Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 146 (1966)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft
Samstag, den 1. Oktober 1966

Präsident: Prof. Dr. H. HUBER (Basel)
Sekretär: Prof. Dr. R. BADER (Neuchâtel)

1. JEAN DE SIEBENTHAL (Lausanne) – *Sur certaines graduations dans les algèbres de Lie semi-simples.*

1. Graduation de Cartan

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple (sur le corps C des nombres complexes), et:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus Ce_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus Ce_{\alpha_r} \tag{1}$$

une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Le sous-espace $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre commutative dont la dimension l est le rang de $\mathfrak{g}$. Les α_i sont des indices; on attribue à $\mathfrak{h}$ l'indice 0. Ces $r+1$ indices sont en bijection avec un système Λ de $r+1$ vecteurs d'un espace euclidien R^l: le système des vecteurs-racines de $\mathfrak{g}$, désignés par la même notation.

Λ est un groupe local, pourvu d'une loi de composition interne $(\alpha, \beta) \to \alpha+\beta$ associative, commutative, non partout définie. (1) peut s'écrire:

$$\mathfrak{g} = E_{\alpha_0} \oplus E_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus E_{\alpha_r} \tag{2}$$

où $\alpha_0 = 0$ avec
$(\forall_{i,j})\ (\exists k) : [E_{\alpha_i}, E_{\alpha_j}] \subset E_{\alpha_k}$

On peut dire que (2) exprime la graduation de Cartan de $\mathfrak{g}$ avec un groupe local d'indices Λ. L'algèbre $\mathfrak{g}$ admet-elle d'autres graduations de ce type?

2. Graduation associée à un sous-système fermé de Λ

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ, vérifiant par définition les relations:

$$(\Lambda_0+\Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0;\ \Lambda_0 = -\Lambda_0$$

et soit:

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ en Z-classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$. On obtient une graduation

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s \tag{3}$$

où $\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} E_\alpha$

Dans R^l les classes Λ_i déterminent un groupe local Λ/Λ_0 qui gradue $\mathfrak{g}$. Les méthodes décrites dans [1] donnent tous les sous-systèmes fermés Λ_0 des algèbres simples, d'où par des calculs faciles les partitions mod Λ_0 et les groupes locaux Λ/Λ_0.

De plus, les $\mathfrak{g}_i$ $(i \geq 1)$ sont des $\mathfrak{g}_0$-modules irréductibles, entre lesquels la loi $(x,y) \to [x,y]$ de $\mathfrak{g}$ induit une multiplication.

3. *Classification*

Les cas qui se présentent peuvent être déduits des deux cas importants suivants:

a) le sous-système fermé Λ_0 est saturé dans Λ, c'est-à-dire que le support R^h de Λ_0 vérifie: $\Lambda \cap R^h = \Lambda_0$;

b) Λ_0 est de rang maximum l.

Dans le premier cas, tous les Λ_0 sont obtenus par des inclusions du type:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h\} \subset \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h, \ldots, \varphi_l\}$$

la suite du premier membre (second membre) étant une suite de racines simples de Λ_0 (respectivement Λ); la classe de $\mu = \sum_1^l \mu_i \varphi_i \in \Lambda$ est $\overline{\mu} = \sum_{h+1}^l \mu_j \overline{\varphi}_j$. La loi Λ/Λ_0 est entièrement déterminée par les centres des classes $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$.

Dans le second cas, les centres en question sont tous en 0. Particulièrement intéressantes sont ici les graduations associées aux Λ_0 minimaux (de rang maximum l), tous du type:

$$A_{s_1} \oplus A_{s_2} \oplus \cdots \oplus A_{s_t} \quad \text{où} \quad s_1 + s_2 + \cdots + s_t = l$$

Lorsque Λ est une structure exceptionnelle E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, le groupe local Λ/Λ_0 est alors toujours un groupe, sauf dans le cas $E_8/8A_1$.

4. *Exemples*

Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre des matrices $M(l+1)$ de trace nulle, les graduations envisagées sont toutes du type a. On retrouve le produit «par blocs».

Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre simple exceptionnelle G_2, on fixe dans le plan euclidien R^2 un triangle équilatéral de sommets τ_1, τ_2, τ_3, avec $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Alors:

$$\Lambda = \{0, \pm\tau_1, \pm\tau_2, \pm\tau_3, \pm(\tau_1 - \tau_2), \pm(\tau_2 - \tau_3), \pm(\tau_3 - \tau_1)\}$$

Les diverses graduations sont décrites ci-après:

1° $\Lambda_0 = \Lambda_2 = \{0, \pm(\tau_1-\tau_2), \pm(\tau_2-\tau_3), \pm(\tau_3-\tau_1)\}$
$\Lambda_1 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$
$\Lambda_1' = -\Lambda_1 = \{-\tau_1, -\tau_2, -\tau_3\}$
Λ/Λ_0 est cyclique d'ordre 3.

