

Zeitschrift: Jahrbuch der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.
Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Annuaire de la Société
Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 162 (1982)

Artikel: Was hat die Wissenschaft von der mathematischen Logik?

Autor: Kreisel, Georg

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-90873>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Was hat die Wissenschaft von der mathematischen Logik?

Georg Kreisel

Erstens einmal liefert die Logik Gesetze für einige (logische) Begriffe, die beinahe in der gesamten Mathematik und ihren Anwendungen nützlich sind; insbesondere für so vertraute Begriffe wie: Menge (aus dem letzten Jahrhundert), logische Sprache (um die Jahrhundertwende), formale oder mechanische Regel (aus diesem Jahrhundert). Jene Begriffe werden benutzt, um ausgesprochen wesentliche Sachverhalte prägnant zu beschreiben, und sind in dieser Hinsicht dem der natürlichen Zahl durchaus vergleichbar; genauer: man braucht diesen Begriff mitsamt den (elementaren) Gesetzen der Arithmetik, z. B. der Kommutativität der Addition bei der Kontrolle von Rechnungen. Ähnliches gilt für die logischen Gesetze. Der Vergleich geht übrigens noch einen Schritt weiter. Für die breite Wissenschaft haben die elementaren Teile der Logik und Arithmetik einen bedeutend grösseren Grenznutzen als die «höheren», d. h. als jene Eigenschaften von Mengen und Zahlen, auf die sich die heutige höhere Mengenlehre bzw. Zahlentheorie konzentriert. (Oft macht es schon viel mehr aus, dass man nicht vergisst überhaupt zu zählen, und Ähnliches gilt für die Logik im Gegensatz – so scheint es mir – zur höheren Geometrie.) Auf einige Ausnahmen kommen wir später zurück.

Zweitens bietet die – Entwicklung der – Logik krasse Schulbeispiele einer wissenschaftlichen Problematik, die uns aus anderen Teilen der Wissenschaft wenig vertraut ist; ganz besonders wenig aus der Mathematik, die in der Auswahl ihrer Begriffe und Fragestellungen, nicht: der Beweise, sehr konservativ ist. Grob gesagt betrifft jene Problematik die Korrektur von Zielen oder, nuancierter ausgedrückt, die *Abstimmung von Zielen auf vorhandene Methoden*, also: technische Möglichkeiten. Im Falle der Logik handelt es sich um die Korrektur ihrer ursprünglichen, grundagentheoretischen Ziele. Der folgende Vergleich wirkt auf den ersten Blick skurril, stellt sich aber als höchst optimistisch heraus. Ich denke an Astrologie und Al-

chemie, und zwar an ihre grobschlächtigen Ziele, nicht an tiefsinnige oder gar tiefenpsychologische Varianten; also: das Schicksal eines Menschen vorauszusagen, bzw. Formen der Materie in andere oder in Energie umzuwandeln. Diese allgemeinen Ziele sind m. E. durchaus überzeugend. Zweifelhaft sind dagegen die zusätzlichen spezifischen Annahmen, dass ausgerechnet astronomische Kenntnisse, bzw. jene, die sich die Alchemisten mit minimalem Energieaufwand beschaffen konnten, für die erwähnten Ziele geeignet sind. (Auch das spezifische Anliegen der Alchemisten, Blei ausgerechnet in Gold umzuwandeln, übersieht die heute bekannten Schwankungen des Goldpreises und allgemeiner das Gesetz von Angebot und Nachfrage.) Die Korrektur bestand gar nicht so sehr in einer radikalen Änderung des alltäglichen Wissenschaftsbetriebes, sondern in der Entdeckung von fruchtbareren Zielen für die Kenntnisse, die sich die Astrologen und Alchemisten – bei ihren Bemühungen um ihre ursprünglichen Ziele – erworben hatten. Z. B.: nicht das Schicksal der Menschen, sondern die Bahnen von Planeten aus astronomischen Daten zu berechnen; nicht billiges Blei in teures Gold, sondern noch billigere Tonerde in etwas weniger teures Meissner Porzellan durch Erhitzen zu verwandeln. Nebenbei sei bemerkt, dass es in der Astrologie an jener Präzision, die in den logischen Grundlagen als Allerweltsheilmittel angesehen wird, nie mangelt: Es mangelte an vernünftigen Zielen für jene Präzision. Dass der Vergleich der Logik mit Astronomie und Alchemie optimistisch ist, liegt darin, dass bei den beiden letzten Unternehmen die Korrekturen gelungen sind.

Nach dem üblichen Sprachgebrauch gehören solche Korrekturen durch vernünftige Akzentverschiebung zur Philosophie, und zwar zu den philosophischen Fortschritten. In unserem Spezialfall der mathematischen Logik handelt es sich dazu noch um Philosophie im akademischen Sinne, also um jene traditionellen Frage-

stellungen der Schulphilosophie, die die mathematische Logik ursprünglich präzisieren sollte (was ihr übrigens ausgezeichnet gelang). Man denke hier an die Rolle der logischen Sprachen im sogenannten Logizismus und der formalen Regel im Formalismus, um nur die beiden bestbekannten Schulen – besser Zweige – der logischen Grundlagenforschung zu nennen. Den Intuitionismus behandle ich hier deshalb nicht, weil die breite Öffentlichkeit zwar den Namen, aber nicht seine wesentlichen Begriffe kennt.

Wieder, d. h. wie bei der Astrologie und Alchemie, stecken hinter jenen Zweigen der logischen Grundlagen m. E. durchaus überzeugende allgemeine Ziele aus der sozusagen heroischen Tradition der Philosophie der Mathematik, mit Fragen folgender Art: Was ist Mathematik? Oder: Was ist Beweis?

Oder im modernen, etwas dezenteren Jargon, betr. l'architecture des mathématiques et nos résonances intuitives. Unüberzeugend ist dagegen der Anspruch, dass dafür ausgerechnet die logischen Aspekte der Mathematik und des mathematischen Wissens ergiebig sind; natürlich, in dem Sinn von «logisch», der in der logischen Grundlagenforschung benützt wird.

Jeder Zweifel an der Relevanz der logischen Aspekte für die heroischen Ziele berührt unvermeidlich die Auswahl der Eigenschaften logischer Begriffe, also, der Fragen betr. logische Begriffe, die eine vernünftige Forschung betont. – Warnung. Die populäre Literatur betont noch immer jene Sätze, die für die ursprünglichen grundlagentheoretischen Ziele (tatsächlich) besonders relevant waren. Bei der Akzentverschiebung auf nüchternere Ziele muss man darauf gefasst sein, dass jene (vertrauten) Sätze zwar nicht widerlegt werden, aber ihre zentrale Stellung verlieren. Manchmal werden sie für die neuen Ziele durch geschickte Umformulierung relevant. Häufiger aber braucht man eine Akzentverschiebung auf Hilfssätze, die beim Beweis jener «Fundamental»sätze benutzt wurden. Dass diese «Konflikte» bei der Logik tatsächlich auftreten, werden Beispiele bald zeigen.

I. Logische Begriffe und ihre Eigenschaften

1. Mengen und die mengentheoretische Sprache, also mit Variablen für Mengen (aus einem geeigneten Mengenvorrat), der \in -Relation und den üblichen logischen Partikeln.

