

Zeitschrift: Schweizerische numismatische Rundschau = Revue suisse de numismatique = Rivista svizzera di numismatica
Herausgeber: Schweizerische Numismatische Gesellschaft
Band: 44 (1965)

Artikel: Numismatische Probleme mathematisch-statistisch gelöst
Autor: Zaeslein, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-173787>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NUMISMATISCHE PROBLEME
MATHEMATISCH-STATISTISCH GELÖST

Viele Großfirmen gehen je länger je mehr dazu über, ihre Probleme der Produktion, Ausbeute, des Verkaufs und der Propaganda mathematisch-statistisch bearbeiten zu lassen. Sie sparen damit einen Großteil der Kosten und Mühe für die empirische Beantwortung von Fragen, die mehr oder weniger auf zufälligen Gegebenheiten beruhen. Weshalb soll sich der Numismatiker, der ja vorwiegend seine Untersuchungen an zufälligen Funden durchführt, diesen jungen Zweig der exakten Wissenschaften nicht auch zunutze machen? Zugegeben, die mathematisch geschulten Fachleute oder gar der Computer stehen ihm nicht zur Verfügung. Ferner kennt er wohl von den Münzen her die griechischen Buchstaben, aber er schreckt oft davor zurück, abends noch lange mathematische Formeln, gespickt mit griechischen Buchstaben, durchzurechnen. Aber sobald man den ersten Schritt getan hat, so sieht man, daß es gar nicht so schwer ist. Ich möchte deshalb hier die Rosinen aus dem «statistischen Kuchen» picken und versuchen, dem Numismatiker die allereinfachsten Möglichkeiten darzulegen, die er bei der Lösung seiner Probleme anwenden kann.

Vorerst sei aber noch auf zwei Bedingungen hingewiesen, deren Beachtung für statistische Arbeiten unerläßlich ist:

a) Man soll keine Berechnungen vornehmen, ohne die Fragestellung mit gesundem Menschenverstand zu prüfen. Nur in wenigen Fällen eliminiert die mathematische Formel formale Denkfehler.

b) Die Münzen müssen auch richtig gemischt (normal verteilt) sein, damit sich die statistischen Formeln anwenden lassen. So liefern beispielsweise statistische Untersuchungen am 20-Franken-Vreneli aus Gondogold, Prägejahr 1897, falsche Resultate, weil die damals geprägten 28 oder 29 Stück einer Gesellschaft in Genf ausgehändigt wurden, während die 400 000 Vreneli des Prägejahres 1897 aus ausländischem Gold der eidgenössischen Staatskasse abgeliefert wurden.

Ferner ist zu bedenken, daß wir in Sammlungen vorwiegend ausgewählte, schöne Stücke finden, die wenig oder überhaupt nicht im Umlauf waren und deshalb oft nicht den normalen Münzverkehr repräsentieren. In der Literatur sind meist seltene und interessante Stücke beschrieben, wobei die Auswahl oft vom persönlichen Interesse des Autors abhängt. Zahlenvergleiche zwischen eigenen Untersuchungen und Sammlungen oder mit Angaben aus der Literatur sind daher nicht immer zulässig. Schließlich ist zu beachten, daß Seltenheiten von Numismatikern gesammelt werden, weshalb sie noch viel spärlicher unter den umlaufenden Geldstücken gefunden werden, als die Anzahl der geprägten Stücke erwarten läßt.

1. Problem: existiert eine vermutete Abart?

Dies ist eines der Hauptprobleme der numismatischen Forschung. Es erhebt sich dabei die Frage, wieviele Münzen der betreffenden Prägung durchgesehen werden müssen, um mit großer Wahrscheinlichkeit die Existenz einer bestimmten Abart auszuschließen. Die Antwort lautet: Es sind 4,6mal so viele Münzen durchzusehen als vermutlich normale Münzen pro Abart existieren. Besteht zum Beispiel die Möglichkeit, daß unter 100 Münzen eine spezielle Abart vorhanden ist, so müssen 460 Münzen auf diese Abart hin untersucht werden. Ist unter diesen 460 Münzen die gesuchte Abart nicht gefunden worden, so kann mit 99 ⁹/₁₀iger Wahrscheinlichkeit daraus geschlossen werden, daß diese Abart im Verhältnis 1 : 100 nicht oder nicht mehr existiert.

