

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.  
Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société  
Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative  
= Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 154 (1974)

**Vereinsnachrichten:** Sektion für Mathematik

**Autor:** [s.n.]

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 13. Sektion für Mathematik

Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
Société Mathématique Suisse  
Società Svizzera di Matematica

Präsident: Prof. André Haefliger, 11, route de Divonne, 1260 Nyon  
Sekretär: Prof. André Delessert, 1099 Servion

Wissenschaftliche Sitzung / Séance scientifique

Samstag, 12. Oktober / Samedi 12 octobre

1. F. Borel: Sur les H-espaces à groupe fondamental fini
2. S. Conod, M. Favre, P. de la Harpe (Lausanne): Sur le deuxième nombre de Betti des algèbres de Lie nilpotentes et les suites du type (2, 8, 20, 40, 70, ...)

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $C$  de dimension  $n$ ,  $\text{Lie}(E) = \bigoplus_{k \geq 1} L^k$  son algèbre de Lie libre graduée canoniquement, et  $C^p \text{Lie}(E)$  les termes de sa suite centrale descendante. On note  $\mathfrak{m}(E, p)$  le quotient de  $\text{Lie}(E)$  par  $C^{p+1} \text{Lie}(E)$  où  $p = 1, 2, 3, \dots$ ; on l'appelle modèle de type  $n$  et de classe  $p$ , et on sait qu'il joue un rôle important dans l'étude des algèbres de Lie nilpotentes (voir par exemple les thèses de D. Amiguet et G. Favre).

Nous montrons que le deuxième espace de cohomologie de  $\mathfrak{m}(E, p)$  à coefficients scalaires triviaux est canoniquement isomorphe au dual de  $L^{p+1}$ ; on en déduit par exemple que le deuxième nombre de Betti  $b_2(\mathfrak{m}(E, 2))$  des modèles de classe 2 vaut  $\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$ , ce qui excuse notre titre.

On en déduit aussi une borne supérieure pour  $b_2(\mathfrak{q})$  valable pour toute algèbre de Lie nilpotente complexe; cette borne s'exprime en fonction de  $m = \dim(\mathfrak{q})$  et de  $n = \dim(\mathfrak{q}/[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}])$ . Plus précisément:

$$b_2(\mathfrak{q}) \leq (n-1) \left( m - \frac{n}{2} \right) - S$$

où l'on doit prendre  $S = 0$  si  $\mathfrak{q}$  est abélienne et où l'on peut prendre

$$S = n-2, \text{ ou même } S = \sup_{1 \leq k \leq K} (k(n-1-k)) \text{ avec}$$

$$K \leq \min \left( \frac{n}{2}, \dim(C^2 \mathfrak{q} / C^3 \mathfrak{q}) \right) \text{ dans les autres cas.}$$

D'où évidemment (via les travaux de Matsushima et Nomizu) la même borne supérieure pour le deuxième nombre de Betti  $b_2(M)$  d'une variété nilpotente compacte  $M$  («nilmanifold») en fonction de  $m = \dim(M)$  et de  $n = b_1(M)$ . Quelques exemples montrent que cette borne supérieure peut être atteinte.

#### Références

Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, chapitre 2.

Favre, G.: Système de poids sur une algèbre de Lie nilpotente; Manuscripta math. 9 (1973) 53–90.

Matsushima, Y.: On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups; Nagoya Math. J. 2 (1951) 95–110.

Nomizu, K.: On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups; Ann. of Math. 59 (1954) 531–538.

3. F. Ronga: Singularités d'applications équivariantes

4. **M. Huber (Zürich): Moduln über Dedekindringen und Satz von Stein-Serre**

Für einen kommutativen Ring  $R$  werden Klassen  $C$  von  $R$ -Moduln mit folgender Eigenschaft gesucht:

Ist  $A$  ein  $R$ -Modul mit  $\text{Hom}_R(A, R) \in C$  und  $\text{Ext}_R(A, R) \in C$ , so ist auch  $A \in C$ .

Beschränkt man sich auf Dedekindringe  $R$  mit  $\text{Ext}_R(Q, R) \neq 0$ , wo  $Q$  den Quotientenkörper von  $R$  bezeichnet, so erhält man mit Hilfe von Mächtigkeitsbetrachtungen Klassen der gesuchten Art. Die Bedingung  $\text{Ext}_R(Q, R) \neq 0$  ist dann und nur dann erfüllt, wenn für Moduln über  $R$  der (verallgemeinerte) Satz von Stein-Serre gilt:

Ist  $A$  ein  $R$ -Modul von abzählbarem Rang mit  $\text{Ext}_R(A, R) = 0$ , so ist  $A$  projektiv.