(a) Vor 100 Jahren: von einer Entdeckung zu

einer Doktrin. Überraschenderweise hängen viele mathematische Sätze, z. B. über Funktionen, gar nicht von den für uns eindrucksvollsten Merkmalen der einschlägigen Objekte (also von ihren sogenannten intensionalen Eigenschaften), sondern von viel größeren ab; bei Funktionen: nicht von den Gesetzen, die vom Argument zum Wert führen, sondern nur vom Graphen. Etwas allgemeiner: in die Sätze gehen nur überraschend wenige Aspekte der Objekte ein; z. B. bei den rationalen Zahlen, manchmal nur die Ordnung, oft nur die Körperoperationen, selten die Darstellung als Brüche. Solche Sätze können in der mengentheoretischen Sprache, u. zw. m. B. a. die erwähnten Aspekte (Strukturen) formuliert werden. Auf diese Entdeckung folgte bald eine zweite; in vertrauten Teilen der Mathematik, z. B. in der Arithmetik können die Objekte und ihre Beziehungen auch – wie man sagt: bis auf Isomorphie – mengentheoretisch definiert werden, wobei sich jene Isomorphie auf die relevanten Strukturen bezieht; z. B. ist bei den rationalen Zahlen $(0,1)$ ordnungsisomorph zu jedem Intervall (a, b) : $a < b$, aber nur zu sich selbst, wenn auch die Körperoperationen berücksichtigt werden.

Danach wurde aus diesen Entdeckungen betr. grosse Teile der (damaligen) Mathematik eine Doktrin: alle «streng» mathematischen Sätze müssen in dieser mengentheoretischen Form ausgedrückt werden. Dahinter steckte natürlich das Ziel, die Frage:

Was ist Mathematik? mit: Mengenlehre zu beantworten. Es ist ziemlich klar, welche Eigenschaften von Mengen für dieses Ziel gebraucht werden: brave Lehrbücher gehen auf diese Dinge, meistens in Anhängen, ein.

(b) Heute: Übertragungsprinzipien. Die Erfahrung hat gezeigt, dass, abgesehen von ganz wenigen Ausnahmen, die in (a) betonten mengentheoretischen Definitionen der Strukturen selbst nichts bringen; noch weniger hat man davon, dass man sich über den nötigen Mengenvorrat den Kopf zerbricht. – Für Kenner: die Ausnahmen betreffen z. B. gewisse gruppentheoretische Fragen, etwa ob diese oder jene (überabzählbare) abel'sche Gruppe frei ist. Interessant ist die Tatsache, dass man solchen Fragen i. a. nicht ohne weiteres ansieht, ob sie vom betrachteten Mengenvorrat abhängen. – Im Gegensatz zur sterilen Doktrin (a) ist folgendes ganz wesentlich:

Wenn ein Satz mengentheoretisch formuliert ist – genauer: m. B. a. eine (passende) Strukturie-

rung der darin betrachteten Objekte –, dann gilt er auch für jede isomorphe Struktur.

Damit wird das verpönte Raisonieren mit Analogien angemessen präzisiert und legitimiert. – Warnung. Dagegen liefert die Mengenlehre selbst keine Richtlinien für die Auswahl passender Strukturierungen. Damit befasst sich die übliche axiomatische Mathematik (nicht zu verwechseln mit der axiomatischen Mengenlehre). Ohne zu übertreiben:

nicht: dass, sondern: welche Mengen betrachtet werden, ist für den Erfolg der axiomatischen Mathematik massgebend. – Abschweifung. Will man diese heikle Frage der Auswahl (von Mengen) vermeiden, so kommt man beinahe zwangsläufig zu Cantors Taktik, alle oder zumindest möglichst viele Mengen und gar keine Strukturierung zu betrachten, kurz: Kardinalzahlarithmetik. Und die einfachste Art, hier etwas Neues hineinzubringen ist, wieder, Cantors Hauptanliegen: höhere Unendlichkeiten. Die Öde dieser Fragestellung wird – bewusst oder eher unbewusst – verschleiert durch Dramatisierung von Fragen betr. die Existenz solcher Dinge; vgl. Churchills Meinung, die Wahrheit bräuchte eine Leibwache von Lügen.

Verstärkte Übertragungsprinzipien. Man kann sich gut vorstellen, dass sich Sätze, die in einem Teil der mengentheoretischen Sprache formuliert werden, auf eine grössere Klasse von Strukturen (als nur isomorphe) übertragen lassen. – Besonders bewährt hat sich die Sprache der elementaren Logik, mit Variablen für die Elemente einer festen Menge. (Logisch sensible Mathematiker mögen den Ausdruck «elementare Logik» nicht, weil ja die gesamte Mengenlehre in diesem Formalismus angeschrieben wird). Was Übertragungsmöglichkeiten betrifft, gilt für Kenner das Stichwort: Ultraprodukte.

(c) Konflikte zwischen den alten Zielen in (a) und den neuen in (b) sind schon deshalb unvermeidlich, weil in (a) heroische Fragen der Art: Was ist (das Objekt) X? das Ding X von allen anderen Dingen unterscheiden wollten. Dagegen werden in (b) Kenntnisse von X auf andere Dinge übertragen. Ähnliches gilt für den Anspruch, dass die elementare logische Sprache die Gesamtheit präziser Definitionsmöglichkeiten ausschöpfe. Im Gegenteil: die (verstärkten) Übertragungsprinzipien sind nützlich, weil ganz präzis definierte, aber verschiedene (nicht-isomorphe) Strukturen vorliegen, die sich nicht elementar unterscheiden lassen!

Zusätzliche Bemerkungen (für Kenner). Auch in der «höheren» Logik waren Akzentverschiebungen nötig, die übrigens recht oft hinter einer neuen Terminologie versteckt sind. Z. B. sind die Begriffe der verzweigten und konstruktiblen Hierarchien von Poincaré/Russell bzw. Gödel praktisch identisch (bis auf den Unterschied zwischen den einfachen und kumulativen Typen, die in der Zwischenzeit eingeführt worden waren). Aber die relevanten Fragen sind grundverschieden. Für Poincaré/Russell, mit ihren prädikativistischen Anliegen, war es eine Hauptfrage, wie «kompliziert» jene Verzweigungen sein, also bis zu welcher Ordinalzahl sie wiederholt werden dürfen. Für Gödels Ziel – von relativen WF Beweisen – war das überhaupt kein Problem: so «kompliziert» wie möglich (genauer: im jeweils betrachteten Mengenvorrat möglich). Und seither hat sich der Schwerpunkt weiter verlegt: von seinen relativen WF-Beweisen zu Übertragungsprinzipien der Art:

Welche Sätze über die konstruktiblen Mengen lassen sich auf die volle Hierarchie übertragen? Das ist deshalb nützlich, weil die konstruktiblen Mengen strukturierter sind und z. B. raffinierte induktive Beweise erlauben.

Manche ärgern sich darüber, dass die meisten «Experimente» in der Mengenlehre, z. B. das rein formal inspirierte System NF von Quine, keine vergleichbar vernünftigen Ziele haben. Ich denke dabei an die unvernünftigen Kunststücke, auf die sich die frühe Elektronik eingelassen hat. Die Firmen, die es taten, machten Pleite (nachdem geschickte Spekulanten kurzfristige Gewinne eingesteckt hatten). Aber andere lernten daraus, was man nicht tun sollte, z. B. darin langfristig zu investieren. – Da wir schon von Computern reden, komme ich aufs nächste Thema.