Als selber leicht nachprüfbares Beispiel (dieser Art) sei folgendes angeführt: Im statistischen Jahrbuch der Schweiz und bei Weissenrieder¹ sind Prägungen der schweizerischen Eidgenossenschaft von 5-Frankenstücken folgender Jahre angegeben:

1941:	100 000 Stück
1944:	102 000 Stück

Total wurden etwa 40 Millionen heute gültige Fünfliber geprägt. Falls die Prägungen von 1941 und 1944 auch wirklich diese Jahreszahlen tragen würden, so wäre zu erwarten, daß auf etwa je 400 5-Franken-Stücke je eines mit den Jahreszahlen 1941 und 1944 gefunden wird. Wenn man aber $400 \times 4,6 = 1840$ Fünfliber durchsieht, so findet man keinen einzigen mit dieser Jahreszahl. Man kann daher den Schluß ziehen, daß 1941 und 1944 keine Fünfliber geprägt wurden.

Durch analoge Untersuchungen kann nachgewiesen werden, daß noch weitere Münzen, die nach Angaben des statistischen Jahrbuches geprägt wurden, nicht im Umlauf sind, nämlich:

5 Fr.	1941, 1944, 1936
2 Fr.	1938, 1942
1 Fr.	1942
10 Rp.	1916
1 Rp.	1961

Leider sind mir für analoge Untersuchungen nicht zur Verfügung gestanden: Alle Goldprägungen, 5-Franken-Stücke vor 1931 und die Kupferprägungen vor 1948.

2. Problem: Das Auffinden einer bekannten Abart

Häufig sucht der Numismatiker eine bekannte Abart. Es interessiert ihn dabei, wieviele Münzen er durchsehen muß, um mit einiger Wahrscheinlichkeit auf die gesuchte Abart zu stoßen. Dabei hat er es oft leichter als im vorhergehenden Fall, weil das Verhältnis von der bekannten Abart zur normalen Münze leichter feststell-

bar ist. Die Zahl, mit der die durchschnittliche Anzahl normaler Münzen pro Abart multipliziert werden muß, ist 3. Wenn man also unter den doppelten Dublonen der helvetischen Republik eine mit dem Prägeort Solothurn sucht und dabei annimmt, daß je ungefähr ein Drittel dieser Münzen in Basel, Bern und Solothurn geprägt wurden (Verhältnis 2 : 1) so muß man $3 \times 2 = 6$ solche Dublonen durchsehen, um mit einiger Wahrscheinlichkeit auf den gesuchten Solothurner zu stoßen.

Auf Grund analoger Berechnungen lassen sich unter relativ wenigen umlaufenden Schweizermünzen solche mit Prägejahren finden, die in keiner Münzprägetabelle aufgeführt sind, wie:

10 Rp.	1940
5 Rp.	1940
1 Rp.	1959

Solche Untersuchungen interessieren nicht nur den Numismatiker, sondern auch den Kriminologen zwecks Aufdeckung von Fälschungen. Das eben angeführte Beispiel zeigt nun, daß die offiziellen Prägetabellen im statistischen Jahrbuch zum Nachweis von Fälschungen nicht nur ungeeignet, sondern unter Umständen sogar irreführend sind. Im Zweifelsfalle ist es daher angezeigt, die Sammlung im Landesmuseum in Zürich zu konsultieren.

Findet man die gesuchte Abart unter der errechneten Anzahl Münzen nicht, so können folgende Gründe vorliegen:

- a) Das Verhältnis von der Anzahl normaler Münzen zur Abart ist falsch geschätzt.
- b) Die gesuchte Abart ist unter den durchgesehenen Münzen nicht normal verteilt, weil sie sich in gewissen Sammlungen besonders anhäuft (z. B. Vorliebe der Amerikaner für römische Silbermünzen aus der Zeit um 30 nach Christi Geburt, da Judas für 30 solche Silberlinge Jesus verraten haben soll).
- c) Opfer des Zufalles. Können die Gründe a) und b) ausgeschlossen werden, so muß die Zahl der normalen Münzen nicht mit 3, sondern mit 4,6 multipliziert werden, damit man in das Gebiet der größten Wahrscheinlichkeit kommt. Zum besseren Verständnis seien dafür folgende 2 Beispiele angeführt:

Theoretisches Beispiel. Angenommen, die Abart sei normal vermischt mit normalen Münzen im Verhältnis 1 : 100, so ist das Auffinden dieser Abart

unter 22 Münzen	höchst unwahrscheinlich
unter 33 Münzen	unwahrscheinlich
unter 100 Münzen	möglich
unter 300 Münzen	wahrscheinlich
unter 460 Münzen	sehr wahrscheinlich

