Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 148 (1968)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, 28. September 1968

Präsident: Prof. Dr. W. NEF (Bern)
Sekretär: Prof. Dr. E. SPECKER, Leonhardstrasse 33, 8006 Zürich

1. H. P. KÜNZI (Zürich) – *Zum Triplex-Algorithmus der linearen Optimierung*

2. P. HESS (Zürich) – *Über das verallgemeinerte Dirichletproblem für lineare partielle Differentialgleichungen*

3. H. P. BIERI (Bern) – *Fixpunktsätze und Satz von Hahn-Banach in limitierten Vektorräumen*

4. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel) – *Trois problèmes de la théorie générale des groupes*

1. Soit G un groupe multiplicatif abstrait engendré par un ensemble A d'éléments liés par une famille donnée F de relations caractéristiques. La famille F est dite exhaustive si toute relation entre éléments de A est une conséquence des relations caractéristiques données et de relations triviales découlant des axiomes de groupes multiplicatifs. Il n'est pas exhaustif dans le cas contraire. L'ensemble de générateurs A est dit irréductible au sens large si aucun élément de cet ensemble ne peut être obtenu par composition finie des autres. Il est dit irréductible au sens strict s'il comprend un seul élément ou s'il est de puissance >1 et si, $\forall$ la partie finie B de A, de puissance $k>1$ et $\forall$ la partie C de G, de puissance $<k$, l'ensemble $(A-B) \cup C$ n'est pas générateur de G. Le groupe G est dit fondamental (quasi fondamental) s'il possède au moins un ensemble A de générateurs, irréductible au sens strict (au sens large). Tout ensemble irréductible au sens strict (au sens large) de générateurs d'un groupe fondamental (quasi fondamental) G est appelé une base de G. La puissance d'une base est un invariant d'un groupe fondamental, appelé *rang* de ce groupe. Tout groupe fini, tout groupe à un nombre fini de générateurs, de vastes classes de P-groupes sont fondamentaux. Le groupe $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ de toutes les substitutions (de classe paire) d'un nombre fini quelconque d'entiers quelconques est quasi fondamental, mais il n'est pas fondamental. Le groupe additif des nombres rationnels n'est même pas quasi fondamental. Un problème difficile et qui n'est que partiellement résolu consiste à se donner un ensemble A de générateurs qui se composent selon une loi de groupe multiplicatif, ainsi qu'un ensemble (exhaustif ou non) F de relations caractéristiques qui les lient et de rechercher tous les

groupes abstraits que peut engendrer l'ensemble A. Ce problème est entièrement résolu, par exemple, dans le cas où $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et où F se compose des 6 relations $a_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$, $(a_i a_j)^3 = 1$, $i = 1$, $j = 2, 3$, ou $i = 2$, $j = 3$. Ces trois éléments peuvent engendrer un groupe G d'ordre infini ou un groupe fini d'ordre $2r^2$ ou $6r^2$, r désignant l'ordre de l'élément $a_3 a_1 a_2 a_1$ qui peut prendre toute valeur entière ≥ 2 (≥ 3) si l'ordre de G est $6r^2$ ($2r^2$).

2. Il existe des propriétés dites P-propriétés – qui sont communes à toutes les relations reliant entre eux les éléments de certains ensembles de générateurs de groupes multiplicatifs. Telles sont, par exemple, les propriétés de trivialité, de quasi trivialité, de trivialité modulo n (n = entier ≥ 2), etc. On dit qu'un groupe multiplicatif G est un P-groupe s'il possède au moins un ensemble A de générateurs – dits P-générateurs – liés par des relations qui jouissent toutes de la P-propriété donnée. Cette propriété se traduit par un P-caractère dont jouit le produit fh^{-1}, $\forall$ la relation $f = h$ reliant des éléments de A, et dont peuvent jouir également des compositions finies d'éléments de A qui ne sont pas égales à l'élément neutre 1 de G. Toute composition finie d'éléments de A qui présente ce P-caractère est appelée une P-composition d'éléments de A. G est appelé un P-groupe au sens strict complet si l'ensemble G_0 des P-compositions d'éléments de A est un sous-groupe invariant de G. On connaît à ce jour une trentaine de classes de pareils groupes et tous ces groupes présentent des caractères communs qui se prêtent à une élégante théorie générale.

Soit G un P-groupe au sens strict complet. Deux ensembles A et A^* de P-générateurs de G sont dits équivalents si l'ensemble des P-compositions d'éléments de A coïncide avec celui des P-compositions d'éléments de A^*. On peut répartir les ensembles de P-générateurs de G en classes d'équivalence en prenant dans une même classe $\mathfrak{C}$ deux ensembles A et A^* de P-générateurs de G si et seulement s'ils conduisent tous les deux au même sous-groupe invariant G_0 de G. Soit $\mathfrak{C}$ une telle classe d'équivalence. On définit, dans le cadre d'une telle classe $\mathfrak{C}$, les notions de P-symétrie, de P-commutateurs, de P-dérivation, de P-automorphismes, de P-endomorphismes, de sous-groupes P-symétriques et P-invariants, notions qui généralisent les notions classiques de la théorie générale des groupes, et l'on démontre l'existence dans tout P-groupe au sens strict complet d'un treillis de sous-groupes P-symétriques et d'un treillis de sous-groupes P-invariants. Les éléments du sous-groupe G_0 sont appelés les P-unités de G. Si G_0 se compose du seul élément neutre 1 de G, G est dit un P-groupe élémentaire. Un couple ordonné a, b d'éléments de G est dit P-commutable à droite (à gauche) s'il existe un élément $c(c^*)$ de G_0, tel que $ab = bac$ ($ab = c^*ba$). Tout élément de G_0 est P-commutable des deux côtés avec tout élément de G. Un élément a de G est dit P-central à droite (à gauche) s'il est P-commutable à droite (à gauche) avec tout élément de G. Tout élément de G P-central à droite (à gauche) est aussi P-central à gauche (à droite). Tout élément de G P-central à droite et à gauche est dit P-central. L'ensemble des éléments P-centraux de G constitue un groupe, appelé le P-centre de G. Tout élément de G_0