5. O. Burlet: Sur une classe d'applications différentiables génériques.

6. J.-C. Hausmann: Sur la classification des sphères d'homotopie.

7. M.-A. Knus: Le cocycle de Teichmüller.

8. **Pierre de la Harpe (Lausanne): Sous-groupes distingués du groupe général linéaire d'un espace de Hilbert**

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe, séparable et de dimension infinie. Soient  $L(H)$  l'anneau des opérateurs linéaires bornés sur  $H$  et  $GL(H)$  son groupe des unités. Si  $q$  est un idéal bilatère de  $L(H)$ , nous notons  $\pi_q$  la restriction à  $GL(H)$  de la projection canonique de  $L(H)$  sur  $L(H)/q$ ; nous écrivons alors  $GL(H, q)$  et  $GE(H, q)$  les images inverses par  $\pi_q$  de l'identité et du centre dans le groupe des unités de  $L(H)/q$ . Soient enfin  $C$  l'idéal des opérateurs compacts dans  $L(H)$ ,  $C_0$  l'idéal des opérateurs

de rang fini, et  $SL(H, C_0)$  le groupe dérivé de  $GL(H, C_0)$ . Le résultat principal de notre travail s'exprime comme suit.

**Proposition.** Soit  $G$  un sous-groupe distingué non trivial de  $GL(H)$ .

Alors:

- (i) ou bien  $G$  est central et s'identifie à un sous-groupe du groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls  $C^*$ ,
- (ii) ou bien  $SL(H, C_0) \subset G \subset GE(H, C_0)$ .

Si l'on considère maintenant  $GL(H)$  comme muni de la topologie définie par la norme usuelle sur  $L(H)$ , on obtient facilement (puisque  $C$  est l'adhérence de  $C_0$ ):

**Corollaire.** Soit  $G$  un sous-groupe distingué non trivial fermé de  $GL(H)$ .

Alors:

- (i) ou bien  $G$  est central et s'identifie à un sous-groupe fermé de  $C^*$ ,
- (ii) ou bien  $G$  est un sous-groupe de congruence selon l'idéal  $C$ :  
 $GL(H, C) \subset G \subset GE(H, C)$   
et  $G/GL(H, C)$  est un sous-groupe fermé de  $GE(H, C)/GL(H, C)$ ,  
donc un sous-groupe fermé de  $C^*$ .

La preuve de la proposition utilise principalement les ingrédients suivants: 1° Un lemme crucial de Brown et Percy caractérisant les opérateurs de  $GL(H)$  qui n'appartiennent pas à  $GE(H, C)$ ; voir le corollaire 3.4 de [1]. 2° L'isomorphisme (non naturel) de  $GL(H)$  avec le groupe  $GL_2(L(H))$  des  $(2 \times 2)$ -matrices inversibles à coefficients dans l'anneau  $L(H)$ , c'est-à-dire avec le groupe  $GL(H \oplus H)$ . 3° Le résultat classique selon lequel tout idéal bilatère non trivial de  $L(H)$  contient  $C_0$  et est contenu dans  $C$ ; voir le lemme 11 et le théorème 11 du chapitre I dans [2]. 4° Un résultat technique apparemment nouveau sur les sous-groupes distingués de  $GL_2(A)$ , où  $A$  appartient à une très large classe d'anneaux contenant  $L(H)$ . 5° Le fait que  $GL(H)$  s'identifie à son groupe des commutateurs et qu'il est algébriquement engendré par un voisinage convenable de l'identité dans l'algèbre normée  $L(H)$ ; voir par exemple le problème 192 dans [3], et se rappeler que le groupe  $GL(H)$  muni de la norme usuelle pour les opérateurs est un groupe topologique connexe.

Le corollaire lui-même était déjà connu: c'est un résultat dû à Kadison [4], dont la preuve originale est très différente de celle mentionnée ci-dessus. On voudra bien se référer à [5] pour une rédaction détaillée du travail annoncé dans cette note.