Praktisches Beispiel an Hand des schweizerischen 10-Rappenstücks. Schätzungsweise wurden von 1879 bis 1961 (ohne die zurückgezogenen Messingmünzen von 1918 und 1919) etwa 210 Millionen Zehnerli geprägt. Davon sind heute noch etwa 185 Millionen im Umlauf. Die restlichen 25 Millionen Stück wurden teil-

weise zurückgezogen, weil sie abgenützt sind, teilweise gingen sie auch verloren. Von den 17 Millionen Prägungen der Jahre 1879 bis 1885 sind schätzungsweise etwa noch 10 % im Umlauf. Im Jahre 1879 wurde nach den Prägetabellen 1 Million Zehnerli geprägt, von denen anzunehmen ist, daß sie die Jahreszahl 1879 tragen. Schätzungsweise sind davon noch $10\% = 100\,000$ Stück im Umlauf, so daß etwa folgendes Verhältnis besteht: 1 Stück 1879 auf 2000 umlaufende Zehnerli. Um wahrscheinlich auf ein solches Stück mit dem Prägejahr 1879 zu stoßen, muß man somit 6000 Stück durchsehen. Zum Auffinden eines Exemplars mit den häufigeren Prägungen von 1880–1885 müssen entsprechend weniger durchgesehen werden. Auf Grund dieser Überlegungen wurden nun unter 6000 umlaufenden Zehnrapplern diejenigen mit den Prägejahren 1879–1885 herausgesucht, gezählt und mit den geschätzten Werten verglichen (siehe Tabelle 1). Die Zahl der effektiv gefundenen Zehnerli weicht teilweise prozentual sehr stark von der geschätzten Anzahl ab. Die gefundene Anzahl mit dem Jahr 1882 ist ein recht gutes Beispiel dafür, daß der Multiplikationsfaktor 3 stimmt, sofern die offiziellen Prägezahlen richtig sind.

3. Problem: Das Sammeln möglichst vieler Abarten

Oft wird vom Sammler nicht eine spezielle Abart, sondern möglichst viele Abarten einer Münze gesucht. Am Anfang seiner Sammlertätigkeit findet er relativ viele Abarten. Je länger er aber sammelt, um so spärlicher findet er neue Abarten, weil er immer häufiger wieder auf Abarten stößt, die er schon in seiner Sammlung besitzt. Diese Tatsache läßt sich in eine mathematische Formel kleiden und als Kurve aufzeichnen. Die Kurve verläuft je nach Zahl der Abarten und ihrer Häufigkeit steiler oder flacher, im Prinzip hat sie aber immer dieselbe Form. Besser als alle theoretischen Erklärungen zeigt die Darstellung eines praktisch durchgeführten Versuches mit 10 000 schweizerischen 5-Rappen-Stücken die Sachlage. Diese Fünfräppler wurden auf die Häufigkeit ihres Vorkommens im umlaufenden Geld hin untersucht. Die erhaltenen Resultate lassen sich graphisch gut darstellen. Als «Abart» wurden die 74 heute praktisch im Umlauf befindlichen Prägejahre als Ordinate aufgetragen. Die Abszisse gibt die Zahl der untersuchten Fünfräppler an, in denen die verschiedenen Prägejahre gefunden wurden. Verbindet man dann die dargestellten Werte durch eine Linie, so ergibt sich eine Kurve, die sich zuerst sehr steil und dann immer flacher dem Maximum nähert (siehe Abb. I).

Aus der dargestellten Abbildung kann man entnehmen, daß sich unter den ersten 50 Stück schon 21 verschiedene «Abarten» befinden. In den ersten hundert Stück findet man 34 «Abarten», also finden sich gegenüber den ersten 50 Stück in den zweiten 50 Stück nur noch 13 neue «Abarten», unter 200 Stück finden sich 39, also nur noch 5 neue «Abarten» usw.

Aus diesen Ergebnissen lassen sich folgende praktische Schlußfolgerungen ziehen:

Wenn man anfängt, ein neues Gebiet zu sammeln, so hat man zuerst leichten Erfolg, erst später braucht man die Ausdauer.

Sofern man Wert darauf legt, einzelne Gebiete möglichst vollständig zu besitzen, so sucht man im Auktionskatalog und in den Angebotslisten dasjenige Gebiet zuerst auf, welches man am längsten sammelt, denn dort hat man die größte Mühe, noch fehlende Stücke zu finden.

