Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 147 (1967)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft
Samstag, 30. September 1967

Präsident: Prof. Dr. H. HUBER (Basel)

1. M. WEHRLI (Bozeman, USA) – *Differentialrechnung in Limesräumen.*

Da uns nur sehr wenig Raum zur Verfügung steht, sind alle Formulierungen sehr knapp gehalten. Derselbe Grund zwingt uns zum Gebrauch der folgenden Abkürzungen: Abl = Ableitung, Ap = Approximation, Db = Differenzierbarkeit, Dgl = Differentialgleichung, DK = Differentialkalkül, Dn = Differentiation, Fkt = Abbildung oder Funktion, Mg = Mannigfaltigkeit, Rg = Restglied, VR = linearer Raum.

Es gibt einige Versuche, Fréchetsche Db in allgemeineren als normierten Räumen zu definieren. Jeder leuchtet ein, ohne klarzumachen, warum gerade so. Das Studium höherer Ableitungen führt zu Limesräumen, doch ist die Wahl eines Db-Begriffes und einer Limitierung in Fkt-Räumen schwierig. Wir glauben, dass eine axiomatische Theorie viel klärt. *Die Lage bei topologischen Räumen:* Zum Aufbau einer axiomatischen Differentialrechnung studieren wir die Lage bei topologischen VR. *Bemerkt sei:* Unsere Axiome müssen 4 Umgebungsaxiome, 4 Forderungen der Stetigkeit linearer Operationen, 2 der Topologie in Unterräumen, 2 der Linearität und Eindeutigkeit der Dn, 3 der Kettenregel, total etwa 15 Dinge nach sich ziehen. Dn soll lokale Ap durch lineare Fkt bedeuten. Wir betrachten die Klasse $\mathfrak{G}$ aller separierten K-VR, wo K ein Hausdorffscher Körper ist.

E, F in $\mathfrak{G}, f\colon E \to F$ eine Fkt. f heisst in $x \in E$ differenzierbar, wenn es eine stetige lineare Fkt A oder $f'(x)$ und eine lokal-kleine r von E nach F gibt, so dass $f(x+h) - f(x) = Ah + r(h)$ gilt, $h \in E$. Wir lassen offen, was lokal-klein heisst. Dieser Ansatz erfüllt das Postulat der lokalen Ap. A heisst Abl, r Rg, die Zuordnung von A zu x Dn. Es sei $\mathfrak{A}(E,F)$ die Menge der Abl, $R(E,F)$ die der Rg von E nach F. r ein Rg, dann $r(0) = 0$. Lokale Kleinheit schliesst wohl Stetigkeit in null ein. Wir beweisen nun Sätze, nennen sie aber Axiome.

Axiom 0: K als VR liegt in $\mathfrak{G}$. *Axiom 1:* $\mathfrak{A}(E,F)$ ist in üblicher Weise K-VR.

Lineare stetige Fkt approximieren sich selbst, die null-Fkt ist Rg. Da die Ap lokal ist, wird folgendes gelten: $f, g\colon E \to F$, f in x differenzierbar, $g = f$ in einer x-Umgebung. Dann ist g in x differenzierbar und $g'(x) = f'(x)$. Damit ist jede in einer Nullumgebung verschwindende Fkt Rg. Mit der Stetigkeit in null folgt: *Axiom 12:* $x \in E$, $x \neq 0$. Dann ist nicht jedes Restglied in x null. *Axiom 13:* $M \subset E$, es gebe ein Rg r mit $r \mid M =$ konst. $\neq 0$. Dann ist jede Fkt von M in ein Element von $\mathfrak{G}$ Beschränkung

eines Rg. *Axiom 14:* $M \subset E \times E$, es gebe Rg r, so dass $r(x+y) =$ konst. $\neq 0$ für $(x,y) \in M$. Dann gibt es $a \neq 0$, $a \in E$, und ein Rg ϱ, so dass für $(x,y) \in M$ stets $\varrho(x)$ oder $\varrho(y)$ gleich a ist. *Axiom 15:* $M \subset K \times E$. Es gebe ein Rg r mit $r(\lambda x) =$ konst. $\neq 0$ für $(\lambda, x) \in M$. Dann gibt es $a \in K$, $a \neq 0$ und $\varrho_1 \in R(E,K)$, $\varrho_2 \in R(K,K)$ dass für $(\lambda, x) \in M$ $\varrho_1(x)$ oder $\varrho_2(\lambda)$ gleich a ist.