#### Références

1. Brown, A. et Percy, C.: Structure of commutators of operators. Ann. of Math. 82 (1965) 112-127.
2. Schatten, R.: Norm ideals of completely continuous operators. Springer 1960.
3. Halmos, P. R.: A Hilbert space problem book. Van Nostrand 1967.
4. Kadison, R. V.: Infinite general linear groups. Trans. AMS 76 (1954) 66-91.
5. de la Harpe, P.: Invariant subgroups in the general linear group of a Hilbert space. Septembre 1973 (non publié).

Nous remercions le Fonds national suisse pour la recherche scientifique, qui a supporté notre travail.



**9. Sophie Piccard (Neuchâtel): Quelques propriétés du groupe saturé des transformations périodiques de période  $n$  ( $n = \text{entier} \geq 2$ ) de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers rationnels**

Résumé. On étudie le groupe de toutes les transformations périodiques de période entière  $n \geq 2$  quelconque de  $\mathbb{Z}$  et on établit quelques résultats généraux relatifs à ce groupe qui est fondamental de rang 2 et qui possède un treillis distributif de sous-groupes invariants.

Soit  $n$  un entier fixe  $\geq 2$ . Une transformation périodique  $t$ , de période  $n$ , de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers rationnels (t.p.p.  $n$ ) est une application bijective de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  sur lui-même qui fait passer de tout entier rationnel  $z$  à son image  $t(z)$  de façon que  $t(z + z'n) = t(z) + z'n$ , quels que soient  $z$  et  $z' \in \mathbb{Z}$ .

Le produit de deux t.p.p.  $n$  est une t.p.p.  $n$ , l'inverse d'une t.p.p.  $n$  est une t.p.p.  $n$ , de sorte que l'ensemble de toutes les t.p.p.  $n$  de  $\mathbb{Z}$  est un groupe noté  $G_{sn}$ , appelé le groupe saturé des t.p.p.  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

Un ensemble  $A$  de générateurs d'un groupe multiplicatif  $G$  est dit irréductible au sens strict si, quelle que soit la partie finie  $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $k \geq 1$ , de  $A$  et quelle que soit la partie finie  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$  de  $G$ , de puissance  $l < k$ , l'ensemble  $(A - A_1) \cup B$  n'est pas générateur du groupe  $G$ . Le groupe  $G$  est dit fondamental s'il possède au moins un ensemble irréductible au sens strict de générateurs et tout ensemble irréductible au sens strict de générateurs de  $G$  constitue une base de ce groupe. La puissance d'une base d'un groupe fondamental est un invariant du groupe, appelé le rang du groupe fondamental.

On démontrera que le groupe  $G_{sn}$  est fondamental de rang 2, quel que soit l'entier  $n \geq 2$ . Quel que soit l'élément  $t$  de  $G_{sn}$  et quels que soient les entiers  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $i \not\equiv j \pmod{n}$ , on a  $t(i) \not\equiv t(j) \pmod{n}$ . Il s'ensuit que quels que soient les entiers  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , présentant tous les restes possibles modulo  $n$ , la transformation  $t$  est bien définie par les nombres  $t(i_1) = j_1, \dots, t(i_n) = j_n$ . En particulier on peut prendre  $i_1 = 0, i_2 = 1, \dots, i_n = n-1$ ; on représente alors  $t$  par le symbole

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ t(0) & t(1) & \dots & t(n-1) \end{pmatrix}_n.$$

Soit  $t(l) = i_l + j_l n$ , où  $i_l, j_l \in \mathbb{Z}$  et où  $0 \leq i_l \leq n-1$ ,  $l = 0, 1, \dots, n-1$ . L'élément  $t$  prend alors la forme

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 + j_0 n & i_1 + j_1 n & \dots & i_{n-1} + j_{n-1} n \end{pmatrix}_n,$$

où  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  est une permutation des nombres  $0, 1, \dots, n-1$  et  $j_0, j_1, \dots, j_{n-1}$  sont  $n$  entiers rationnels quelconques. Soit  $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique des substitutions des éléments de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Un élément quelconque du groupe  $\mathfrak{S}_n$  est de la forme

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Il existe un homomorphisme entre les deux groupes  $G_{sn}$  et  $\mathfrak{S}_n$ . On dit que la substitution  $s$  est associée à la transformation  $t$  si la permutation  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  est la même dans  $s$  et dans  $t$ . On répartit les éléments de  $G_{sn}$  en deux classes d'équivalence: celle des éléments pairs et celle des éléments impairs. On dit qu'une transformation  $t$  de  $G_{sn}$  est paire si la substitution associée  $s$  est de classe paire,  $t$  est dite impaire si la substitution associée  $s$  est de classe impaire.