2. Formale Regeln: die nichtnumerische Datenverarbeitung.

a) Wir behalten das Schema von §1 bei.

Wieder fing es mit einer Entdeckung, u. zw. schon im letzten Jahrhundert, an. Boole und Frege haben Kalküle für die Aussagen- bzw. Prädikatenlogik aufgestellt, übrigens unter Titeln, deren Übertreibungen sich z. B. die heutige kommerzielle Werbung kaum leisten könnte: die Denkgesetze (Laws of thought), Grundgesetze (der Arithmetik). Dabei stellen jene Kalküle keineswegs die tatsächlichen Möglichkeiten des Denkens dar, sondern nur folgendes. Zu

jedem gültigen Satz der betrachteten logischen Sprache gibt es auch eine Ableitung im einschlägigen Kalkül. Kurz, das Denken wird als schwarzer Kasten (auf englisch: black box) behandelt. – Beispiel. In der Aussagenlogik gilt $p \leftrightarrow (\neg)^{2n}p$ und wird vernünftigerweise durch Nachzählen der Negationszeichen bewiesen; aber dieses Nachzählen ist kein Beweis im Booleschen Kalkül.

Bald wurde aus den Entdeckungen von Boole und Frege eine Doktrin, die die Frage Was ist (das Wesentliche am) Beweis?

zu erledigen behauptete, insbesondere im Zusammenhang mit einem Hauptanliegen jener Zeit, der Geschichte von der Sicherheit der Mathematik oder der Strenge der Beweise (obwohl, realistisch betrachtet, gerade bei der Mathematik die Sicherheit meistens unsere kleinste Sorge ist). Die Antwort war: Formalisierbarkeit (offenbar, eine Verlegenheitslösung, da damit nur die Möglichkeit einer Formalisierung gemeint ist, obwohl – vorher und nachher – nichtformalisierte Beweise durchaus überzeugend waren und bleiben). Natürlich musste diese Antwort durch spezifische formale Regeln ergänzt werden, etwa jene, die Frege konzipiert hatte und Whitehead/Russell weiterführten. – Abschweifung (für Kenner) betr. eine besonders witzige Wendung, die Hilbert jenem Projekt gegeben hat. Entgegen einer weitverbreiteten Meinung stand Hilberts Formalismus, insbesondere sein Steckenpferd: die Methodenreinheit, keineswegs im Widerspruch zum Logizismus. Hilbert wollte diesen verfeinern! statt sich mit einer brutalen (globalen) Formalisierung in der Mengenlehre zu begnügen, wollte er die einzelnen Zweige der Mathematik (Geometrie, Arithmetik, finite Kombinatorik usw.) sozusagen rasen-(= methoden)rein züchten, z. B. sollten in der Geometrie nur elementargeometrisch definierbare Mengen, insbesondere nur so definierte Dedekind'sche Schnitte benützt werden, u. dgl. Wer, bewusst oder unbewusst, von Hegels Warnung, alles hänge mit allem zusammen, eingeschüchtert war, musste das Hilbert'sche Programm der Methodenreinheit als Erlösung empfunden haben: zumindest in der Mathematik braucht man sich «prinzipiell» überhaupt um nichts ausserhalb des jeweils betrachteten Zweiges zu kümmern.

In diesem Jahrhundert gerieten jene übertriebenen Ansprüche betr. Beweise, übrigens ganz allmählich, in den Hintergrund; besonders nach den Gödel'schen Sätzen. (Wie Gödel selbst be-

tonte, widerlegen seine Unvollständigkeitssätze prinzipiell die Möglichkeit des Hilbert'schen Ideals der Methodenreinheit in der Arithmetik, während ihre Relevanz für das Hilbert'sche WF-Programm beschränkt ist.) Innerhalb der Logik ging man von der spezifischen Anwendung formaler Regeln als Schlussregeln auf das allgemeine Gebiet der mechanischen Verfahren, vor allem der sogenannten Entscheidungsverfahren über. Dementsprechend änderte sich die Terminologie. Man hörte immer weniger von formaler Unvollständigkeit (die Gödel betonte), und immer mehr von rekursiver Unentscheidbarkeit, aus der jene Unvollständigkeit leicht folgt.

Aber diese Akzentverschiebung – von Beweisregeln auf allgemeine mechanische Verfahren – beseitigt noch nicht die philosophischen Zweifel der schweigenden Mehrheit (erfahrener Mathematiker). Zugegeben, der Begriff der rekursiven Funktion trifft ausgezeichnet, was wir naiverweise unter einer prinzipiell mechanisch definierbaren Operation verstehen. Aber ist dieser naive Begriff auch nur eine qualitativ vernünftige Annäherung (auch «Idealisierung» genannt) in den Bereichen, in denen wir ihn naiverweise anwenden wollen? Aus der Informatik ist einerseits bekannt, dass die Wachstumsordnung ganz wesentlich ist, aber auch, dass es – jedenfalls für die heutige Physik – keineswegs selbstverständlich ist, dass jede verlässliche hard ware (Analogcomputer im allgemeinen Sinn) rekursive Gesetze erfüllt. Innerhalb der reinen Mathematik kann man die Zweifel an der Bedeutung des Begriffes eines (mechanischen) Entscheidungsverfahrens sehr deutlich anhand des 10. Hilbert'schen Problems über die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen in ganzen Zahlen illustrieren.

Seit etwa 1930, genauer: seit der bekannten Arbeit von C. L. Siegel über binäre diophantische Gleichungen, hat sich die Fragestellung selbst geändert; z. B. nicht: ob es überhaupt eine Lösung gibt, sondern: unendlich viele. Besonders viel Aufmerksamkeit wurde der «Struktur der Lösungsmenge» gewidmet, u. zw. vor allem bei rationalen Lösungen. Nach dem Satz von Mordell/Weil weiss man, dass sich die Menge als eine endlich erzeugte abel'sche Gruppe auffassen lässt, obwohl man i. a. nicht weiss, ob sie leer ist.

So gesehen, war das Hilbert'sche 10. Problem schon lange eskomptiert. Die rekursive Unlösbarkeit, die Matyasevic 1970, also etwa 40

Jahre später, tatsächlich beweisen konnte, ratifiziert die Einstellung der Zahlentheoretiker. Der nächste Abschnitt behandelt den heutigen Stand der Dinge: vor allem die Rolle der formalen Regel für die Informatik, mit einem kurzen Zusatz über ihre Rolle in der reinen Mathematik.