4. Problem: Zufall oder gesicherter Unterschied zwischen zwei verschiedenen Zahlen von ein und derselben Münze oder Gruppe?

Oft werden bei numismatischen Untersuchungen einzelne Gruppen von Münzen miteinander verglichen, zum Beispiel in bezug auf ihr Gewicht, Gehalt an Edelmetall, Herkunft aus verschiedenen Münzstätten usw. Ob nun die Differenz zwischen den Resultaten von zwei solchen Gruppen reiner Zufall ist, oder aber mit großer Wahrscheinlichkeit auf einem wirklichen Unterschied beruht, läßt sich mit folgender einfachen Formel errechnen:

$$X^2 = \frac{(O - E)^2}{E}$$

Erklärung: X^2 (chi quadrat) = Signifikanz (Wahrscheinlichkeit) des Unterschiedes auf Grund der X^2 -Verteilung. Siehe in einem Nachschlagewerk über Statistik, zum Beispiel Dokumenta Geigy wissenschaftliche Tabellen.

O (observed) = gezählte Anzahl Münzen.

E (expected) = errechnete oder theoretisch erwartete Anzahl Münzen.

Praktisches Beispiel:

3000 5-Franken-Stücke der Schweizerischen Eidgenossenschaft wurden nach der aufgeprägten Jahreszahl hin untersucht und gezählt (siehe Tabelle 2, Spalte 3), diese Zahl wurde nun mit derjenigen verglichen, die auf Grund der Prägertabelle zu erwarten ist (Spalte 4) und die Übereinstimmung dieser beiden Zahlen nach obiger Formel berechnet (Spalte 5). Dabei wurde der strenge Maßstab von $P = 0,01$ angewandt.

Wie man nun dieser Tabelle 2 entnehmen kann, besteht bei verschiedenen Prägejahren eine wirkliche Differenz zwischen der Anzahl Prägungen im betreffenden Jahr und den umlaufenden Fünflibern. Dafür stimmen oft Gruppen von mehreren Jahren überein (Spalte 6), so daß mathematisch bewiesen werden kann, daß von der eidgenössischen Münzstätte in Bern oft schon «auf Vorrat» mit dem Stempel des nächsten Jahres geprägt wird, oder aber daß alte Stempel vom vergangenen Jahr in hausfraulicher Sparsamkeit weiter benützt werden. Einzig die außerordentlich große Zahl von Prägungen mit der Jahreszahl 1953 kann nicht erklärt werden. Möglicherweise handelt es sich um Umprägungen von alten, abgeschliffenen Münzen. Es ist

kaum anzunehmen, daß es sich um Fälschungen handelt, denn es müßten ja sofern diese Fälschungen in der Schweiz gleichmäßig verteilt sind, $1-1\frac{1}{2}$ Millionen Stück im Umlauf sein, und es ist unvorstellbar, daß dies bisher nicht bemerkt wurde *.

5. Problem: Wie läßt sich von der beobachteten Anzahl Münzen auf die effektiv geprägte Anzahl schließen?

Der Weg der Münze von der Prägung bis zum Numismatiker wird, statistisch gesehen, von einer praktisch unendlich großen Zahl von zufälligen Ereignissen bestimmt. Die Schlüsse, die der Numismatiker aus seinen Beobachtungen zieht, müssen daher diesen Zufällen Rechnung tragen. Dies erfolgt dadurch, daß man das Resultat nicht auf eine bestimmte Zahl anwendet, sondern auf einen bestimmten Bereich (ähnlich der Eingabelung bei der Artillerie). Die Grenzen dieses Bereichs werden Vertrauensgrenzen genannt und lassen sich aus Tabellenwerken der Statistik entnehmen 2, 3.

Praktisches Beispiel:

In Tabelle 3 wird die Ausrechnung der effektiv geprägten Anzahl Fünfliber auf Grund der durchgesehenen 3000 Stück dargelegt. Diese Ausrechnung basiert auf einem theoretischen Münzumlauf von 40 Millionen Stück. (Praktisch müssen davon der Vorrat der eidgenössischen Staatskasse, der Rückzug infolge Abnutzung und Beschädigung sowie eine relativ kleine Zahl als Verlust abgezogen werden.)

Vergleicht man die Zahlen dieser Tabelle 3 mit den offiziellen Prägetabellen im statistischen Jahrbuch, so liegen nur in zwei Dritteln der Fälle die offiziellen Prägezahlen innerhalb der errechneten Limiten.

