13. Sektion für Mathematik

Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Président: Prof. ROGER BADER, 8, Grandes Ruelles, 2012 Auvernier
Secrétaire: Prof. A. HAEFLIGER, En Trembley, 1197 Prangins

Samedi, 9 octobre

1. D. AMIGUET: *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes*

2. O. BURLET: *Cobordismes d'immersions*

3. R. CICUREL: *Représentations de groupes algébriques*

4. A. DERIGHETTI: *Quelques remarques au sujet de la topologie de Fell*

5. G. FAVRE: *Tores maximaux et poids pour les algèbres de Lie nilpotentes*

6. A. ROBERT: *Propriétés algébriques de certaines représentations unitaires de groupes p-adiques*

7. P. SAILLEN: *Calcul de la forme hermitienne canonique des fibrés holomorphes homogènes*

8. J. SCHMID: *Zur Kompaktifizierung von Hüllenalgebren*

9. Y. BIOLLAY: *Problèmes de Sturm-Liouville: approximation des zéros et bornes inférieures pour les valeurs propres*

10. G. PHILIPPIN: *Bornes inférieures pour la première valeur propre et pour l'énergie potentielle d'équilibre de plaques*

11. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel): *Quelques questions choisies de la Théorie des groupes*

1. Soit G un groupe abélien libre de rang fini k et soit $\{a_1,...,a_k\}$ un ensemble donné quelconque de générateurs libres de G. Tout élément de G peut se mettre de façon unique sous la forme d'un produit de puissances entières de $a_1,...,a_k$. Soient $b_1,...,b_k$ k éléments de G et soit $b_i = a_1^{j_{i1}} ... a_k^{j_{ik}}$, $i = 1,...,k$, les exposants $j_{i1},...,j_{ik}$ étant des entiers rationnels. Pour que les k éléments $b_1,...,b_k$ forment un ensemble de générateurs libres de G il faut et il suffit que le déterminant d'ordre $k: |j_{il}|$, $i, l = 1,...,k$, soit égal à $+1$ ou à -1. Un élément de G est dit libre s'il fait partie d'une base au moins de G. Pour qu'un élément $b = a_1^{j_1} ... a_k^{j_k}$ soit libre, il faut et il suffit que le p.g.c.d. des nombres $j_1,...,j_k$ soit égal à 1.

2. Un groupe multiplicatif G est dit fondamental s'il possède au moins un ensemble A de générateurs irréductible au sens strict, c'est-à-dire tel que $\forall$ la partie finie non vide $A_1 = \{a_1, \ldots, a_k\}$ de A et $\forall$ la partie finie B de G, de puissance inférieure à k, l'ensemble $(A - A_1) \cup B$ n'est pas générateur de G. Tout ensemble irréductible au sens strict de générateurs d'un groupe fondamental est appelé une base de ce groupe. La puissance r d'un base d'un groupe fondamental est un invariant de ce groupe. Soit G un groupe fondamental et soit A une base de G. Alors toute partie A^* de A est aussi irréductible au sens strict, elle engendre donc un sous-groupe fondamental de G, dont elle constitue une base. Comme A est de puissance r de fait, que A possède 2^r parties distinctes et que deux parties distinctes de G engendrent deux sous-groupes fondamentaux distincts, il s'ensuit que la puissance de l'ensemble des sous-groupes fondamentaux de tout groupe fondamental est supérieure au rang de ce groupe. On sait qu'un groupe fondamental peut posséder des sous-groupes non fondamentaux. Il y a des relations qui sont exclues entre éléments d'une base d'un groupe fondamental. En effet, soit A une base d'un groupe fondamental. Il ne saurait exister entre éléments de A aucune relation à partir de laquelle on puisse exprimer un élément de A par une composition finie d'autres éléments de A. Par exemple, si $a_1, \ldots, a_1$ $(l > 1)$ sont des éléments de A, on ne saurait avoir une relation de la forme $f(a_1, \ldots, a_{l-1})$ $a_l g(a_1, \ldots, a_{l-1}) = 1$, sinon A serait réductible et ne constituerait pas une base de G.