Wir fordern Linearität der Dn und Kettenregel: *Axiom 2:* $R(E,F)$ ist VR. *Axiom 4:* $A \in \mathfrak{A}(E,F)$, $B \in \mathfrak{A}(F,G)$, dann ist $B \circ A \in \mathfrak{A}(E,G)$. *Axiom 5:* $A \in \mathfrak{A}(E,F)$, $r \in R(E,F)$, $\varrho \in R(F,G)$, dann $\varrho(A+r) \in R(E,G)$. *Axiom 6:* $r \in R(E,F)$, $B \in \mathfrak{A}(F,G)$, dann $Br \in R(E,G)$. *Axiom 7:* $\lambda \in K$, r ein Rg, dann ist $r(\lambda x) = f(x)$ Rg.

Das Rg heisse primitiv, wenn es in einer Nullumgebung null ist. Folgendes gilt für primitive Rg, wir fordern es allgemein: *Axiom 8:* Die Beschränkung eines Rg ist Rg. *Axiom 9:* $L: K \to E_L$ linear, isomorph, $E_L \subset E$, $r \in R(E,F)$, dann ist $r \circ L$ Rg. *Axiom 10:* $E \subset F$, $r \in R(E,G)$, dann gibt es $\varrho \in R(F,G)$ mit $\varrho \mid E = r$. *Axiom 11:* $r_1, r_2 \in R(E,F)$, $\varrho: E \to F$ eine Fkt, die stets gleich r_1 oder r_2 ist. Dann $\varrho \in R(E,F)$. *Axiom 16:* $r \in R(K,K)$ primitiv. Dann ist die Fkt $f(x) = r(e/e+x)$ Rg von K nach K.

Ist die Dn eindeutig, so muss $\mathfrak{A}(E,F) \cap R(E,F) = 0$, bequemer und äquivalent: *Axiom 3:* r Rg, $r \mid E_1$ linear, $E_1 \subset E$. Dann ist $r \mid E_1$ null.

Die formulierten Axiome sind logisch unabhängig. K ein Körper, DK über K ist folgendes: Gegeben ist erstens eine Klasse K-VR, Objekte genannt; zweitens: zu je zwei Objekten E und F zwei Mengen von Fkt von E nach F, mit $\mathfrak{A}(E,F)$ bzw. $R(E,F)$, d.h. mit Abl bzw. Rg bezeichnet. Abl sind linear, Rg in null null. Es gelten die Axiome 0 bis 15, Dn ist wie oben erklärt. Ist Axiom 3 verletzt, so sprechen wir von DK ohne eindeutige Dn. Axiom 16 ist fakultativ.

Satz 1: Jeder DK induziert in seinen Objekten eine Modul oder Vektorraumtopologie, in der Abl überall, Rg in null stetig sind. Oft gibt es bloss eine solche Topologie. *Satz 2:* Gegeben eine Klasse topologischer K-VR: Dann induzieren DK die gegebenen Topologien.

Anwendungen: Dgl und Mg werden Verbände zugeordnet. Sind diese endlich, so hat die Dgl keine Lösung, die Mg keine differenzierbare Struktur. Das Studium von Richtungs-Abl führt zu «Gâteauxschen» DK. Automorphie von Fkt, Verträglichkeit von linearen Fkt mit Gruppendarstellungen heisst Db in Gâteauxschen DK.

Limesräume: Axiome 0 bis 13 und 16 wie oben. Im übrigen sind Hilfs-Rg nötig. Vgl. hierzu: Martin Wehrli: «Differentialrechnung in allgemeinen linearen Räumen, 111 ». Erscheint in: Rendiconti del circolo Matematico di Palermo.

