ihrem Subjektsbegriff zugeordnet ist;

4. eine partikulär verneinende Aussage ist dann und nur dann wahr, wenn die Zahl, welche ihrem Subjektsbegriff zugeordnet ist, nicht teilbar ist durch die Zahl, welche ihrem Prädikatsbegriff zugeordnet ist
(vgl. CO S. 42—43).

Diese vier Regeln, erklärt Leibniz, genügen, um die ganze Logik, soweit sie von der Form der Aussagen und Syllogismen handelt, auf einmal zu überblicken (vgl. CO S. 43).

Wir haben hier schon ein abgeschlossenes System vor uns und dürfen darum den Versuch wagen, hervorzuheben, worin das Wesentliche dieses Systems zu sehen ist; das gibt uns Anlaß zu folgender Bemerkung:

Die Kriterien der Wahrheit, die Leibniz hier aufstellt, sind solcher Art, daß die Entscheidung darüber, ob eine gegebene Aussage als wahr oder als falsch zu gelten hat, auf Grund einer arithmetischen Rechnung zu gewinnen ist. Es handelt sich hier eigentlich nicht um die Begründung eines neuen Kalküls, sondern darum, einen schon bestehenden Kalkül zur Lösung neuer Aufgaben fruchtbar zu machen.

§ 8. Wir wenden uns von da zur Betrachtung der neueren Versuche, die die zweite Hauptgruppe bilden.

Unter Benutzung der Ergebnisse, die man den Forschungen Couturats verdankt, unterscheiden wir hier drei Systeme und heben hervor, daß diese drei Systeme der Entstehungszeit nach auf einander folgen.

§ 9. Das *erste* System ist dargestellt in einem Schriftstück, dem man den Titel «Specimen calculi universalis» (Beispiel eines allgemeinen Kalküls) geben kann (vgl. GL S. 218).

Dieses Schriftstück hat durchaus den Charakter einer Studie, da Leibniz mehrfach neu einsetzt und verschiedene Fassungen der Prinzipien des Systems nebeneinander bestehen läßt.

§ 10. In diesem System werden kleine Buchstaben, wie «*a*», «*b*» usw. als Variable verwendet.

Die Variablen werden als «termini» (Begriffe) bezeichnet (vgl. GL S. 223); wir deuten dies dahin, daß die Werte der Variablen Begriffe sind.

Beliebig viele Variable können neben einander gestellt werden; d. h. es lassen sich die Zeichenreihen:

«*ab*», «*abcd*» usw.

bilden, und diese Symbolkomplexe heißen gleich den einfachen Zeichen Begriffe (vgl. GL S. 223).

Gleich zu Anfang des ganzen Schriftstückes heisst es:

«eine allgemein bejahende Aussage wird von uns hier so ausgedrückt werden: *a* est *b*» (vgl. GL S. 218).

Wir nennen den Symbolkomplex:

(1) *a* est *b*

die fundamentale Satzform.

Die fundamentale Satzform ist eine Zeichenreihe bestimmter Struktur.

Es läßt sich sagen, daß eine Zeichenreihe dieser Struktur als ein sinnvoller oder syntaktisch richtig gebildeter Ausdruck anzusehen ist. Dabei hat man sich zu denken, daß, wenn in (1) für «*a*» und «*b*» irgendwelche Buchstaben oder Komplexe von Buchstaben eingesetzt werden, wieder ein sinnvoller Ausdruck entsteht.

Wir heben noch hervor, daß das Zeichen «est» (ist), das in der Zeichenreihe (1) an zweiter Stelle erscheint, als eine Konstante anzusehen ist.

§ 11. In den Bemerkungen, die Leibniz dem ursprünglichen Entwurf nachträglich beigefügt hat, finden sich Festsetzungen, die den Gebrauch der Variablen betreffen. Durch diese Festsetzungen wird bestimmt, daß es erlaubt ist, einen Buchstaben für einen andern Buchstaben und für einen Komplex von Buchstaben einzusetzen (vgl. GL S. 224).

§ 12. Es werden Sätze aufgestellt, von denen die einen den Charakter von Axiomen haben und die andern bewiesen werden; dabei ist zu sagen, daß es vorkommt, daß ein und derselbe Satz in einem Teil des Schriftstückes als beweisbares Theorem und in einem andern als Axiom auftritt (vgl. GL S. 223, Z. 15—19 und S. 224, Z. 29—32).