L'ensemble des t.p.p.  $n$  paires de  $\mathbb{Z}$  forme un sous-groupe invariant maximal d'index 2 du groupe  $G_{sn}$ . Soient

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 + j_0 n & i_1 + j_1 n & \dots & i_{n-1} + j_{n-1} n \end{pmatrix}_n$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i'_0 + j'_0 n & i'_1 + j'_1 n & \dots & i'_{n-1} + j'_{n-1} n \end{pmatrix}_n$$

deux t.p.p.  $n$  quelconques de  $\mathbb{Z}$  et soit  $t_1 t_2 = t_3$  le produit de  $t_1$  à droite par  $t_2$ .  $t_3$  est une t.p.p.  $n$  de  $\mathbb{Z}$  de la forme

$$t_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i''_0 + j''_0 n & i''_1 + j''_1 n & \dots & i''_{n-1} + j''_{n-1} n \end{pmatrix}_n,$$

où  $i''_0, i''_1, \dots, i''_{n-1}$  sont définis par l'égalité

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i'_1 & i'_2 & \dots & i'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i''_0 & i''_1 & \dots & i''_{n-1} \end{pmatrix}$$

donnant la valeur du produit de la substitution de  $\mathfrak{S}_n$  associée à  $t_1$  par la substitution du même groupe associée à  $t_2$ . Quant à  $j''_0, j''_1, \dots, j''_{n-1}$ , ce sont des éléments de  $\mathbb{Z}$ , tels que

$$\sum_{l=0}^{n-1} j_l + \sum_{l=0}^{n-1} j'_l = \sum_{l=0}^{n-1} j''_l.$$

On déduit de cette propriété l'existence d'un ensemble dénombrable de sous-groupes invariants de  $G_{sn}$ . Notamment quel que soit l'entier  $m \geq 2$ , l'ensemble  $G_m$  des éléments de  $G_{sn}$  de la forme

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 + j_0 n & i_1 + j_1 n & \dots & i_{n-1} + j_{n-1} n \end{pmatrix}_n,$$

où  $j_0 + j_1 + \dots + j_{n-1} \equiv 0 \pmod{m}$ , est un sous-groupe invariant d'index  $m$  de  $G_{sn}$ . Quel que soit  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , appelons  $t_i^*$  l'élément de  $G_{sn}$  défini par la formule

$$t_i^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & & i+1 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & \dots & i-1 & i+n & i+1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}_n.$$

Les éléments  $t_0^*, t_1^*, \dots, t_{n-1}^*$  sont commutables deux à deux et ils engendrent un groupe abélien libre de rang  $n$  dont ils forment un ensemble de générateurs libres. Donc, quel que soit l'entier  $n \geq 2$ , le groupe  $G_{sn}$  possède un sous-groupe abélien libre de rang  $n$ .

Soit  $\mathfrak{S}_n^*$  le sous-groupe de  $G_{sn}$  formé de tous les éléments

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix}_n$$

où  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  est une permutation quelconque des nombres  $0, 1, \dots, n-1$ . La substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n.$$

Les deux groupes  $\mathfrak{S}_n^*$  et  $\mathfrak{S}_n$  sont isomorphes. Tout élément du groupe  $G_{sn}$ :

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 + j_0 n & i_1 + j_1 n & \dots & i_{n-1} + j_{n-1} n \end{pmatrix}_n$$

peut se mettre sous la forme d'un produit de l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix}_n$$

de  $\mathfrak{S}_n^*$  par un produit de puissances entières des éléments  $t_0^*, t_1^*, \dots, t_{n-1}^*$ . On a notamment

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix}_n t_0^{*j_0} \dots t_{n-1}^{*j_{n-1}}.$$