Tabelle 1. Vergleich zwischen der geschätzten und der effektiv gefundenen Anzahl früher Prägungen unter 6000 umlaufenden schweizerischen 10-Rappen-Stücken.

Jahreszahl	geschätzte Zahl der Münzen, die sich im Umlauf befinden	geschätzte Anzahl unter 6000 Stück	effektiv gefundene Stück
1879	100 000	3	4
1880	200 000	6	5
1881	300 000	9	6
1882	300 000	9	4
1883	200 000	6	7
1884	300 000	9	12
1885	300 000	9	9
Total	1 700 000	51	47

* A l'appui de ce qui précède (4, dernier alinéa) je signale avoir reçu en paiement à Gessenay un écu de 5 francs, daté 1965, et ce la dernière semaine de décembre 1964.

Colin Martin

Tabelle 2

Wahrscheinlichkeit des Übereinstimmens der Anzahl ausgezahlter eidgenössischer 5-Franken-Stücke mit den Angaben der offiziellen Prägetabellen

Jahr	Geprägte Anzahl Fünfliber nach statistischem Jahrbuch in 1000 Stück	O = gezählte Münzen mit der Jahreszahl Stück	E = errechnete Anzahl Münzen des betreffenden Prägejahres Stück	X^2 = Wahrscheinlichkeit des Übereinstimmens von O und E	Wahrscheinlichkeit des Übereinstimmens einzelner Gruppen
1954	6 600	486	484	ja	} ja
1953	3 403	335	250	nein	
1952	1 55	21	11	nein	
1951	1 096	80	80	ja	
1950	482	38	35	ja	
1949	407	33	30	ja	
1948	910	23	67	nein	
1944	102	0	7	nein	
1941	100	0	7	nein	
1940	1 600	60	117	nein	
1939	2 228	196	163	nein	} ja
1937 (+ 1936)	845	48	62	ja	
1935	3 000	206	220	ja	
1933	5 900	414	433	ja	
1932	10 580	803	776	ja	
1931	3 520	257	258	ja	
	40 928	3 000	3 000		

Tabelle 3

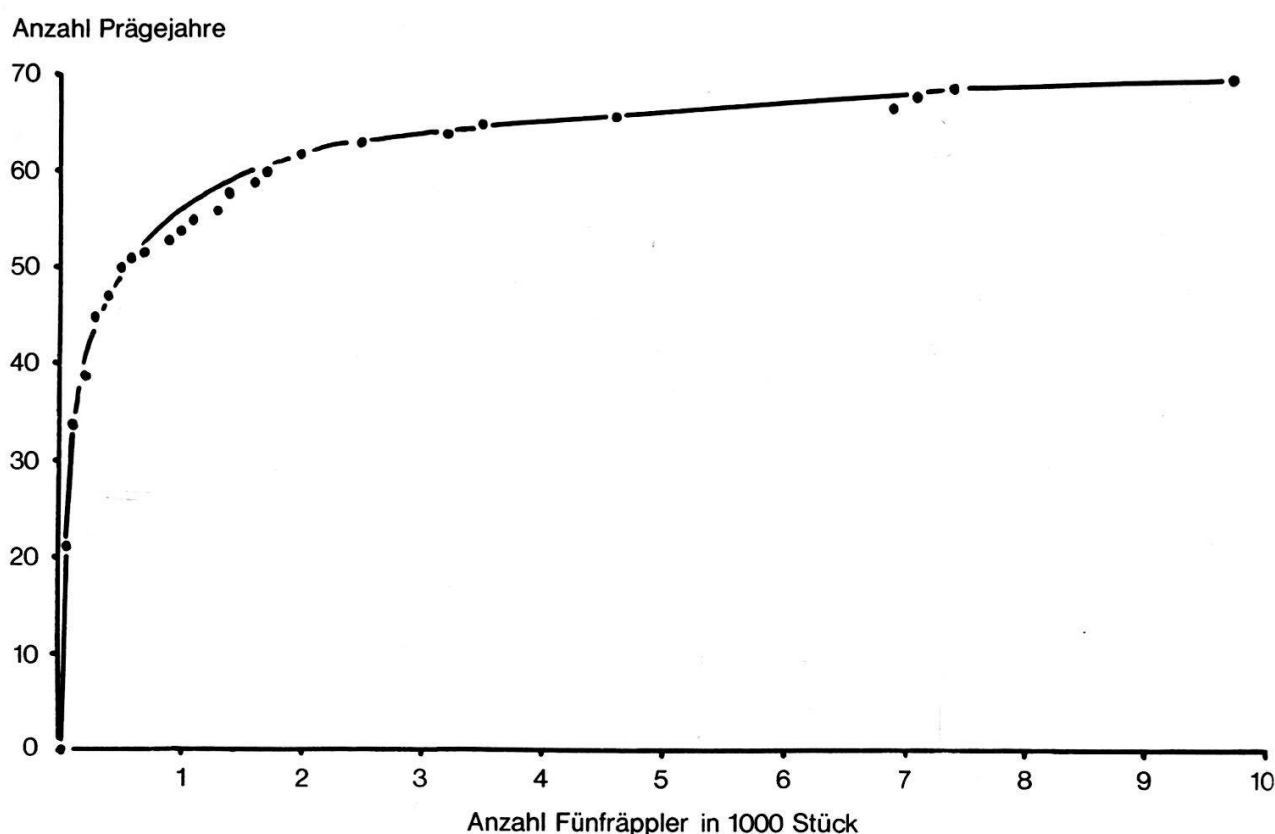
*Ausrechnung der effektiv geprägten eidgenössischen 5-Franken-Stücke
geordnet nach Jahreszahlen*

