Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 152 (1972)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

12. Sektion für Mathematik

Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Präsident: Prof. Dr. ERNST SPECKER, Mathematisches Seminar der ETH, Leonhardstrasse 33, 8006 Zürich
Sekretär: Prof. Dr. HEINRICH KLEISLI, Mathematisches Institut der Universität, 1700 Freiburg

Samstag, 14. Oktober

1. R. CICUREL: *Actions algébriques avec orbites ouvertes*

2. J. DUPERTUIS: *L'homomorphisme de suspension pour les sphères*

3. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel): *Quelques résultats de la théorie des groupes*

Nous avons étudié la structure du groupe multiplicatif abstrait $*G$ engendré par le couple d'éléments t, t' liés par l'ensemble exhaustif des deux relations caractéristiques (1) $t'^2 t = tt'^2$ et (2) $tt'^{-1} = t't^{-1}$. On déduit sans peine des relations (1) et (2) la relation (3) $(tt')^2 = (t't)^2$ et il ressort des trois relations (1)-(3) que le groupe $*G$ se compose des éléments (tous distincts) $t^k t'^1$, k, $1 \in Z$. On peut répartir les éléments de $*G$ en deux classes d'équivalnece, l'une C_0 formée de tous les éléments de $*G$ dits pairs de la forme $t^u t'^{2v}$, l'autre C_1 formée de tous les éléments de $*G$ dits impairs de la forme $t^u t'^{2v+1}$, u, $v \in Z$. Le produit de deux éléments de même classe est un élément pair de $*G$, alors que le produit de deux éléments de classe différente est un élément impair de $*G$. Deux éléments pairs de $*G$ sont commutables et l'ensemble des éléments de classe C_0 de $*G$ est un sous-groupe invariant et maximal d'index 2 de $*G$. Ce sous-groupe noté $*G_1$ est abélien libre de rang 2. Il est engendré entre autres par les deux éléments t et t'^2 qui forment un couple de générateurs libres de $*G_1$. $*G$ possède deux autres sous-groupes invariants et maximaux d'index 2, non abéliens et non libres. Ce sont d'une part le sous-groupe $*G_2$ formé de tous les éléments pairs de $*G$ de la forme $t^{2u} t'^{2v}$ et de tous les éléments impairs de la forme $t^{2u'+1} t'^{2v'+1}$, u, v, u', $v' \in Z$. Ce sous-groupe non cyclique est fondamental de rang 3, il ne possède aucun couple d'éléments générateurs mais il possède une infinité dénombrable de triplets de générateurs, parmi lesquels le triplet t^2, t'^2 et tt'. Le troisième sous-groupe invariant et maximal d'index 2 de $*G$ est l'ensemble $*G_3$ de tous les éléments pairs de $*G$ de la forme $t^{2u}t'^{2v}$ et de tous les éléments impairs de la forme $t^{2u'}t'^{2v'+1}$, $u, v, u', v' \in Z$. Ce sous-groupe est fondamental de rang 2. Parmi les couples de générateurs de $*G_3$ signalons les couples de la forme $t_1 = t^{\pm 2}t'^{\pm 2}$, $t_2 = t^{2u'}t'^{2v'+1}$, couples qui sont liés par la seule relation caractéristique

$$t_1 t_2 = t_2 t_1^{-1}$$

ce qui montre que le sous-groupe $*G_3$ de $*G$ est isomorphe au groupe abstrait G auquel est consacré le fasc. 6, Série I, des Publ. du Sém. de Géom. de l'Université de Neuchâtel. Pour que deux éléments $t^* = t^u t'^{2v}$ et $t^{**} = t^{u'}t'^{2v'}$, $u, v, u', v' \in Z$, constituent une base du groupe $*G_1$ il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix} = \pm 1$$

Tout élément pair $\neq 1$ de $*G$ est d'ordre infini. Un élément impair de $*G$ est soit d'ordre infini, soit du second ordre. Pour qu'un élément impair t_2 de $*G$ soit du second ordre, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $t_2 = t^{2u+1}t'^{-2u-1}$, $u \in Z$. Des relations caractéristiques (1) et (2) reliant les deux générateurs t et t' de $*G$ on déduit les relations (4) $t'^{2v}t^u = t^u t'^{2v}$, $u, v \in Z$, (5) $tt' = t'^3 t^{-1}$, (6) $t't^n = t^{-n}t'^{1+2n}$ quel que soit $n \in Z$. Tout élément pair $t_1 = t^u t'^{2v}$ de $*G$ est lié à tout élément impair d'ordre infini $t_2 = t^{u'}t'^{2v'+1}$ de $*G$ par les relations

$$t_2^2 t_1 = t_1 t_2^2 \ , \ (t_1 t_2)^2 = (t_2 t_1)^2 \ ,$$
$$t_2 t_1^{(u'+2v'+1)/d} = t_1^{-(u'+2v'+1)/d} t_2^{2(u+2v)/d+1}$$

où d désigne le p.g.c.d. de $u+2v$ et de $u'+2v'+1$. Si $u'+2v'+1 = +1$ ou -1, la relation $(t_1 t_2)^2 = (t_2 t_1)^2$ est une conséquence des deux autres. Un élément pair $t_1 = t^u t'^{2v}$ de $*G$ est lié à un élément impair du second ordre $t_2 = t^{2u'+1}t'^{-2u'-1}$ par les relations $(t_1 t_2)^2 = (t_2 t_1)^2$ et $t_2^2 = 1$. Deux éléments impairs d'ordre infini chacun $t_1 = t^u t'^{2v+1}$, $t_2 = t^{u'}t'^{2v'+1}$, $u+2v+1 \neq 0$, $u'+2v'+1 \neq 0$, sont liés par les relations caractéristiques

$$t_1^2 t_2 = t_2 t_1^2 \ , \ t_2^2 t_1 = t_1 t_2^2 \ , \ t_1^{2(u'+2v'+1)/d} = t_2^{2(u+2v+1)/d}$$

où d désigne le p.g.c.d. des nombres $u+2v+1$ et $u'+2v'+1$.