(b) Heute: Einsichten für den Programmierer. Der Begriff der formalen Regel und seine einfachen Eigenschaften liefern Hinweise zur Frage: Was hat man davon, wenn man Rechenregeln kennt und nicht nur die so definierte Funktion? (Die Voraussetzung ist beim Programmieren sowieso erfüllt.) Offenbar ist die Frage besonders dann nötig, wenn man sich vorher in die in (a) beschriebenen Ideale der mengentheoretischen Darstellung von Funktionen durch deren Graphen verhasst hat. – Warnung. Es geht um Einsichten, nicht praktische Rezepte. Für diese wäre der allgemeine Begriff der formalen Regel viel zu grob, und zwar gröber als so manche in der üblichen Mathematik, worauf wir noch zurückkommen. – Statt von «Einsichten» zu reden, könnte man auch sagen: es handelt sich nicht um eine Theorie des Programmierens, sondern um ein paar gesunde (geistige) Reflexe für den Programmierer, die er sich, je nach Erfahrung, anhand von hübschen allgemeinen Sätzen oder einprägsamen Beispielen aneignen kann.

(i) Anwendung formaler Regeln auf formale Regeln, inklusive der – vielleicht aus tiefenpsychologischen Gründen – etwas überbetonten Selbstanwendung oder Selbstbezüglichkeit. Denn offenbar kann eine Regel – genauer: ihre Kodierung – in einem Programm auch als Argument derselben oder einer andern Regel vorkommen.

Sicher gibt es Ähnliches in der üblichen Mathematik; z. B. definiert bei Halbgruppen das Element a auch die Operation: $b \mapsto ab$. Aber, realistisch betrachtet, ist dieses Beispiel einfach bei weitem nicht so eindrucksvoll wie die entsprechenden Sätze der Rekursionstheorie, also, der Theorie der formalen Regeln. Tatsächlich war es ja der logisch versierte Mathematiker von Neumann, der von Gödels Arithmetisierung (die schliesslich zu jenen Sätzen der Rekursionstheorie führte) sehr beeindruckt war und als erster die Anwendung von Regeln auf Regeln in der Programmierung ausnützte; vgl. den sehr gescheiterten Ingenieur Zuse, der (die Prädikatenlogik, aber nicht die Rekursionstheorie kannte und) diese Möglichkeit übersah.

(ii) Das Operieren mit Regeln ohne Sorge um den Definitionsbereich: Einsatz von wesentlich partiellen Funktionen. («Wesentlich» insofern, als ja – vernünftig betrachtet – die meisten üblichen Begriffe und Funktionen, z. B. der kleinste gemeinsame Teiler, nur für bestimmte Bereiche definiert sind. Aber da der Definitionsbereich «gut» bekannt ist, ist der partielle Charakter unwesentlich.) Bei Programmen ist i. a. die Regel «besser» bekannt als ihr Definitionsbereich. Im technischen Jargon: die Klasse der Programme ist (primitiv) rekursiv, die Definitionsbereiche sind i. a. nur rekursiv aufzählbar. (Es versteht sich von selbst, dass es sich lohnen kann, Kenntnisse des Definitionsbereiches auszunützen. Es wäre hirnrissig zu verlangen, dass alle Gleichungen für alle partiell definierten Funktionen gelten müssen! (für Kenner) z. B. müsste man $n \cdot 0 = 0$ durch $0 \cdot 0 = 0$ und $(n+1) \cdot 0 = n \cdot 0$ in der rekursiven Definition der Multiplikation ersetzen.)

Auch hier gibt es Beispiele in der üblichen Mathematik, z. B. bei der analytischen Fortsetzung in der Funktionentheorie, wo die Regel, insbesondere die Potenzreihenentwicklung in der Nähe von $z = 0$, bekannt ist, aber nicht der volle Bereich der Funktion. Aber das ist alles viel zu aufwendig, um die erwünschte Einsicht dem Gros der Programmierer klarzumachen.

(iii) Grenzen der Relevanz der in §1a erwähnten Dirichlet'schen Entdeckung (der Irrelevanz von Regeln, abgesehen vom Graphen, einer Operation). Man kann – mit beschränkten Mitteln, hier: mit Hilfe von formalen, d. h. mechanischen Programmen – mehr Funktionalgleichungen lösen, wenn die Lösung vom Programm und nicht nur vom Graphen der jeweiligen Funktionsvariablen abhängen darf. Folgendes Beispiel setzt nur die elementarsten Kenntnisse der Rekursionstheorie voraus.

X und Y seien r. a. Mengen, bestimmt durch primitiv rekursive Aufzählungen. Gesucht werden r. a. X_1 und Y_1 :

$$X_1 \cap Y_1 = \emptyset \text{ und } X_1 \cup Y_1 = X \cup Y$$

Die Operation $(X, Y) \mapsto (X_1, Y_1)$ lässt sich ohne weiteres mechanisch programmieren (und liefert Aufzählungen von X_1 und Y_1), aber nicht, wenn dazu noch die mengentheoretische Äquivalenz erhalten bleiben soll, also wenn sowohl X und X' , als auch Y und Y' dieselben Elemente haben, dies auch für X_1 und X'_1 , bzw. Y_1 und Y'_1 gilt.

Wieder liefert die übliche Mathematik analoge Beispiele, z. B. wenn – statt der Forderung einer

mechanischen Lösung – Stetigkeit m. B. a. eine passende Topologie verlangt wird. Für Kenner: es handelt sich darum, die Daten anreichern und damit das Problem auch unter zusätzlichen Forderungen an die Lösung erledigen zu können. – Übungsaufgabe. Es gibt keine global stetige Lösung für x als Funktion von (a_1, \dots, a_{n+1}) der Gleichung:

$$x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n+1} = 0$$

für die übliche Topologie des Körpers \mathbf{R} ; aber doch, für die Anreicherung der reellen Zahlen durch ihre oszillierenden Dezimalreihen und die dafür angemessene Produkttopologie.

Zusammenfassend: die allgemeinen Einsichten (i) – (iii) werden am besten durch die (elementare) Theorie der formalen Regeln oder durch Beispiele aus diesem Gebiet vermittelt.

Aber, wie z. B. die Aufgabe aus der reellen Algebra in (iii) zeigt, wird man Richtlinien für eine ergiebige Anwendung jener Einsichten – in (iii): der Anreicherung der Mengen X durch eine Aufzählung, bzw. der reellen Zahlen a durch oszillierende Dezimalbrüche – im einschlägigen Zweig der Mathematik suchen.

(b') Abschweifung zur heutigen Rolle des Begriffes der formalen Regel in der reinen Mathematik. Wie schon erwähnt, ist man davon abgekommen, (rekursive) Unentscheidbarkeit zu betonen. Ohne zu übertreiben: diese allgemeine, auch «fundamental» genannte, Eigenschaft einer Klasse von Problemen lenkt von heikleren, aber fruchtbareren Eigenschaften ab, wie z. B. von der Auswahl der betrachteten Objekte und der sie betreffenden Fragen; man denke an das Beispiel von den diophantischen Gleichungen am Ende von 2 (a).

Ganz überzeugend ist dagegen folgende Wendung, die auf Higman zurückgeht, u. zw. in seiner Arbeit 1960 zum Wortproblem für endlich präsentierte Gruppen. Er benutzt die Gedanken, die ein weniger genialer Mathematiker nur zu einem einfacheren Beweis der Unentscheidbarkeit des Wortproblems für solche Gruppen gebraucht hätte, um folgende Frage zu präzisieren und zu beantworten:

Welche endlich erzeugten Gruppen können in einer endlich präsentierten eingebettet werden? Genau jene, bei denen die Menge der Nullwörter rekursiv aufzählbar ist.