3. Signalons quelques propriétés du groupe multiplicatif abstrait G^* engendré par deux éléments t et t' liés par la seule relation caractéristique $tt' = t't^{-1}$. Tout élément de G^* peut se mettre de façon unique sous la forme $t^k t'^l$ où k et l sont deux entiers rationnels. G^* possède un sous-groupe invariant et maximal libre de rang 2 engendré par les deux éléments t et t'^2. L'ensemble de tous les sous-groupes de G est dénombrable. G possède une infinité dénombrable de sous-groupes invariants abéliens libres et une infinité dénombrable de sous-groupes invariants propres isomorphes à G^*. Le groupe G^* est fondamental de rang 2 et toute base de G est formée de deux éléments t_1 et t_2, tels que soit $t_1 = t^{\pm 1}$, $t_2 = t^u t'^{\pm 1}$, où $u' \in Z = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, soit $t_1 = t^{\pm 1} t'^{2v}$, $t_2 = t^{u'} t'^{2v'+1}$, où u', v, $v' \in Z$ et où les entiers $2v$ et $2v'+1$ sont premiers entre eux, soit encore $t_1 = t^{u' \pm 1} t'^{2v+1}$, $t_2 = t^{u'} t'^{2v'+1}$, où u', v, $v' \in Z$ et où les entiers $2v+1$ et $2v'+1$ sont premiers entre eux. Quel que soit le nombre premier p, G^* possède un ensemble de la puissance du continu de chaînes de sous-groupes $G_0, G_1, \ldots$, telles que $G_0 = G^*$, G_i est un sous-groupe invariant propre de G^*, isomorphe à G^*, et il est aussi un sous-groupe invariant et maximal propre, d'index p de G_{i-1}, quel que soit l'indice $i = 1, 2, \ldots$

4. Soit G^{**} le groupe multiplicatif abstrait engendré par deux éléments t et t' liés par l'ensemble exhaustif et irréductible des deux realations caractéristiques $t'^2 t = tt'^2$ et $tt'^{-1} = t't^{-1}$. Chacun des éléments t, t' est d'ordre infini et tout élément de G^{**} peut se mettre de façon unique sous la forme $t^k t'^l$, $k, l \in Z$. On peut répartir les éléments de G^{**} en deux classes d'équivalence équipotentes C_0 et C_1 comprenant, la pre-

mière, tous les éléments dits pairs de G^{**}, de la forme $t^k t'^{2l'}$, et la seconde composée des éléments dits impairs de G^{**}, de la forme $t^k t'^{2l'+1}$, $k, l' \in Z$. L'ensemble des éléments pairs de G^{**} constitue un sous-groupe invariant et maximal d'index 2 de G^{**} qui est un sous-groupe libre de rang 2. Le groupe G^{**} possède encore deux autres sous-groupes invariants et maximaux d'index 2, dont l'un est fondamental de rang 3 et l'autre fondamental de rang 2. Ce dernier sous-groupe engendré par les deux éléments $t^2 t'^{-2}$ et t' est isomorphe au groupe G^* (voir 3). Le groupe G^{**} est fondamental de rang 2, il possède cinq types de bases dont trois sont dits de première espèce, chaque base d'un tel type comprenant un élément pair et un élément impair de G^{**}, alors que les deux types restants de bases de G sont dits de seconde espèce, toute base de seconde espèce étant formée de deux éléments impairs de G^{**}. On peut répartir les bases de G^{**} en classes d'équivalence, dont l'une a pour représentant t, t' et comprend les couples d'éléments $t, t^{2u''} t'^{1-2u''}$; tt'^{-2}, $t^{2u''} t'^{-1-2u''}$; $t^{-1} t'^2$, $t^{2u''} t'^{1-2u''}$; t^{-1}, $t^{2u''} t'^{-1-2u''}$, où u'' est un entier rationnel quelconque. Les deux éléments t_1 et t_2 d'une base quelconque de cette classe, dont t_1 est l'élément pair et t_2 est l'élément impair, sont liés par les deux relations caractéristiques $t_2^2 t_1 = t_1 t_2^2$ et $t_1 t_2^{-1} = t_2 t_1^{-1}$. La connaissance de cette classe permet de déterminer tous les automorphismes du groupe G^{**} qui possède aussi bien un ensemble dénombrable d'automorphismes intérieurs qu'un ensemble dénombrable d'automorphismes extérieurs. Le centre de G^{**} est le groupe cyclique engendré par t'^2, le sous-groupe commutateur est aussi un groupe cyclique, il est engendré par l'élément $t^2 t'^{-2}$. Le groupe G^{**} possède un ensemble de la puissance du continu de chaînes de sous-groupes de la form $G_0, G_1, G_2, \ldots$ où $G_0 = G^{**}$, G_1 est l'un quelconque des trois sous-groupes invariants et maximaux d'index 2 de G^{**} et G_i est un sous-groupe invariant et maximal propre de G_{i-1}, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$