Pour qu'un élément  $t$  de  $G_{sn}$  soit central, il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ kn & 1+kn & \dots & n-1+kn \end{pmatrix}_n = t_0^{*k} t_1^{*k} \dots t_{n-1}^{*k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il s'ensuit que le centre de  $G_{sn}$  est le groupe cyclique engendré par l'élément  $t_0^* t_1^* \dots t_{n-1}^*$ . On sait (voir Publications du Séminaire de Géométrie de l'Université de Neuchâtel, Série III, vol. 1) que le groupe  $G_{s2}$  est fondamental de rang 2. Montrons que, quel que soit l'entier  $n \geq 3$ , le groupe  $G_{sn}$  est également fondamental de rang 2. On démontre sans peine que le groupe  $G_{sn}$  n'est pas cyclique. Montrons que, quel que soit l'entier  $n \geq 3$ , le groupe  $G_{sn}$  est engendré par les deux éléments

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}_n \text{ et } t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}_n.$$

En effet, on a, d'une part,

$$t_1^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ n & 1+n & 2+n & \dots & n-1+n \end{pmatrix}_n = t_0^* t_1^* \dots t_{n-1}^*.$$

D'autre part, on a

$$t_1 t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}_n, (t_1 t_2)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n & 1 & 2+n & \dots & n-1+n \end{pmatrix}_n =$$

$$= t_0^* t_2^* \dots t_{n-1}^*,$$

$$t_1^n (t_1 t_2)^{-n+1} = t_1^* t_1^{-1} t_1^* t_1 = t_0^*, t_1^i t_1^* t_1^{-i} = t_{1+i}^*,$$

$i = 1, 2, \dots, n-2$ . Donc les  $n$  éléments  $t_i^*, i = 0, 1, \dots, n-1$  sont engendrés par composition finie des éléments  $t_1$  et  $t_2$ . Or

$$t_1 t_{n-1}^{*-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 \end{pmatrix}_n.$$

Les deux substitutions

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

sont, comme on sait, génératrices du groupe  $\mathfrak{S}_n$  et, en vertu de l'isomorphisme des groupes  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathfrak{S}_n^*$ , les éléments  $t_1 t_{n-1}^{*-1}$  et  $t_2$  engendrent le groupe  $\mathfrak{S}_n^*$ . Or, d'après ce qui précède, tout élément du groupe  $G_{sn}$  peut se mettre sous la forme d'un produit d'un élément de  $\mathfrak{S}_n^*$  par un produit de puissances entières des éléments  $t_0^*, t_1^*, \dots, t_{n-1}^*$ . Donc tout élément de  $G_{sn}$  peut être obtenu par composition finie des deux éléments  $t_1$  et  $t_2$  qui sont bien générateurs du groupe  $G_{sn}$ . Il s'ensuit que le groupe  $G_{sn}$  est fondamental de rang 2 et que le couple d'éléments  $t_1, t_2$  en constitue une base, quel que soit l'entier  $n \geq 2$ .

**10. T. Rychener: Riesz-Potentiale von Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation**

**11. H.-M. Maire (Genève): Image de fonctions généralisées et distributions invariantes**

Résumé. Soit  $F$  une fonction analytique réelle sur un ouvert relativement compact de  $\mathbf{R}^n$ . Il existe une application  $F^*$ , généralisant l'image réciproque des fonctions  $C^\infty$ , définie sur un espace de fonctions généralisées.

L'image de  $F^*$  est formée de distributions invariantes par les difféomorphismes conservant  $F$ .

Soient  $N$  et  $n$  deux entiers  $\geq 1$  et  $c < d$  deux nombres réels. Nous noterons  $\mathcal{A}^{N,n}([c,d])$  le sous-espace de  $C^\infty(R^*)$  formé des fonctions  $f$  à valeurs complexes, nulles pour  $t < c$  et  $t > d$ , admettant en 0 un double développement asymptotique de la forme

$$f(t) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \sum_{0 < k \leq n} a_{jk}^\pm |t|^{(j-N)/N} (\log |t|)^{k-1}, \quad \pm t > 0,$$

dérivable terme à terme. Nous munirons l'espace  $\mathcal{A}^{N,n}([c,d])$  de la topologie engendrée par les semi-normes

$$f \rightarrow |a_{jk}^\pm|, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < k \leq n,$$

$$f \rightarrow \sup_{0 \neq t \in [c,d]} |D^l(f(t) - A_h f(t))|, \quad 0 \leq l \text{ entier} \leq h \in \mathbb{N},$$

où  $A_h f(t) = \sum_{j \leq (h+1)N} \sum_{0 < k \leq n} a_{jk}^\pm |t|^{j-N/N} (\log |t|)^{k-1}$ , si  $\pm t > 0$ . Avec cette

topologie,  $\mathcal{A}^{N,n}([c,d])$  devient un espace de Fréchet-Montel.