§ 13. Es sei hier auf zwei Sätze hingewiesen, die gleich zu Anfang des ganzen Schriftstückes als Axiome hingestellt werden.

§ 14. Die Formel:

(1) *ab* est *a*

wird als eine durch sich wahre Proposition bezeichnet und es werden neben (1) noch die beiden Formeln:

(2) *ab* est *b* und

(3) *a* est *a*

gestellt, die offenbar gleich der Formel (1) als durch sich wahre Propositionen gelten sollen (vgl. GL S. 218).

Damit ist streng genommen nur gesagt, daß die drei Formeln (1), (2) und (3) als giltig zu betrachten sind. Man erkennt nun aber leicht, daß dieser Satz in Verbindung mit einer Substitutionsregel von größerer Tragweite wird. Denn offenbar läßt sich sagen, daß nun all die Formeln als giltig zu betrachten sind, die sich aus den Formeln (1), (2) und (3) durch erlaubte Substitutionen ableiten lassen. Daß dies die Meinung Leibnizens ist, läßt sich leicht an Hand des Textes zeigen; denn Leibniz hebt in den ergänzenden Bemerkungen hervor, daß man für

ab est *a*

auch sagen könne:

bd est *b* (vgl. GL S. 221).

§ 15. Das zweite der beiden Axiome stellt sich dar in dem Satz:

(1) wenn *a* est *b* und *b* est *c*,
also *a* est *c*

und es wird dieser Satz als eine durch sich wahre Konsequenz bezeichnet (vgl. GL S. 218).

Der Klarheit wegen sei bemerkt, daß in Satz (1) zweierlei vermengt ist, nämlich eine logische These und eine Schlußregel. Es scheint dies auch Leibniz selbst nicht ganz entgangen zu sein; denn an einer späteren Stelle formuliert er den Satz rein als Schlußregel, indem er schreibt:

(2) *a* est *b* und *b* est *c*
also *a* est *c* (vgl. GL S. 224).

Man wird aber der Intention Leibnizens wohl am besten gerecht, wenn man den Satz als logische These formuliert und ihn so darstellt:

(3) wenn *a* est *b* und *b* est *c*, dann *a* est *c*.

§ 16. Die Formeln (1), (2) und (3) in § 14 und die Formel (3) in § 15 bilden sicherlich nicht ein vollständiges Axiomensystem der Theorie, die hier entwickelt wird; doch läßt sich sagen, daß Leibniz ursprünglich nur diese Formeln als Ausgangspunkte benützte.

§ 17. Wir erwähnen nun einen Satz, den Leibniz erst nachträglich unter die Axiome aufgenommen hat; es ist dies folgender Satz:

(1) wenn *a* est *b* und *a* est *c*, dann *a* est *bc*
(vgl. GL S. 222).

§ 18. Sodann seien zwei Sätze erwähnt, die man Theoreme nennen darf; es sind dies die folgenden zwei Sätze:

(1) wenn *b* est *c*, dann *ab* est *ac*
(2) wenn *a* est *b* und *d* est *c*, dann *ad* est *bc*
(vgl. GL S. 222—223).

Diese Sätze werden von Leibniz bewiesen; wir geben hier eine Analyse dieser Beweise.

Beweis des Satzes (1).

Es gilt:

(3) *ab* est *b*
nach (2) in § 14.

Man fügt hinzu die Voraussetzung des Satzes (1) in § 18, d. h. man setzt:

(4) *b* est *c*.

Aus (3) und (4) leitet man unter Berufung auf (3) in § 15 ab:

(5) *ab* est *c*.

Es gilt:

(6) *ab* est *a*
nach (1) in § 14.

Aus (6) und (5) leitet man unter Berufung auf (1) in § 17 ab:

(7) *ab* est *ac*.

Damit ist gezeigt:

wenn *b* est *c*, dann *ab* est *ac*.

Beweis des Satzes (2).

(8) wenn *a* est *b*, dann *ad* est *bd*.

Zweifellos nimmt Leibniz an, daß (8) durch (1) in § 18 gesichert sei. Dies ist streng genommen nicht richtig, da sich (8) nicht aus (1) durch eine bloße Substitution gewinnen läßt. Doch ist es leicht, die Lücke, die das System hier zeigt, zu schließen, da sich der Satz (8) ebenso leicht wie der Satz (1) beweisen läßt.

(9) wenn *d* est *c*, dann *bd* est *bc*
nach (1) in § 18.

(10) wenn *ad* est *bd* und *bd* est *bc*, dann *ad* est *bc*
nach (3) in § 15.