Il existe un groupe de transformations périodiques de période 2 des entiers rationnels isomorphe au groupe G^{**}, notamment le groupe G_{s2} engendré par les deux transformations $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)_2$, $t' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)_2$.

12. H. M. Reimann (Zürich) *Zur Existenz masstreuer Abbildungen*

Im Jahre 1965 veröffentlichte J. Moser in den *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 120, eine Arbeit, in der er den folgenden Satz bewies

Sind auf einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M zwei positive Volumenelemente σ und τ vorgegeben, derart, dass ${}_M\!\int \sigma = {}_M\!\int \tau$, so existiert ein Diffeomorphismus $\Phi : M \to M$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung ${}_{\Phi(A)}\!\int \sigma = {}_A\!\int \tau$ für alle messbaren Mengen $A \subset M$ gilt.

Die Mannigfaltigkeit ist hier mit einer C^∞-Struktur versehen; desgleichen sollen die Volumenelemente in lokalen Koordinaten durch positive, C^∞-differenzierbare Funktionen gegeben sein: $\sigma = s(x)\ d^n x = s(x)$ $dx \wedge \ldots \wedge dx_n$ (n ist die Dimension der Mannigfaltigkeit).

Für diesen Satz werden zwei Beweise angegeben, die beide wesentlich von der Voraussetzung der Kompaktheit von M Gebrauch machen. Im zweiten Beweis wird der C^∞-Diffeomorphismus Φ mit Hilfe von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen konstruiert. Diese Methode gestattet eine Erweiterung, die insofern bemerkenswert ist, als sich dadurch – im Zusammenhang mit einigen allgemeinen Resultaten – Sätze über Abbildungen zwischen Gebieten im Euklidschen Raum R^n herleiten lassen.

Satz **1**

Es seien $f(x)\, d^n x$ und $g(x)\, d^n x$ zwei positive C^∞-Volumenelemente auf der offenen Einheitskugel $B \subset R^n$. Falls ${}_B\!\int f(x)\, d^n x = {}_B\!\int g(x)\, d^n x$ $(\leq \infty)$, so gibt es einen C^∞-Diffeomorphismus $\Phi: B \to B$, der für jede messbare Menge $A \subset B$ der Gleichung ${}_{\Phi(A)}\!\int f(x)\, d^n x = {}_A\!\int g(x)\, d^n x$ genügt.

Satz **2**

Ein Gebiet $G \subset R^3$, welches homöomorph zur Kugel B, zum Ring $R = \{x \in R^3 \mid 1 < |x| < 2\}$ oder zum Torus $T = \{x = (z, r, \varphi) \in R^3 \mid z^2 + (r-2)^2 < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ist, lässt sich durch einen masstreuen C^∞–Diffeomorphismus auf B, R beziehungsweise T abbilden, falls nur das dreidimensionale Mass von G mit dem von B, R beziehungsweise T übereinstimmt.

Unter einem masstreuen Diffeomorphismus Φ versteht man hier natürlich eine Abbildung, die das dreidimensionale Mass $|A|$ jeder messbaren Menge $A \subset G$ invariant lässt: $|\Phi(A)| = |A|$.

Die Beweise zu den beiden Sätzen werden an anderer Stelle veröffentlicht.

13. CL. AUDERSET: *Construction de Eilenberg-Moore et de Kleisli comme extension de Kan*

14. R. BIERI: *Gruppen mit Poincaré-Dualität*

15. M. BURCHARD-KAUP: *Über Fasercoprodukte (= Pushouts) in der Funktionentheorie*

16. U. WÜRGLER: *Operationen in Kobordismustheorien*