2. R. Rüedy (Basel) – *Einbettungen Riemannscher Flächen in den dreidimensionalen Euklidischen Raum.*

3. Frl. C. Bandle (Zürich) – *Über das Steckloffsche Eigenwertproblem: Einige isoperimetrische Ungleichungen für symmetrische Gebiete.*

4. Mlle S. PICCARD (Neuchâtel) – *Solutions de quelques problèmes généraux de la théorie des groupes.*

1. Le groupe des relations entre éléments d'un ensemble de générateurs d'un groupe multiplicatif

Soit G un groupe multiplicatif engendré par un ensemble A de générateurs. Une composition finie d'éléments de A est un produit de puissances entières d'éléments de A. En réduisant une telle composition, compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif, on obtient soit 1 soit un produit de la forme $a_1^{i_1} \dots a_2^{i_r}$, où r est un entier ≥ 1, $a_l \in A$, $l = 1, \dots, r$, $a_l \neq a_{l+1}$, $l = 1, \dots, r-1$ et où i_l est un entier non nul quel que soit $l = 1, \dots, r$. Deux compositions finies f et h d'éléments de A sont égales si elles représentent le même élément de G. Toute égalité de la forme $f = h$ est appelée une relation entre éléments de A. Une relation est dite triviale si chacun de ses deux membres se déduit de l'autre par le seul jeu des axiomes de groupe multiplicatif. Deux relations $f = h$ et $f^* = h^*$ sont égales si l'on a les deux relations $f = f^*$, $h = h^*$ et si ces deux relations sont triviales. Une relation $f = h$ entre éléments de A est dite réduite si chacun de ses deux membres a été réduit compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif. L'ensemble F de toutes les relations distinctes entre éléments de A peut être muni d'une structure de groupe multiplicatif en appelant produit de deux relations $f = h$ et $f^* = h^*$ de F la relation $ff^* = hh^*$, où on réduit les deux membres compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif. Cette multiplication est associative. La relation identique ou unité $1 = 1$ joue pour cette loi le rôle d'élément neutre. L'inverse d'une relation $f = h$ est la relation $f^{-1} = h^{-1}$. Si le groupe G n'est pas abélien, le sous-groupe F_1 de F formé de toutes les relations triviales est un groupe libre engendré par les relations triviales $a = a$, $a \in A$, qui constituent un ensemble de générateurs libres de F_1. Mais F_1 n'est pas un sous-groupe invariant de F si le groupe G n'est pas libre. Si G est libre, on a $F = F_1$ et les deux groupes G et F sont isomorphes. Le sous-groupe F_2 de F formé de toutes les relations de la forme (1) $f = 1$ est invariant et F est le produit de F_2 par F_1, tout élément de F pouvant être représenté de façon unique par un produit à droite d'un élément de F_2 par un élément de F_1. Si le groupe G est abélien, F_1 aussi bien que F_2 est un sous-groupe invariant de F, et F est le produit direct de F_1 par F. On appelle ensemble de relations caractéristiques de A toute partie de F_2 qui, avec F_1, engendre F.

2. Quelques propositions de la Théorie générale des groupes

Soit G un groupe multiplicatif et soit g_0 un sous-groupe invariant de G. Soit Γ le groupe quotient de G sur g_0. Quel que soit le sous-groupe γ de Γ, la réunion des classes d'éléments de G relatives à g_0 qui constituent les éléments de Γ est un sous-groupe de G. Quel que soit le sous-groupe *invariant* γ de Γ, la réunion des classes d'éléments de G relatives à g_0 qui

sont les éléments de γ est un sous-groupe *invariant* de G. Si le groupe Γ est abélien, quel que soit le sous-groupe γ de Γ, la réunion des classes d'éléments de G relatives à g_0 qui sont les éléments de γ est un sous-groupe invariant de G. D'autre part, quel que soit le sous-groupe g de G, l'ensemble γ des classes d'éléments de G relatives à g_0 qui contiennent des éléments de g est un sous-groupe de Γ. Ce sous-groupe est invariant si g est un sous-groupe invariant de G.