Ähnliches gilt für die (negative) Antwort auf das 10. Hilbert'sche Problem:

Welche zahlentheoretischen Prädikate sind diophantisch?

Sobald diophantische Definitionen

$x_1, \dots, x_p [P(x_1, \dots, x_p, n) = 0]$ mit zumindest 9 Variablen ($p \geq 9$) in Frage kommen, so sind alle r. a. Prädikate diophantisch definierbar. – Dies ist wohl die interessanteste bekannte Eigenschaft der Klasse aller diophantischen Definitionen. Letzten Endes ist dies wohl auch das Beste, was man heute zu einer weiteren natürlichen Frage sagen kann.

Wodurch sind die Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen ausgezeichnet?

Offenbar beruht die Nützlichkeit der Antworten (und damit der Fragen) darauf, dass wir uns leicht mit dem Begriff der rekursiv aufzählbaren Mengen, insbesondere mit ihren Abgeschlossenheitseigenschaften vertraut machen. Und dies hängt wieder damit zusammen, dass uns unser naiver Begriff des mechanischen Verfahrens vertraut ist, selbst wenn er – wie in (a) betont wurde – für die geplanten wissenschaftlichen Anwendungen nicht besonders geeignet ist.

Bemerkung. Es ist beinahe peinlich, sozusagen im selben Atemzug von Nützlichkeit in der reinen Mathematik, wie im letzten Absatz, und in der Informatik, wie in (b), zu sprechen. Denn mehr oder weniger vernünftige Menschen geben im Jahr über 250 Milliarden Schweizer Franken aus, um ihre Bedürfnisse mit Hilfe der numerischen und nichtnumerischen Datenverarbeitung zu decken. Aber als «chemisch reines» Paradigma verschiedener Probleme, die in der alltäglichen Programmierung auftreten, ist die reine Mathematik oft recht leistungsfähig.

(c) Was nun Konflikte betrifft, so besteht überhaupt keiner zwischen den «Einsichten» in §2(b) und den Übertragungsprinzipien in §1(b); und kein formaler Konflikt mit den mengentheoretischen Grundlagen. Denn z. B. oszillierende Dezimalbrüche können ohne weiteres als Mengen und partielle Funktionen als Paare von Mengen aufgefasst werden (wobei das erste Glied des Paares der Graph der Funktion und das zweite der intendierte Definitionsbereich ist). Aber man hat hier nichts von der mengentheoretischen Sprache: sie liefert hier genauso wenig Richtlinien für die richtige Auswahl wie – nach §1a – für die axiomatische Mathematik. Da leistet sogar die elementare Theorie formaler Regeln, d. h. der rekursiven Funktionen, bedeutend mehr.

Dagegen besteht ein markanter Konflikt zwischen den Eigenschaften von formalen Regeln, die für eine vernünftige Informatik, und jenen, die für die ursprünglichen grundlagentheoreti-

schen Ziele in §2a – also betr. (Beweise und) präzise Verfahren – relevant sind. Vor allem beschäftigt sich die grundlagentheoretische Literatur mit jener Stabilität, die zeigen soll, dass wir überhaupt einen deutlichen Begriff der formalen Regel haben; genauer: dass die uns als definierende Eigenschaften einleuchtenden «Definitionen» tatsächlich äquivalent sind. (Kenner werden hier unterscheiden zwischen der groben Äquivalenz für die Klasse der formal definierten Operationen und der feineren Äquivalenz zwischen den Regeln selbst.) Danach kommt die Kernfrage, ob dieser (deutliche) Begriff tatsächlich auf die geistigen Fähigkeiten des sogenannten idealisierten Mathematikers passt. Am bekanntesten sind da die Überlegungen Turings und die Einwände Gödels, nämlich, dass Turing die Wachstumsmöglichkeiten des Intellekts oder Gehirns – auf den Unterschied kommt es hier nicht an – übersehen hätte (ohne dass Gödel je spezifische Wachstumsgesetze vorschlug).

Eine vernünftige Informatik schert sich i. a. überhaupt nicht darum, ob Computer – etwa in der Mathematik – prinzipiell alles machen können, was der Mensch kann. Im Gegenteil: Computer sollen gut und billig leisten, was die Menschen nur schlecht oder teuer machen. Und da ist es ganz am Platz, nur das Ergebnis, nicht den (Denk-) Prozess zu berücksichtigen, also diesen als schwarzen Kasten zu betrachten. Die oben erwähnte Stabilität spielt in der Informatik eine recht bescheidene Rolle. Denn, wenn wir mit verschiedenen «Begriffen», also zwei Programmiersprachen verschiedener Ausdrucksfähigkeit, zu tun haben und eine Operation in beiden definierbar ist, so fragt man, welche besser funktioniert. Jene Stabilität bedeutet nur, dass wir diese Frage prinzipiell für alle – stillschweigend: rekursiven – Funktionen stellen können. Wie schon in §2 (a) angedeutet wurde, hat die heroische Frage nach den – vom idealisierten Mathematiker – verlässlich ausführbaren Regeln ein Analogon in der Informatik, u. zw. für «Analog»rechner, also idealisierte physikalische Systeme, die den bekannten Gesetzen der heutigen theoretischen Physik, etwa der Mechanik gehorchen. Es ist gar nicht selbstverständlich, dass das Verhalten solcher Systeme (kurz: hard ware) immer rekursiv ist, d. h. von einem Digitalrechner simuliert werden kann. Noch skeptischer wird man – gegenüber der heroischen Frage – wenn man bedenkt, dass selbst in den Fällen eines rekursiven Verhaltens oft ganz

spezifische Eigenschaften der physikalischen Gesetze in den Beweis eingehen. Bei dem heutigen Stand unserer Kenntnisse der geistigen Fähigkeiten des Menschen kann man bestenfalls hoffen zu zeigen, dass so plumpe «Idealisierungen» wie die der formalen Regel *nicht* stimmen. Es wird dem Leser nicht entgangen sein, dass die eben erwähnte Problematik die in §2(b') beschriebenen Anwendungen des Begriffs der formalen Regel in der reinen Mathematik überhaupt nicht berührt.

Soziologische Vermutungen. Ich habe schon lange den Eindruck, dass die Entdeckung der logischen Kalküle für die Entwicklung der mechanischen, nicht-numerischen Datenverarbeitung ganz wesentlich war; vor allem dadurch, dass sie das Vertrauen zur Möglichkeit einer solchen Mechanisierung ungeheuer bestärkte; u. zw. bedeutend mehr als etwa die algebraischen, also auch nichtnumerischen Kalküle. Aber ich wüsste nicht, wie dieser Eindruck dokumentiert werden könnte. Wenn er aber stimmt, so dürfte jenes Vertrauen mit einem Wortspiel zusammenhängen!

Denn schon die Aussagenlogik kann imponieren, wenn man sie als Lehre oder «Theorie» beliebiger Aussagen betrachtet. Man vergisst eben, wie wenig diese Theorie über Aussagen aussagt. Wenn nun – so ginge das Wortspiel – diese allgemeine Theorie mechanisiert werden kann, dann doch sicher jede Theorie von spezifischen Aussagen, z. B. die Arithmetik.