Aus den Sätzen (8), (9) und (10) folgt:

wenn *a* est *b* und *d* est *c*, dann *ad* est *bc*.

Leibniz bezeichnet den Satz (2) als ein «praeclarum theorema» (herrliches Theorem) (vgl. GL S. 223, Z. 15).

In einem Werk der modernen Logik, das klassisch genannt werden darf, nämlich in den Principia mathematica von Whitehead und Russell, findet sich ein Hinweis auf die Stelle in dem Schriftstück von Leibniz, die wir im Auge haben; es wird hier aufmerksam gemacht auf die formale Übereinstimmung, die besteht zwischen einer Formel der Aussagenlogik der Principia mathematica und dem Satz, den Leibniz als ein herrliches Theorem bezeichnet hat (vgl. PM S. 113). Dies läßt erkennen, daß eine tiefgehende Analogie besteht zwischen der Theorie, die Leibniz in dem Schriftstück «Specimen calculi universalis» darstellt und derjenigen Theorie, die im ersten Abschnitt des ersten Teils der Principia mathematica dargestellt ist.

§ 19. Es verdient schließlich noch ein Punkt des ersten Systems hervorgehoben zu werden; es ist dies die Fassung des Begriffes der *Identität.*

Leibniz stellt in dem Schriftstück «Specimen calculi universalis» eine Definition der Identität auf, die sich etwa in folgender Weise wiedergeben läßt:

identisch ist, wovon das eine für das andere unbeschadet der Wahrheit eingesetzt werden kann (vgl. GL S. 219).

Diese Definition besagt so viel als:

a und *b* sind dann und nur dann identisch, wenn in jedem Satz für «*a*» «*b*» und für «*b*» «*a*» unbeschadet der Wahrheit des Satzes eingesetzt werden kann.

In diesem Zusammenhang wird folgender Umstand von Bedeutung.

Leibniz stellt den Satz auf:

wenn *a* est *f* und *f* est *a*, so sind *a* und *f* identisch, d. h. es kann dann das eine für das andere eingesetzt werden (vgl. GL S. 221).

Dieser Satz wird von Leibniz bewiesen; und es ist hier auf diesen Beweis einzugehen.

Es sind die Sätze, in die das Zeichen «*a*» eingeht, ins Auge zu fassen.

Leibniz beruft sich auf eine dem Beweise vorangehende Stelle, an der gezeigt wurde, daß jeder Satz, in den «*a*» eingeht, auf eine der folgenden drei Formen zurückzuführen ist:

(1) *a* est *d*
(2) *ab* est *e*
(3) *c* est *a*.

Wir brauchen hier auf die Frage, ob und wie diese Reduktion möglich ist, nicht einzugehen.

Es wird nun gezeigt, daß in der Tat in jedem der drei Sätze (1), (2) und (3) für «*a*» das Zeichen «*f*» eingesetzt werden darf, wenn gilt:

a est *f* und *f* est *a*.

Es geschieht dies in folgender Weise:

(1) wenn *f* est *a* und *a* est *d*, dann *f* est *d;*

(2) wenn *f* est *a*, dann *fb* est *ab;*
ab est *e*
also *fb* est *e*

(3) wenn *c* est *a* und *a* est *f*, dann *c* est *f*.

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß in allen Sätzen, in die das Zeichen «*f*» eingeht, sich «*f*» durch «*a*» ersetzen läßt, wenn gilt:

a est *f* und *f* est *a*.

Dieser Beweis ist außerordentlich instruktiv und zeigt, wie Leibnizens Definition der Identität zu verstehen ist. Man erkennt, daß diese Definition auf der Voraussetzung beruht, daß alle Sätze, in die ein Zeichen eingeht, eine gewisse Struktur, die beschrieben ist, besitzen.

Leibnizens Definition der Identität, die wir hier beleuchtet haben, stimmt in bedeutsamen Zügen überein mit der Fassung dieses Begriffes, die in modernen Werken der mathematischen Logik, insbesondere in den hier schon genannten Principia mathematica, zu finden ist.

§ 20. Das *zweite* System ist dargestellt in einem Schriftstück, das betitelt ist «Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum» (allgemeine Untersuchungen über die Analyse der Begriffe und Wahrheiten). Dieses Schriftstück gibt uns einen festen Anhaltspunkt für die chronologische Fixierung der Systeme, weil Leibniz hier neben den Titel die Jahreszahl 1686 gesetzt hat.