Si le groupe G est abélien, quel que soit le sous-groupe g de G, l'ensemble des classes d'éléments de G relatives à g_0 qui contiennent des éléments de g est un sous-groupe invariant de Γ. Il est à noter que si le groupe Γ est abélien, le groupe G peut ne pas être abélien. Ainsi, par exemple, si G est un groupe libre non abélien et si g_0 est le sous-groupe invariant de G formé de tous les éléments de ce groupe de degré nul par rapport à tout élément d'un ensemble donné quelconque de générateurs libres de G, le groupe quotient Γ est abélien, alors que G ne l'est pas.

3. La dérivation verbale

Soit G un groupe multiplicatif, soit $\mathfrak{G}$ un groupe libre engendré par un ensemble $\mathfrak{A}^*$ de générateurs libres. Soit $M = \{m_1, m_2, ...\}$ une partie finie ou dénombrable de $\mathfrak{G}$, soit $\mathfrak{A}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{A}^*$ formé de tous les éléments de cet ensemble qui figurent dans les compositions finies réduites d'éléments de $\mathfrak{A}^*$ qui représentent $m_1, m_2, ...$ On appelle premier dérivé verbal $M, \mathfrak{A}$ de G et on note $G'_{M,\mathfrak{A}}$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des éléments de G qui s'obtiennent à partir des m_i en y remplaçant les éléments de $\mathfrak{A}$ par des éléments quelconques de G. On définit ensuite par récurrence les dérivés verbaux successifs de G. Quel que soit l'entier $n \geq 2$, le n-ième dérivé verbal $M, \mathfrak{A}$ de G noté $G^{(n)}_{M\mathfrak{A}}$ ou plus brièvement $G^{(n)}$ s'il n'y a pas de confusion possible, est le premier dérivé verbal $M, \mathfrak{A}$ de $G'^{(n-1)}_{M,\mathfrak{A}}$. Un groupe multiplicatif peut posséder une infinité de dérivées verbaux distincts. C'est, en particulier, le cas des groupes libres. Si ${}_1G$ est un sous-groupe de ${}_2G$, ${}_1G'_{M,\mathfrak{A}}$ est un sous-groupe de ${}_2G'_{M,\mathfrak{A}}$.

Quel que soient les deux groupes ${}_1G$ et ${}_2G$, on a les inclusions suivantes, l'indice supérieure prime servant à désigner la première dérivée verbale $M, \mathfrak{A}$:

$$({}_1\mathfrak{G}_1 \cap {}_2\mathfrak{G})' \subset {}_1G' \cap {}_2G',$$
$$({}_1G \cup {}_2G)' \supset {}_1G' \cup {}_2G',$$
$$({}_1G \times {}_2G)' \subset {}_1G' \times {}_2G',$$

le symbole $\cup$ étant celui de l'union de deux groupes et $\times$ celui du produit direct.

4. Une propriété remarquable de certains P-groupes abéliens

Soit G un groupe abélien engendré par un ensemble fini $A = \{a_1, ..., a_k\}$ de générateurs, liés par un ensemble exhaustif F de relations telles que

chacune de ces relations $f = h$ jouit de la propriété suivante. Le produit fh^{-1} réduit compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif abélien contient explicitement un nombre d'éléments de A congru à 0 modulo k. Alors le groupe F_2 des relations de la forme $f = 1$ reliant les éléments de A est cyclique et il existe un ensemble de k entiers non nuls $j_1, \ldots, j_k$, tels que les éléments de A sont liés par la seule relation caractéristique $a_1^{i_1} \ldots a_k^{i_k} = 1$. Le théorème d'existence suivant a lieu: Quel que soit l'entier $k \geq 2$ et quels que soient les k entiers non nuls $j_1, \ldots, j_k$, il existe un groupe abélien de transformations des entiers engendré par k éléments $a_1, \ldots, a_k$ liés par la seule relation caractéristique $a_1^{j_1} \ldots a_k^{j_k} = 1$.

Prof. Dr S. Piccard, Seminaire de Géométrie, Neuchâtel

5. A. Ammann (Genève) – *Nombres de Bernoulli généralisés.*

6. G. Mislin (Zürich) – *Räume mit Operatorengruppen und Cohomologie.*

7. H. H. Storrer (Zürich) – *Epimorphismen von Ringen.*