So – und vielleicht nur so – wird die lustige historische Tatsache verständlich, dass (vor 100 Jahren) Freges Formalisierung der elementaren Logik einerseits und (vor 50 Jahren) Gödels Entdeckung der Nichtformalisierbarkeit der Arithmetik andererseits beide als eine Art Wunder angesehen wurden. – Es ist also kein Wunder, dass Mathematiker, die sich mit endlichen Gruppen oder Körpern abplagen, – bewusst oder unbewusst – die Logik um ihre populären Erfolge beneiden.

II. Zum Prozess der Korrektur von Zielen

Bis jetzt ging es nur um das Ergebnis einiger solcher Korrekturen. Aus meiner eigenen Erfahrung kann ich aber auch über die Etappen zumindest einer Korrektur berichten, die mich vor genau 40 Jahren zu beschäftigen anging: sie führte von einer Kritik des (Hilbert'schen) WF-Programms schliesslich zu einer erfolgreichen Programmiertechnik.

1. Vorgeschichte

Bekanntlich haben sich schon Russell und Brouwer über den Anspruch lustig gemacht, die WF wäre eine hinreichende Bedingung für die Brauchbarkeit von (formalen) Regeln. Diese Kritik war unbefriedigend, weil sie überhaupt nichts Positives betr. die WF aussagte. Viel weniger bekannt ist die nuanciertere Kritik von Gödel und Gentzen: die WF garantiert zwar – stillschweigend: für die üblichen Systeme – die Gültigkeit von bewiesenen Allsätzen, aber nicht einmal von reinen Existenzsätzen. Dabei bezog sich die sogenannte konstruktivistische Problematik, die durch WF-Beweise erledigt werden sollte, vor allem auf brenzlige Existenzsätze und andere logisch komplizierte Aussagen. Aber auch diese Kritik führte nicht weiter. Einerseits ist die erwähnte «Rechtfertigung» der WF – als Brauchbarkeitskriterium – im Fall von Allsätzen sowieso der Gnadenschuss aufs Hilbert'sche Programm, das ja den Begriff der Gültigkeit überhaupt vermeiden und durch die WF ersetzen wollte. Andererseits hatte weder Gödel noch Gentzen einen konkreten Vorschlag für eine Bedingung, die der WF vorzuziehen wäre. Herr Bernays hat im Grundlagenbuch ein Korollar zu einem gewissen WF-Beweis, u. zw. für die elementare Logik, in den sogenannten ε -Theoremen formuliert und ihre Bedeutung für Beweise von reinen Existenzsätzen betont. Aber er hat es unterlassen, die Schwächen des WF-Programmes zu unterstreichen. Es lag also (noch) kein klarer Grund vor, den Schwerpunkt von der WF weg auf jene Korollare – genauer: passende Varianten davon – zu verschieben. Im Gegenteil: naiverweise sah man weiterhin das Hauptproblem (der Beweistheorie) darin, die WF auch für die Zahlentheorie und andere «stärkere» Systeme (als die elementare Logik) mit beschränkten metamathematischen Mitteln zu zeigen, und nicht in einem besseren Verständnis der Bedeutung des WF-Beweises für die elementare Logik und in (jener Bedeutung) angemessenen Verschärfungen.

2. Mathematische Anwendungen

Schon in den 40er Jahren stellte es sich – entgegen einer weitverbreiteten Meinung – heraus, dass grosse Teile der Mathematik, u. zw. solche, in denen brenzlige Existenzbeweise vorkommen, recht elementar formalisiert werden konn-

ten. Genauer: in der elementaren Logik, vorausgesetzt, dass gewisse gültige Allsätze als zusätzliche Prämissen benutzt werden. Dies war deshalb wichtig, weil dabei – wie schon damals betont wurde – derselbe Algorithmus für Existenzsätze herauskam; im Jargon jener Zeit: die Klasse der beweisbar rekursiven Funktionen blieb gleich.

Kurz, Beweise von Allsätzen, die fürs WF-Programm die zentrale Rolle spielen, werden hier einfach total ignoriert.

Diese neuen Einsichten führten bald zu praktischen Anwendungen der in §1 erwähnten ε -Theoreme, z. B. zu Schranken für Artins Lösung des 17. Hilbert'schen Problems (betr. Quadratsummen) und zu einer (negativen) Antwort auf Littlewoods heiklere Frage, ob die von Skewes benützte Modifikation des ursprünglichen Beweises betr. Vorzeichenwechsel von $\pi(x) - \text{li}(x)$ wirklich nötig war.

Die erwähnten Einsichten haben auch noch in jüngster Zeit neue Anwendungen gefunden, z. B. um dem einschlägigen Beweis von Jacquet und Shalika aus den 70er Jahren Schranken für $|L_\pi(1)|$ abzulesen; übrigens nachdem Landaus Beweis von $L(1, \chi)$, der eine ähnliche logische Struktur besitzt (und schon über 70 Jahre alt ist), präpariert und «ausgefaltet» worden war. Dabei wurde klar, dass mathematisch triviale Änderungen in den ursprünglichen nicht-konstruktiven Beweisen sowohl den Prozess als auch das Endergebnis jenes Ausfaltens beträchtlich beeinflussen können; im Einklang mit der Erfahrung in diesen Dingen in der üblichen mathematischen Praxis.

So gesehen, liefert hier die Logik auch Begriffe, insbesondere (logische) Komplexitäts«masse», die es gestatten, manches aus der Trickkiste der Praxis zu interpretieren und damit ihre Erfolge zu erklären – abgesehen von Lösungen alter Fragen über effektive Schranken.

Warnung. Die Nützlichkeit des ganzen Projekts (des Ausfaltens) ist in der Mathematik durch zwei Umstände eingeschränkt. Erstens einmal ist der ausgefaltete Beweis oft unergiebig, z. B. wenn die Schranken zu gross oder sonstwie unhandlich sind: in solchen Fällen ist dann eben das Ziel – oder: konstruktivistische Ideal – des Ausfaltens widerlegt. Für einen weiteren Fortschritt braucht man neue Fragen wie, z. B. am Ende von I §2a über die «Struktur» der Lösungsmenge diophantischer Gleichungen. Bei der Auswahl solcher neuer Fragen hat die Logik jedenfalls bis jetzt nicht wesentlich geholfen.

Der zweite Umstand, der den Wert einer logischen Theorie beeinträchtigt, ist ganz trivial, aber praktisch doch wichtig: begabte Mathematiker brauchen hier, ebensowenig wie in anderen Gebieten, die Krücken einer Theorie des Ausfaltens, meistens genügen ein paar gesunde geistige Reflexe. Aber gerade deshalb ist es bemerkenswert, dass jetzt schon über 30 Jahre lang immer wieder Ausnahmen vorkommen, bei denen erst versierte Logiker die «blinden Punkte» der Experten wegräumen konnten.

3. Informatik

Hier wird das Ausfalten relevant, wenn der unausgefaltete Beweis als Programm in einer höheren Programmiersprache und der ausgefaltete als computerfreundliches Programm aufgefasst werden, d. h., das Ausfalten wird für ein in der Informatik vertrautes und bewährtes Ziel verwendet: das Neue liegt darin, dass Erfahrungen aus der «höheren» Beweistheorie benützt werden. Hier fallen die beiden Einschränkungen, in der Warnung im letzten Absatz, weg. Die erste sowieso, da es auf den ausgefalteten Beweis ankommt; die zweite, wenn immer hinreichend viele Einzelfälle in der Praxis vorkommen: denn dann ist es eine Leistung, das Ausfalten mechanisiert zu haben, selbst wenn jeder Einzelfall für einen Mathematiker trivial ist.