Lorsque  $J$  est l'un des intervalles  $[\alpha, 0]$ ,  $[0, \beta[$ ,  $[\alpha, \beta[$  où  $\alpha < 0 < \beta$ , l'espace  $\mathcal{A}^{N,n}(J)$  des fonctions test singulières de type  $(N, n)$  est défini par la limite inductive des  $\mathcal{A}^{N,n}([c,d])$ , pour  $c \leq 0 \leq d$  et  $[c,d] \subset J$ . C'est un espace de Montel complet; son dual, noté  $\mathcal{A}'^{N,n}(J)$ , est par définition l'espace des fonctions généralisées singulières de type  $(N, n)$ .

Soit  $F$  une fonction analytique réelle définie sur un ouvert  $U$  relativement compact de  $\mathbb{R}^n$  telle que 0 soit la seule valeur critique de  $F$  et que  $F(U)$  soit un intervalle  $J$  comme ci-dessus. On sait que les valeurs critiques de  $F$  sont isolées, donc ces hypothèses ne sont pas trop restrictives.

L'application image directe des distributions à support compact  $F_*: \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{E}'(R)$  (cf. [3]) donne par restriction une application, notée encore  $F_*$ , de  $\mathcal{D}(U)$  dans  $\mathcal{E}'(R)$ . Dans [2], P. Jeanquartier a montré qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $F_*(\mathcal{D}(U))$  s'identifie à un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}^{N,n}(J)$  et que l'application (encore notée  $F_*$ )  $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}^{N,n}(J)$  est linéaire continue. La démonstration de ce résultat repose sur le théorème de résolution de Hironaka.

Nous redémontrons ces affirmations en considérant le prolongement analytique méromorphe dans  $\mathbb{C}$  de la distribution  $F^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  sur  $U_+ = \{x \in U; F(x) \geq 0\}$  (cf. [1]). De plus, nous obtenons le résultat suivant:

**Théorème.** L'espace vectoriel  $\mathcal{A}_F(U) = F_*(\mathcal{D}(U))$  est fermé dans  $\mathcal{A}^{N,n}(J)$  et il existe une section linéaire continue de  $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}_F(U)$ . En particulier, la transposée  $F^*$  de cette application est injective et son image, notée  $\mathcal{D}'_F(U)$ , est facteur direct de  $\mathcal{D}'(U)$ .

Les distributions appartenant à  $\mathcal{D}'_F(U)$  sont invariantes par tout difféomorphisme local de  $U$  conservant  $F$ . Dans certains cas particuliers, on sait montrer qu'il n'y a pas d'autres distributions invariantes que ces images réciproques de fonctions généralisées.

## Références

1. Atiyah, M.F.: Comm. on pure and applied Math. 23 (1970) 145–150.
2. Jeanquartier, P.: C.R.Acad.Sc. 271 (1970) 1159–1161.
3. Schwartz, L.: Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.

12. P.-L. Aubert: W-algèbre et produit croisé.

13. A. Banyaga: Sur le groupe des difféomorphismes symplectiques.

14. N. Medici: Construction d'éléments finis bidimensionnels de classe  $C^1$ .

15. W. Meier (Zürich): **Phantomabbildungen und klassifizierende Räume**

Unter den Abbildungen von einem unendlichen CW-Komplex  $X$  in einen topologischen Raum  $B$  werden diejenigen betrachtet, die auf jedem Gerüst  $X^n$  von  $X$  nullhomotop, aber auf ganz  $X$  wesentlich sind.

Solche Abbildungen werden Phantomabbildungen genannt.

Von einem Satz von Milnor ausgehend, werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Phantomabbildungen in Form eines Konvergenzkriteriums für die von Dold verallgemeinerte Atiyah-Hirzebruch-Spektralreihe für den Funktor  $[\sum -, B]$  hergeleitet.

Dieses Kriterium wird in eine Rangbedingung abgewandelt, mit deren Hilfe eine Verallgemeinerung eines Satzes von Buhstaber und Miscenko bewiesen wird.

Die erhaltenen Sätze werden mit einer Methode von B.I. Gray auf konkrete Probleme angewendet. Damit ergeben sich klassische und neue Beispiele von Phantomabbildungen.

16. C. Kratzer: L-théorie d'un anneau de matrices.