est P-central. Soit a un élément quelconque de G. Un élément a' de G est dit P-symétrique à droite (à gauche) de a si $aa' \in G_0$ (si $a'a \in G_0$). Tout élément P-symétrique à droite d'un élément a de G est aussi son P-symétrique à gauche et vice versa. Aussi est-il appelé tout court un élément P-symétrique de a. $\forall$ l'élément a de A, tout élément P-symétrique de a est de la forme $a^{-1}c$, $c \in G_0$ et réciproquement tout élément de cette forme est P-symétrique de a. Un sous-groupe g de G est dit P-symétrique s'il contient, avec tout élément a de G tous ses P-symétriques. Pour qu'un sous-groupe g de G soit P-symétrique il faut et il suffit qu'il contienne le sous-groupe G_0. L'intersection de deux sous-groupes P-symétriques de G est un sous-groupe P-symétrique de G. De même l'union de deux sous-groupes P-symétriques est un sous-groupe P-symétrique de G. Un sous-groupe g^* de G est dit P-invariant si $\forall$ le couple a, a' d'éléments P-symétriques de G, on a $ag^*a' = g^*$. Pour qu'un sous-groupe g^* de G soit P-invariant il faut et il suffit qu'il soit P-symétrique et invariant. L'intersection est l'union de deux sous-groupes P-invariants de G est également un sous-groupe P-invariant de G. $\forall$ le couple ordonné a, b d'éléments de G, on appelle P-commutateur de a et b tout produit de la forme $aba'b'$ où $a'(b')$ est un P-symétrique quelconque de $a(b)$. On appelle premier P-dérivé de G le sous-groupe de G engendré par les P-commutateurs de tous les couples ordonnés d'éléments de G. Ces théories seront développées dans les Publications du Séminaire de Géométrie de l'Université de Neuchâtel.

3. Soit $\mathfrak{P}$ une propriété dont peuvent jouir des relations entre éléments d'ensembles de générateurs d'un groupe multiplicatif. Soit G un groupe multiplicatif. On dit que G est un $\mathfrak{P}$-produit de ses sous-groupes G_λ, $\lambda \in \Lambda$, s'il existe pour tout $\lambda \in \Lambda$, au moins un ensemble A_λ de générateurs du groupe G_λ et une famille exhaustive F_λ de relations caractéristiques qui les lient, tel que l'ensemble $A = \bigcup_{\lambda \varepsilon \Lambda} A_\lambda$ est un ensemble de générateur de G qui possède un ensemble exhaustif (au moins) F de relations caractéristiques jouissant des propriétés suivantes: $F \supset \bigcup_{\lambda \varepsilon \Lambda} F_\lambda$, toute relation de F qui relie entre eux des éléments de A_λ fait partie de F_λ et toute relation de l'ensemble $F - \bigcup_{\lambda \varepsilon \Lambda} F_\lambda$ jouit de la propriété $\mathfrak{P}$ donnée.

Soit à présent G_λ, $\lambda \in \Lambda_\lambda$ un ensemble donné de groupes abstraits, G_λ étant défini par un ensemble A_λ de générateurs et une famille exhaustive F_λ de relations caractéristiques qui les lient, $\forall \lambda \in \Lambda$, et soit $\mathfrak{P}$ une propriété donnée dont peuvent jouir des relations entre générateurs d'un groupe multiplicatif. Tout groupe abstrait G défini par l'ensemble $A = \bigcup A_\lambda$ de générateurs et une famille exhaustive F de relations caractéristiques qui les lie, telle que $F \supset \bigcup_{\lambda \varepsilon \Lambda} F_\lambda$, toute relation de F qui relie entre eux des éléments de A_λ fait partie de F_λ et toute relation de l'ensemble $F - \bigcup F_\lambda$ jouit de la propriété $\mathfrak{P}$ donnée est appelé un $\mathfrak{P}$-produit des groupes G_λ. Un tel produit jouit de propriétés qui presentent une certaine analogie avec celles d'un produit libre qui en est un cas très

particulier. Lorsqu'il s'agit d'une P-propriété définie dans la seconde question traitée ci-dessus, on a la proposition générale suivante: Tout P-produit de P-groupes est un P-groupe. La théorie des P-produits de groupes sera également développée dans les publications du Séminaire de géométrie de l'Univresité de Neuchâtel.

5. P.J. ERHARD (Zürich) – *Une application des structures conformes à la théorie des surfaces*

6. F. SIGRIST (Neuchâtel) – *H-espaces*

7. G. PERIGHETTI (Zürich) – *Quelques remarques concernant la théorie des groupes topologiques*