Schon bei oberflächlicher Betrachtung dieses neuen Projekts (Mitte der 70er Jahre) ergaben sich Konflikte zwischen den Eigenschaften von Beweisumformungen, die für das Ausfalten einerseits und seinem Analogen in den Grundlagen, dem sogenannten Normalisieren (das zu kanonischen Beweisen führen soll), andererseits wichtig sind. Z. B. wird man beim Ausfalten geschickte von ungeschickten Umformungen trennen, wobei die «Geschicklichkeit» vor allem zu einem besseren, d. h. leistungsfähigeren Endergebnis führen soll. Dies steht im Gegensatz zum Ideal eines kanonischen Beweises, das bei allen Umformungsprozessen dasselbe Endergebnis fordert. Dieses Ideal legt Wert darauf, dass jeder gültige Beweis eine kanonische Form besitzt, während man in der Informatik von einem geschickten Programmierer erwartet, dass er – sei es nach formalen Kriterien, sei es mit Fingerspitzengefühl – solche Beweise auswählt, bei denen sich das Ausfalten überhaupt und dann eine passende Methode lohnt.

Zum Erfolg dieser allgemeinen Betrachtung braucht man aber vor allem praktisch wichtige

Probleme, deren Entdeckung eine noch viel heiklere Aufgabe stellt. C. A. Goad hat sie gelöst. – Für Kenner: das Programm in der höheren Programmiersprache bleibt gleich, während die ausgefalteten Programme Eigentümlichkeiten der eingegebenen Daten, z. B. Redundanzen, ausnützen.

Zusätzliche Bemerkungen. (a) Die Unterdrückung aller (Teil-)Beweise von reinen Allsätzen – und anderen Sätzen ohne algorithmischen «Gehalt» –, die schon in §2 betont wurde, hat auch hier eine Schlüsselstellung. Sonst wären nämlich formalisierte (unausgefaltete) Beweise in der «höheren» Programmiersprache zu aufwendig, um überhaupt verlässlich zu sein, und das Ausfalten selbst viel zu lang. (b) Ein gesunder Skeptizismus gegenüber der sogenannten Komplexitätstheorie war Voraussetzung für den Erfolg des Projektes. Denn bekanntlich sind – nach den in dieser Theorie üblichen Massen – alle in der Beweistheorie üblichen Umformungen praktisch unerschwinglich. Stillschweigend wird aber bei jeder dieser Methoden angenommen, dass man sich für alle Beweise in einer aus der Logik vertrauten Klasse interessiert. Eine vernünftige Informatik hat diese Fragestellung schon lange eskomptiert; vgl. hier die Einstellung der Zahlentheoretiker zu diophantischen Gleichungen (obwohl, bis jetzt, die Auswahl von Problemen in der Informatik wohl nicht so geistreich ist wie Siegels in der Zahlentheorie). Übrigens gibt es meines Wissens kein Beispiel, wo besonders gründliche Untersuchungen jener vertrauten, beweisbarerweise nutzlosen Klassen bei der Auswahl von vernünftigen Problemklassen geholfen hätten. Kurz, die Komplexitätstheorie dient – wie es in Österreich heisst – der Arbeitsplatzbeschaffung in der theoretischen Informatik; sonst wäre sie ein gutes Beispiel für Wittgensteins Warnung vor dem unheilvollen Einbruch der Logik in die Mathematik; genauer, ihr Teilgebiet: die theoretische Informatik. – Die folgenden Bemerkungen sind Warnungen vor Missverständnissen. (c) Die hier betrachtete Umformung oder Manipulation von Beweisen, d. h. Programmen, ist grundverschieden von den viel bekannteren Projekten des automatischen Beweisens oder der mechanischen Synthese von Programmen. Bei diesen sensationslüsternen Unternehmen ist der Ausgangspunkt eine Formel, z. B. eine Vermutung, die automatisch bewiesen oder widerlegt, oder ein Problem, für welches eine Lösung automatisch programmiert werden soll.

In beiden Fällen handelt es sich um typisch «schöpferische» Leistungen, die die Menschen verhältnismässig billig und gern liefern (inklusive «schöpferischen» Zielen, die sich nicht bewähren). Das Ausfallen von Beweisen und die – hier gemeinte – Umformung von Programmen sind langweilige Prozeduren, die die (meisten) Menschen nur ungern und (daher) unverlässlich ausführen. NB. Übrigens hängen jene Projekte, die traditionelle Beweistheorie fürs automatische Beweisen zu verwenden, mit dem Aberglauben zusammen, dass uns diese Theorie helfe, Beweise zu finden oder zu kontrollieren. Tatsächlich aber ist ihr Hauptziel, sogenannte abstrakte in elementare Beweise umzuformen, um jene zu rechtfertigen. In der Informatik werden die dafür entwickelten Methoden – modifiziert und – verwendet, um Programme in höheren Programmiersprachen zu «straight code» umzuformen und damit dem Computer vorzukaufen. (d) Schliesslich sei daran erinnert, dass die in I §1 (b) erwähnte axiomatische Methode der Zergliederung von Beweisen mit Hilfe von Grundstrukturen in ganz offenkundiger Weise als Modell für eine Programmiersprache mit entsprechenden Grundzeichen angesehen werden kann; nur braucht die alltägliche Informatik eher Bäume, Listen und dgl. als die spezifischen Grundstrukturen im engeren Sinne von Bourbaki, wie Gruppen, Körper usw. Dabei ist die Möglichkeit, Bäume usw. mengentheoretisch zu definieren, für die Informatik *le côté le moins intéressant*, genauso wie im Fall der axiomatischen Mathematik. – Aber auch jener, in der heutigen axiomatischen Mathematik verpönte Stil, möglichst viel in Beweisen physikalisch zu interpretieren (z. B. Definitionen als Energieintegrale, Hilfsätze als Erhaltungssätze), kann für die Informatik nützlich sein; u. zw. wenn Analogrechner eingesetzt werden sollen. Hier sind «Analogrechner» im allgemeinen Sinn gemeint: komplizierte Teilrechnungen werden mit Hilfe eines geeignet präparierten, sozusagen programmierten physikalischen Systems erledigt, dessen Verhalten – gemäss einer verlässlichen Theorie – eben jenen Rechnungen entspricht. (Wie schon in I §2 (c) erwähnt wurde, braucht das System kein Digitalrechner zu sein und kann vielleicht gar nicht von einem solchen simuliert werden.) – Kurz, es wird nicht behauptet, dass die höhere Beweistheorie, wie sie hier verwendet wird, der einzige Teil der höheren Mathematik sei, der für die Informatik nützlich ist!