2° $\Lambda_0 = \Lambda_1 + \Lambda_1 = \{0, \pm(\tau_1-\tau_2), \pm\tau_3\}$;
$\Lambda_1 = \{\pm\tau_1, \pm\tau_2, \pm(\tau_1-\tau_3), \pm(\tau_2-\tau_3)\}$
Λ/Λ_0 est cyclique d'ordre 2.

3° $\Lambda_0 = \{0, \pm\tau_1\}$
$\Lambda_1 = \{-\tau_1+\tau_2, \tau_2, -\tau_3, \tau_1-\tau_3\}$ $\quad \Lambda_2 = \{\tau_2-\tau_3\}$
$\Lambda_1 = -\Lambda_1$ $\quad \Lambda_2 = -\Lambda_2$

Posant $\delta = (\tau_2-\tau_3)/2$, les centres sont: $0, \pm\delta/2, \pm\delta$. On a un groupe local à un générateur, d'ordre 5.

4° $\Lambda_0 = \{0, \pm(\tau_2-\tau_3\}$
$\Lambda_1 = \{-\tau_3, -\tau_2\}$ $\quad \Lambda_2 = \{\tau_1\}$ $\quad \Lambda_3 = \{\tau_1-\tau_3, \tau_1-\tau_2\}$
$\Lambda_1 = -\Lambda_1$ $\quad \Lambda_2 = -\Lambda_2$ $\quad \Lambda_3 = -\Lambda_3$

Posant $\delta = \tau_1$, les centres sont: $0, \pm\delta/2, \pm\delta, \pm 3\delta/2$. On a un groupe local d'ordre 7, à un générateur.

BIBLIOGRAPHIE

1. Borel, A., et de Siebenthal, J.: Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos. Comment.Math.Helv. *23*, 200–221 (1949).

2. M.A.Knus und U.Stammbach (Zürich) – *Über die Homologiegruppen der Liealgebren.*

3. M.Ojanguren (Zürich) – *Freie Präsentierungen und Kommutatoren.*

4. Sophie Piccard (Neuchâtel) – *Les groupes libres et quasi libres modulo n.*

Soit n un entier fixe ≥ 2. Un groupe multiplicatif G est dit quasi libre modulo n s'il possède au moins un ensemble $A = \{a_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, de générateurs appelés quasi libres modulo n, tels que toute relation caractéristique qui les lie est de la forme

$$f(a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_k}) = 1 \tag{1}$$

où f est un produit d'un nombre fini de puissances entières des éléments $a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_k}$ de A, en nombre fini $k \geq 1$, de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à chacun de ces éléments, le symbole 1 au second membre de (1) désignant l'élément neutre du groupe G.