Außer dieser umfassenden Darstellung gibt es noch einige kleinere Fragmente, die demselben System angehören und hier zu berücksichtigen sind.

§ 21. In diesem System werden große Buchstaben als Variable verwendet.

Die Variablen stehen hier entweder für Begriffe oder für Propositionen (vgl. CO S. 366, Z. 1). Es liegt in dieser Festsetzung, daß die Variablen mehrere Bereiche von Werten besitzen, indem einerseits die Begriffe und anderseits die Propositionen oder Aussagen als Werte der Variablen anzusehen sind.

Es gibt auch in diesem System eine fundamentale Satzform; es ist dies die Zeichenreihe:

(1) *A* est *B*

Neben die Zeichenreihe (1) werden zwei andere gestellt, die ihr gleichbedeutend sind, nämlich die Ausdrücke:

(2) *A* enthält *B* und

(3) *B* ist in *A*

(vgl. CO S. 366, Z. 8—9).

Wir haben schon angedeutet, daß die Variablen mehrere Bereiche von Werten besitzen. Es ist nun die Bemerkung hinzuzufügen, daß in dem Ausdruck (1) beide Variablen stets denselben Wertbereich haben müssen. Darin liegt insbesondere, daß nicht etwa der Wertbereich von «*A*» in (1) die Begriffe und zugleich der Wertbereich von «*B*» in (1) die Aussagen oder umgekehrt der Wertbereich von «*A*» in (1) die Aussagen und zugleich der Wertbereich von «*B*» in (1) die Begriffe sein können.

Das Zeichen «est» kann auch hier den beiden Buchstaben «*A*» und «*B*» gegenüber als eine Konstante betrachtet werden; aber es ist hier nur eine relative, keine absolute Konstante. Wenn der Bereich der Variablen, die links und rechts von dem Zeichen «est» stehen, das Reich der Begriffe ist, so hat man diesem Zeichen eine andere Bedeutung zu geben, als wenn der Bereich der Variablen das Reich der Aussagen ist.

In dem Werke von Couturat ist auf diesen Punkt mit voller Deutlichkeit hingewiesen (vgl. CL S. 354 f.), und es ließe sich die Richtigkeit dieser Auffassung an Hand der Originaltexte dartun.

Wir begnügen uns damit, darauf hinzuweisen, daß es in einem der Fragmente, die hier zu berücksichtigen sind, heißt: «wenn ich sage «*A* est *B*» und *A* und *B* Propositionen sind, so verstehe ich darunter, daß *B* aus *A* folge» (vgl. CO S. 260, Z. 18—19).

Es ist unverkennbar, daß in diesen fundamentalen Bestimmungen das zweite System dem ersten gegenüber einen wesentlichen Fortschritt bringt.

§ 22. Auch in diesem System lassen sich neue Zeichen dadurch bilden, daß Variable neben einander gestellt werden. Es läßt sich bilden das Zeichen:

AB

Leibniz bestimmt die Bedeutung solcher Zeichen, indem er bemerkt:

A est BC ist dasselbe wie A est B und A est C
(vgl. CO S. 252, Z. 20 und S. 380, Z. 17).

§ 23. Der Begriff der Identität wird in derselben Weise bestimmt wie in dem älteren System.

Es wird nun ein einfaches Zeichen der Identität eingeführt; wir ersetzen es im folgenden nach dem Vorgang Couturats durch das moderne Zeichen der Identität.

§ 24. Leibniz erkennt, daß man die beiden Ausdrücke «A est B» und «$A = AB$» als gleichwertig betrachten kann (vgl. CO S. 366, Z. 15—16). Als Ausdruck dieses Gedankens diene uns folgende Gleichung:

(1) $(A \text{ est } B) = (A = AB)$.

Wir beschließen damit die Darstellung des zweiten Systems.

§ 25. Das dritte der drei Systeme, die wir der zweiten Hauptgruppe zuzählen, ist in zwei Schriftstücken dargestellt, die in der von C. J. Gerhardt besorgten Ausgabe durch die römischen Zahlzeichen «XIX» und «XX» gekennzeichnet sind.

Diese beiden Schriftstücke haben nicht mehr den Charakter bloßer Studien, sondern sind endgültige Darstellungen einer Theorie.

Es sei mir erlaubt, darauf zu verweisen, daß dieses System von mir in einer besonderen Abhandlung, die betitelt ist «Neue Beleuchtung einer Theorie von Leibniz» (Darmstadt 1930 Otto Reichl Verlag) eingehend behandelt worden ist.