Jahr	gezählte Münzen mit dieser Jahreszahl Stück	Anteil am Umlauf in %	mathematisch errechnete Zahl der Prägungen in 1000 Stück
1931	257	8,56	2 960— 4 050
1932	803	26,77	10 000—11 800
1933	414	13,80	5 000— 6 300
1935	206	6,87	2 380— 3 330
1937	48	1,60	510— 910
1939	196	6,53	2 230— 3 160
1940	60	2,00	595— 1 110
1948	23	0,77	176— 520
1949	33	1,10	278— 700
1950	38	1,26	332— 765
1951	80	2,66	820— 1 460
1952	21	0,70	156— 488
1953	335	11,18	3 980— 5 210
1954	486	16,20	5 900— 7 300
	<hr/> 3000	<hr/> 100,00	

BIBLIOGRAPHIE

1. *Weissenrieder, F. X.*: 100 Jahre schweizerisches Münzwesen 1850–1950; p. 26–29 (Thur-Verlag, Bazenheid SG 1950).
2. *Documenta Geigy*, wissenschaftliche Tabellen; 6. Aufl. p. 85–103 (Geigy, Basel 1960).
3. *Mainland, D. et Al.*: Tables for use with binomial samples. (New York University College of Medicine, NY 1956.)

Abbildung 1 Graphische Darstellung der Anzahl verschiedener Prägejahre, die unter 50–10 000 umlaufenden schweizerischen 5-Rappen-Stücken gefunden wurden.



Anmerkung

Während der Drucklegung dieser Arbeit und nach Besprechung einzelner hier publizierter Resultate mit Herrn Kunz, Hauptkassier der Schweizerischen Nationalbank in Bern, gab die Eidgenössische Münzstätte eine neubearbeitete und ergänzte Tabelle der Prägungen von Schweizer Münzen 1850–1963 heraus. Darin wird angegeben, daß die Prägung von 5-Franken-Stücken in den Jahren 1941 und 1944 Gedenktaler betraf. Ebenso wurden die in den Abschnitten «1. und 2. Problem» dieser Arbeit vermerkten Fehler des Statistischen Jahrbuches korrigiert. Die in der Tabelle 2 genannten Zahlen stimmen nach der neuen Prägetabelle nicht mehr. Da sie aber als Rechnungsbeispiel dienen, wurden sie bei der Korrektur nicht abgeändert. Die ganze Tabelle 2 wurde mit den neuen Zahlen der Münzstätte durchgerechnet. Es ergab sich dabei, daß in bezug auf die Prägungen der 5-Franken-Stücke von 1940, 1952 und insbesondere auf die große Zahl umlaufender Fünfliber von 1953 auch die neuen Angaben der Münzstätte mit dem tatsächlichen Umlauf nicht in Einklang stehen. Es ist hier beizufügen, daß die Angaben im Statistischen Jahrbuch über den Umlauf der Fünfliber den Umlauf von Gedenktalern miteinschließt. Da diese Taler aber de facto nicht kursieren, müssen die Zahlen für Untersuchungen über den effektiven Umlauf entsprechend korrigiert werden.