III Von den Grundlagen zur Technologie

Gemeint sind in diesem Titel die traditionellen logischen Grundlagen, den die eben beschriebene Entwicklung einer Programmieretechnik nahelegt. Aber auch unabhängig von diesem spezifischen Erfolg scheint er mir aus folgendem Grund plausibel: wie sich auch die Auffassungen von den Grundlagen unterscheiden mögen, stammen die traditionellen Grundlagenfragen, etwa der alten Griechen, aus einer Zeit sehr beschränkter wissenschaftlicher Erfahrung. Sicher sind sie nicht leer. Also ist anzunehmen, dass sie für jene beschränkte Erfahrung mehr oder weniger angemessen sind; aber auch, dass das Grübeln über eine so beschränkte Erfahrung sehr bald den Punkt vom abnehmenden Ertrag erreicht. Dagegen können jene Fragen – oder genauer: die Vorstellungen hinter ihnen – wieder aktuell werden, wenn uns die Technik neue Erfahrungen, insbesondere neue Dinge verschafft, auf die die alten Vorstellungen qualitativ passen. Im Falle der elektronischen Grossrechner handelt es sich um die alte Vorstellung eines mechanischen Verfahrens. Hier sei nochmals betont, dass dies zwar auf die elektronischen Rechner zutrifft, aber es offenbleibt, ob die Mechanik der heutigen theoretischen Physik in diesem (alten) Sinn mechanisch ist! vgl. die Bemerkung in II zu Analogrechnern.

Es mag unhöflich klingen, wenn wir den traditionellen Grundlagen nachsagen, sie kümmern sich nur darum, wie sich der kleine Moritz die Dinge und das Denken vorstellt.

Mancher Philosoph – zumindest einer, der den Vorstellungen des kleinen Moritz entspricht – wird sich beleidigt fühlen. Aber gewiss nicht jene, wie Aristoteles, Leibniz, Hume usw., die sich in die Politik einmischen oder Geschäfte machen (wollen). Denn sie wissen sehr gut, dass es viel mehr kleine Moritzchen gibt als reife, also, dass ihnen eine breite Popularität bzw. ein grosser Markt sicher ist.

Andererseits wäre es m. E. verfehlt, in staunender Ehrfurcht vor den Erfolgen der primitiven Vorstellungen (des kleinen Moritz) aufzugehen, wie überhaupt vor den erfolgreichen Anwendungen der Mathematik. Denn dabei übersieht man nicht nur die vielen vergessenen Misserfolge, sondern vor allem die Phantasie und andere geistige Leistungen, die nötig sind, um fruchtbare Anwendungsgebiete auszuschöpfeln; Leistungen, die zumindest im Fall der Lo-

gik anspruchsvoller sind als die ursprünglichen mathematischen Entdeckungen. Dieser Aspekt der Forschung und, allgemeiner, des wissenschaftlichen Fortschritts scheint mir in den bekannten Schlagworten vernachlässigt zu sein, wie z. B. in den Geschichten von These – Antithese – Synthese, Verifizieren, Falsifizieren, Paradigmenwechsel (besser: Abwechslung bei Langeweile).

Die Korrektur von Zielen und, insbesondere, der Schritt von den Grundlagen zur Technologie sind manchmal entscheidender.

IV Abschliessende Bemerkungen

Für manche Leser dürfte es eine dankbare Aufgabe sein, zwei Fragen, die hier nur kurz berührt wurden, näher zu betrachten.

1. Heroische Fragen aus der Philosophie der Mathematik. Die logischen Grundlagen bieten hier nicht nur wenig, sondern bedeutend weniger als die Entwicklung innerhalb der Mathematik. Z. B. liefert m. E. die axiomatische Mathematik, mit ihrer Zergliederung von Beweisen in ein überschaubares Gefüge einprägsamer Hilfssätze über einige wenige Grundstrukturen, einfach Wesentlicheres über die tatsächlichen Beweismöglichkeiten als die logischen Sätzchen über Gültigkeit, Vollständigkeit, Unvollständigkeit u. dgl. (obwohl natürlich niemand bezweifelt, dass überzeugende Beweise u. a. auch gültig sein sollen!). Diese Situation ist – für die Mathematiker, bewusst oder unbewusst – ausgesprochen peinlich. Denn die logischen Begriffe und Sätzchen sind durchaus mathematisch sauber und unmittelbar verständlich, während die mathematische Axiomatik ihre Auswahl der Grundstrukturen (und dann die für die Zergliederung eines Beweises angemessene Auswahl spezifischer Grundstrukturen) nur durch den «Erfolg» oder bestenfalls durch ein paar, meist grunzende Hinweise auf die mathematische «Erfahrung» vermitteln kann. Es scheint mir ganz natürlich, dass diese Sprachlosigkeit der Mathematiker, was ihre eigenen (wesentlichen) Beiträge betrifft, zu einer völlig verkehrten Kritik der mathematischen Logik geführt hat. Ein Beispiel: Bekanntlich kümmert sich die Logik wenig um die Begriffe, die wir der geometrischen Anschauung, etwa des Kontinuums verdanken. Daraus wird dann – ganz gedankenlos – geschlossen, dass das Übel in

der diskret-kombinatorischen Natur der Logik liege. Aber die Logik kümmert sich auch nicht um die Auswahl angemessener diskret-kombinatorischer Grundstrukturen!

Zu beachten: auch für die heroischen Fragen in der Naturphilosophie wie etwa: Was ist (der Aufbau der) Materie? haben die Entwicklungen innerhalb der Naturwissenschaft viel mehr geleistet als logische Untersuchungen, d. h. als die Vorstellungen des kleinen Moritz. Hier wäre das Analogon zum logischen Ideal, mit der Gültigkeit etwa von Beweisen, anzufangen und dann, schrittweise, auf tatsächlich überzeugende einzuschränken, dies: die Gesamtheit aller möglichen Welten zu analysieren und dann, schrittweise, zur tatsächlichen Welt und ihren Gesetzen zu kommen. So ging es nicht... Es ist geradezu grotesk, wie selbstgefällig die Logiker über alle möglichen Welten reden, wo doch die Hauptfolge der Physik darin bestehen, unsere Welt und ihre Besonderheiten zu verstehen.

2. Zum Prozess der Korrektur von Zielen wurde in Teil II nur ein einziges Beispiel, sozusagen eine Anekdote, angeführt. Aber es scheint mir der Mühe wert, auch ein paar anderen Beispielen nachzugehen. Denn einerseits ist zumindest die logische Forschung in den letzten 50 Jahren noch durchaus überschaubar; z. B. sind Misserfolge noch nicht vergessen. Andererseits drängen sich, schon in diesem Gebiet, Fragen von allgemeinem Interesse auf: Welche Rolle spielt die Planung, sozusagen die künstliche Züchtung, die durch Schlagworte andere zur Mitarbeit anzog? Welche Rolle spielte die sogenannte wissenschaftliche Freiheit, sozusagen verschwenderisch eine Fülle von Varianten zu produzieren und für sie zu werben, bei welchen dann durch natürliche Auslese die angemessenen von den Fehlentwicklungen unterschieden wurden. Gerade deshalb, weil diese (soziologischen) Fragen die Weltgeschichte kaum berühren, also weil nicht gar zu viele Querverbindungen bestehen, könnte man hoffen, hier eine vielleicht bescheidene, aber zumindest verlässliche Einsicht in den Wissenschaftsbetrieb zu gewinnen.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Georg Kreisel, F.R.S.
Dept. of Philosophy, Stanford University
Stanford, California/USA