Was die Entstehungszeit dieser Schriftstücke betrifft, so läßt sich kaum mehr sagen, als daß sie nicht vor August 1690 entstanden sein können. Es trägt nämlich ein Fragment, das noch charakteristische Züge des zweiten Systemes zeigt, das Datum «1. August 1690» (vgl. CO S. 232); und es ist anzunehmen, daß die beiden Schriftstücke, die wir hier im Auge haben, später als dieses Fragment entstanden sind.

§ 26. Als Variable dienen in diesem System wie im zweiten große Buchstaben.

§ 27. Die Darstellung beginnt mit der Definition der Identität, und es ist diese Definition derjenigen analog, die schon innerhalb des ersten und des zweiten Systems aufgestellt wurde (vgl. GL S. 228, Z. 1—6 und S. 236, Z. 1—2).

Es wird hier wie im zweiten System ein einfaches Zeichen der Identität eingeführt; die Bedeutung dieses Zeichens wird bestimmt durch die Festsetzung:

$A = B$ bedeutet, daß A und B identisch sind.

§ 28. Es wird ein Zeichen verwendet, welches man das *Verknüpfungszeichen* nennen kann.

Als Verknüpfungszeichen dient hier entweder das Zeichen der arithmetischen Addition, oder ein Zeichen, das dadurch entsteht, daß das Zeichen der arithmetischen Addition von einer Kreislinie umschlossen wird; wir werden einfachheitshalber in unserer Wiedergabe der Formeln das Zeichen der arithmetischen Addition gebrauchen.

Es werden Ausdrücke gebildet, indem zwischen Variable das Verknüpfungszeichen gesetzt wird.

Solche Ausdrücke sind:

$A + B$

$A + B + C$

§ 29. Es wird der Begriff des Enthaltenseins definiert (vgl. GL S. 228, Z 16—20 und S. 237, Z. 12—13).

Mit Hilfe der zuvor eingeführten Zeichen, nämlich der Variablen, des Zeichens der Identität und des Verknüpfungszeichens, läßt sich diese Definition auf eine solche Form bringen, daß ihr Gehalt vollkommen klar wird. Es läßt sich nämlich sagen, daß Leibnizens Definition des Enthaltenseins nichts anderes besagt als folgender Satz:

«A ist enthalten in B» bedeutet so viel als:

es gibt ein X solcher Art, daß gilt:

$A + X = B$.

Es empfiehlt sich, bei der Darstellung der Theoreme der Kürze halber statt «*A ist enthalten in B*» zu schreiben «*A ist in B*».

§ 30. Es werden Sätze aufgestellt, von denen die einen den Charakter von Axiomen, die andern den Charakter von Theoremen haben.

§ 31. Axiomatischen Charakter haben folgende drei Sätze:

(1) $A + A = A$

(2) $A + B = B + A$

(3) für jedes Paar A und B gilt: es gibt ein C solcher Art, daß gilt:

$A + B = C$.

Dieses Axiomensystem ist nicht vollständig. Es empfiehlt sich, es zu ergänzen, indem man das assoziative Gesetz, d. h. die Gleichung

(4) $(A + B) + C = A + (B + C)$

hinzufügt.

Diese Ergänzung dient lediglich dazu, das Verständnis des Systems von Leibniz zu erleichtern; es wird dadurch an dem System nichts Wesentliches verändert.

§ 32. Wir erklären, daß die Bedeutung des Verknüpfungszeichens durch die vier Gesetze (1), (2), (3) und (4) in § 31 implizite definiert ist.

In diesem Punkte unterscheidet sich unsere Deutung von derjenigen, die Couturat gegeben hat.

Couturat deutet das Verknüpfungszeichen als Zeichen der logischen Multiplikation (vgl. CL S. 375) und gibt ihm damit eine bestimmtere Bedeutung, als wir ihm gegeben haben. Wie die logische Multiplikation, so gehorcht auch die logische Addition den vier Gesetzen, die innerhalb des dritten Systems den Charakter von Axiomen haben; es scheint uns darum nicht zulässig, das Verknüpfungszeichen, das Leibniz hier gebraucht, mit dem Zeichen der logischen Multiplikation zu identifizieren.

Legt man unsere Deutung zu Grunde, so erhält das System, das Leibniz entwickelt hat, einen wesentlich andern Charakter als bei der Deutung, die ihm Couturat gegeben hat. Wir betrachten dieses System als eine Theorie abstrakter Art, welche die Theorie, die Couturat im Auge hat, als einen Spezialfall oder als eine besondere Anwendung unter sich hat.