Deux éléments impairs de $*G$:

$$t_1 = t^u t'^{2v+1} (u+2v+1 \neq 0), \ t_2 = t^{2u'+1}t'^{-2u'-1}$$

dont un et un seul est du second ordre, sont liés par les relations caractéristiques

$$t_1^2 t_2 = t_2 t_1^2 \text{ et } t_2^2 = 1$$

Toute base du groupe $*G$ contient au moins un élément impair qui peut être d'ordre infini ou du second ordre, mais les deux éléments d'une base ne sauraient être impairs du second ordre. L'ensemble des bases du groupe $*G$ est dénombrable. Nous appelons chaîne normale de sous-groupes d'un groupe dénombrable G toute suite dénombrable G_0, G_1, $G_2, \ldots$ de sous-groupes de G, tels que $G_0 = G$ et que G_i est un sous-groupe invariant et maximal propre de G_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots$ Le groupe $*G$ possède un ensemble de la puissance du continu de chaînes normales de sous-groupes dont le second élément est l'un quelconque des trois sous-groupes $*G_j, j = 1, 2, 3$. L'ensemble des automorphismes intérieurs de $*G$ est dénombrable et il en est de même de l'ensemble de ses automorphismes extérieurs. Une méthode efficace pour rechercher les automorphismes d'un groupe multiplicatif fondamental de rang fini consiste à ordonner des différentes façons possibles les éléments de chaque base de G et de former ainsi ce qu'on appelle des bases ordonnées de G, puis de répartir les bases ordonnées en classes d'équivalence, deux bases ordonnées faisant partie d'une même classe si l'on peut appliquer l'une de ces bases sur l'autre de façon que toute relation entre les éléments de la première base se transforme en une relation entre les éléments de la seconde base quand on y remplace tout élément de la première base par son homologue de la seconde et vice versa on passe de façon analogue de toute relation entre les éléments de la seconde base à une relation entre les éléments correspondants de la première base. Pour déterminer tous les automorphismes du groupe G, il suffit de connaître une classe d'équivalence de bases ordonnées de G. On part d'un représentant fixe d'ailleurs quelconque de cette classe. Tout automorphisme de G transforme la base fixe envisagée en une base de même classe, deux automorphismes distincts font passer de la base fixe considérée à deux bases distinctes de la même classe et il existe un automorphisme de G qui fait passer de la base fixe envisagée à toute autre base ordonnée de la même classe. En transformant la base fixe par tous les éléments de G on détermine tous les automorphismes intérieurs de G et on peut affirmer que le groupe G possède des automorphismes extérieurs si l'ensemble des transformées de la base fixe par les éléments de G n'épuise pas la classe d'équivalence dont fait partie la base fixe envisagée. C'est par cette méthode que nous avons trouvé tous les automorphismes du groupe $*G$. Le centre de $*G$ est le groupe cyclique engendré par l'élément t'^2 et le sous-groupe commutateur $*G'$ de $*G$ est le groupe cyclique engendré par l'élément $t^2 t'^{-2}$. Le groupe $*G$ est quasi libre modulo 2. Le groupe saturé des transformations périodiques de période 2 des entiers rationnels qui a fait l'objet d'études dans les fasc. 5 et 7 des Publ. du Sém. de Géom. de l'Université de Neuchâtel est isomorphe à $*G$ et en constitue une réalisation intéressante.

4. R. Bieri: *Gruppen mit Poincaré-Dualität*

5. R. STREBEL: *Über die Homologie von Gruppen mit spezieller Präsentierung*

6. E. BOLTHAUSEN: *Über die Gruppe der einfachen Isomorphietypen*

7. W. BAUR: *Rekursive algebraische Strukturen*

8. W. DEUBER: *Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ramsey auf reguläre Bäume*

9. U. KIRCHGRABER: *Einführung in die Methoden der analytischen Störungstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen*

10. N. SIGRIST: *Anwendung der störungstheoretischen Methoden auf die Bewegung eines künstlichen Erdsatelliten*

11. C. BANDLE: *Mittelwertsätze für Funktionen, die einer gewissen Differentialgleichung genügen*

12. R. SPERB: *Untere Schranken für die tiefste Eigenfrequenz in gewissen Problemen, die einen Parameter enthalten*

13. CH. BLANC: *Sur certains problèmes d'analyse non linéaire*

14. M.-TH. JOBIN: *Quelques propriétés de moyennes de fonctions à Laplacien constant*

15. J. HERSCH: *Problèmes auxiliaires anisotropes pour des membranes vibrantes*

16. G. PHILIPPIN: *Problèmes auxiliaires anisotropes pour les valeurs propres et plaques*