Wir fügen hier noch folgende Bemerkung bei: Da der Begriff des Enthaltenseins mit Hilfe des Verknüpfungszeichens bestimmt ist (vgl. oben § 29), so ist er ebenso vieldeutig, als das Verknüpfungszeichen vieldeutig ist.

§ 33. Leibniz stellt in den beiden Schriftstücken, die Darstellungen des dritten Systems sind, eine nicht geringe Zahl von

Theoremen auf; wir möchten uns hier darauf beschränken, zwei dieser Theoreme zu beleuchten.

§ 34. Die beiden Theoreme, die wir hier im Auge haben, sind folgende zwei Sätze:

(1) Wenn B in A ist, dann gilt:
$$A + B = A$$

(2) wenn gilt:
$$A + B = A$$
dann ist B in A

(vgl. GL S. 232, Z. 16—18; S. 232, Z. 21—23; S. 239, Z. 17—18, und S. 239, Z. 28—30).

Leibniz bezeichnet selbst den zweiten dieser beiden Sätze als eine Umkehrung des ersten.

Man erkennt leicht, daß es möglich ist, die beiden Sätze zusammenzufassen zu dem Satz:

(3) B ist in A dann und nur dann, wenn gilt:
$$A + B = A.$$

§ 35. Die Beweise der Sätze (1) und (2), die Leibniz gibt, können in folgender Weise wiedergegeben werden:

1. Wenn B in A ist, dann gibt es ein X solcher Art, daß gilt:

(1) $B + X = A.$

Aus der Gleichung (1) läßt sich ableiten die Gleichung:

(2) $B + X + B = A + B.$

Aus Axiom (1) in § 31 läßt sich ableiten:

(3) $B + X + B = B + X.$

Aus (2) und (3) leitet man ab:

(4) $A + B = B + X.$

Aus (4) und (1) leitet man ab:

(5) $A + B = A.$

Damit ist gezeigt, daß, wenn B in A ist, dann gilt:
$$A + B = A.$$
(vgl. GL S. 232, Z. 19—21 und S. 239, Z. 30—32).

2. Es läßt sich leicht zeigen, daß gilt:

(6) B ist in $A + B.$

Nun gilt nach Voraussetzung:

(7) $A + B = A.$

Aus (6) und (7) folgt:

(8) B ist in $A.$

Damit ist gezeigt, daß, wenn gilt:

$A + B = A$

dann auch gilt:

B ist in A

(vgl. GL S. 232, Z. 25—26 und S. 239, Z. 19—20).

Da die Sätze (1) und (2) in § 34 bewiesen sind, und Satz (3) in § 34 nichts anderes ist als eine Zusammenfassung der beiden zuvor genannten Sätze, so darf nun auch (3) in § 34 als bewiesen gelten.

§ 36. Wir blicken nun zurück auf die Gleichung (1) in § 24 und vergleichen diese Gleichung mit dem Satz (3) in § 34.

Um diese Vergleichung zu erleichtern, bemerken wir, daß im zweiten System der Ausdruck «A est B» gleichbedeutend ist mit dem Ausdruck «B ist in A» (vgl. oben § 21).

Es ist nun noch zu beachten, daß sich die beiden Seiten einer Gleichung stets vertauschen lassen.

Auf Grund dieser Überlegung ergibt sich, daß die Gleichung (1) in § 24 ersetzt werden darf durch die Gleichung:

(1) $(B \text{ ist in } A) = (AB = A)$.

Man erkennt nun leicht, daß Satz (1) in § 36 und Satz (3) in § 34 ihrem Gehalte nach identisch sind, und daß darum der Symbolkomplex «AB» mit dem Symbolkomplex «$A + B$» gleichbedeutend ist.

§ 37. Der Satz (3) in § 34 ist ein abstrakter Satz; es lassen sich verschiedene Formeln bilden, die der mathematischen Logik angehören und als Spezialisierungen oder Anwendungen dieses Satzes gelten können.

Es sei uns erlaubt, hier zu erwähnen, daß die vier Formeln, die in den Principia Mathematica unter den Nummern 4.71, 4.72, 22.62 und 22.621 zu finden sind, als Anwendungen dieses Satzes gelten können (vgl. PM S. 120 f. und S. 210).

Mit diesem Hinweis möchten wir die Beleuchtung des dritten Systems beschließen.