Soit G un groupe quasi libre modulo n et soit $A = \{a_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, un ensemble de générateurs quasi libres mod n de G. Tout élément de G qui fait partie d'un ensemble au moins de générateurs quasi libres mod n de G est appelé un élément quasi libre modulo n de G; un tel élément et soit d'ordre infini, soit d'ordre $\equiv 0 \pmod{n}$. Pour tout élément d de G et pour tout élément a_λ de A il existe un nombre fixe μ_λ de la suite $0, 1, \ldots, n-1$, tel que toute composition finie d'éléments de A qui représente d est de degré $\equiv \mu_\lambda \pmod{n}$ par rapport à a_λ. L'entier μ_λ est appelé le degré modulo n de d par rapport à a_λ. L'ensemble $M_0^{(n)}$ des éléments de G, de degré modulo n nul par rapport à tout élément de A forme un sous-groupe invariant de G. Le groupe quotient $\Gamma^{(n)} = G/M_0^{(n)}$ est abélien et il jouit de cette propriété que quel que soit le sous-groupe γ de $\Gamma^{(n)}$, l'ensemble des éléments de G qui font partie des classes d'éléments de G relatives au sous-groupe $M_0^{(n)}$ et qui constituent les éléments de γ est un sous-groupe invariant de G. Le groupe G, aussi bien que le groupe abélien $\Gamma^{(n)}$ qui lui est associé, est fondamental. Tout ensemble de générateurs quasi libres modulo n de G constitue une base (ensemble irréductible de générateurs) de ce groupe, alors que l'ensemble des classes d'éléments de G relatives au sous-groupe $M_0^{(n)}$ qui contiennent des éléments de A forment une base du groupe $\Gamma^{(n)}$. Les éléments du groupe $\Gamma^{(n)}$ ont un caractère intrinsèque, indépendant de l'ensemble A de générateurs quasi libres mod n de G qui a servi à les définir. Si l'ensemble de générateurs quasi libres A du groupe G est fini, de puissance k, tout ensemble de générateurs de G comprenant k éléments est formé de générateurs quasi libres modulo n de G. Quelle que soit la puissance de A, aucun élément de $M_0^{(n)}$ n'est quasi libre modulo n. Si a est un élément quasi libre modulo n de G et si l'entier m est tel que a^m engendre, par itération a, alors a^m est aussi un élément quasi libre modulo n de G. Quel que soit l'élément a quasi libre modulo n de G et quel que soit l'ensemble A de générateurs quasi libres modulo n de G dont fait partie a, si l'on désigne par h une composition finie quelconque d'éléments de $A - \{a\}$, de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à chacun d'eux, fa aussi bien que af sont des éléments quasi libres modulo n de G. Tout groupe quasi libre modulo n engendré par un ensemble infini de générateurs quasi libres modulo n possède une infinité indénombrable d'ensembles de générateurs quasi libres modulo n. La classe des groupes quasi libres modulo n est extrêmement riche. Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout entier $k \geq 1$, il existe un groupe quasi libre modulo n d'ordre fini, engendré par k éléments quasi libres modulo n. Il existe une infinité indénombrable de groupes de transformations de l'ensemble Z des entiers, dont chacun est quasi libre modulo n, et cela pour toute valeur de l'entier $n \geq 2$. Quel que soit l'entier $n \geq 2$ et quel que soit le nombre cardinal transfini $\mathfrak{m}$, il existe un groupe non abélien G quasi libre modulo n dont tout ensemble de générateurs quasi libres modulo n est de puissance $\mathfrak{m}$. Le groupe commutateur de tout groupe quasi libre modulo n est un sous-groupe du groupe $M_0^{(n)}$. Tout groupe quasi libre modulo n qui n'est pas abélien n'est pas simple. Si n est un nombre composé ≥ 4, un groupe

quasi libre modulo n n'est jamais simple. Pour tout nombre premier $p \geq 2$, il existe un groupe G quasi libre modulo n non abélien dépourvu de suites de composition mais qui possède des suites normales de sous-groupes $G_0, G_1, \ldots$, telles que G_i est un sous-groupe invariant maximal de G_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots$, et $G_0 = G$. Il existe aussi, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \geq 1$, des groupes quasi libres modulo n possédant des suites de composition de longueur k.

Soit G un groupe multiplicatif engendré par un ensemble $A = \{a_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, de générateurs indépendants, soit f une composition finie (produit de puissances entières) d'éléments de A que nous supposons réduite compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif, soit enfin n un entier fixe ≥ 2. On réduit f modulo n en effectuant successivement un nombre fini aussi élevé que possible d'opérations élémentaires dont chacune consiste à réduire modulo n, dans f, tous les exposants des éléments de A qui y figurent, puis de réduire le produit résultant compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif. Si, après un nombre fini d'opérations de ce genre, il ne reste plus aucun facteur on dit que f est totalement réductible modulo n et on pose le reste r de la réduction modulo n de f égal à 1. Le reste r de la réduction modulo n de toute composition finie d'éléments de A est défini de façon unique. Une relation de la forme $f = 1$ où f est une composition finie d'éléments de A, totalement réductible modulo n, est dite triviale modulo n. Le groupe G est dit libre modulo n s'il possède au moins un ensemble A de générateurs liés par des relations caractéristiques dont chacune est triviale modulo n. Tout groupe libre modulo n est aussi quasi libre modulo n et jouit par conséquent de toutes les propriétés d'une groupe quasi libre modulo n. Mais la réciproque n'est pas vraie. La classe des groupes libres modulo n comprend, comme cas très particulier, la classe des groupes libres. Soit G un groupe libre modulo n et soit A un ensemble de générateurs de G – dits libres modulo n – qui ne sont liés que par des relations triviales modulo n. Tout élément de G peut s'exprimer par une composition finie d'éléments de A et toutes les compositions finies d'éléments de A qui représentent un même élément d de G possèdent le même reste r de leur réduction modulo n. r est appelé le reste modulo n de d. On peut répartir les éléments de G en classes d'équivalence C_r, en prenant dans une même classe deux éléments de G si et seulement s'ils ont le même reste modulo n. La classe C_1 formée de tous les éléments de G de reste 1 modulo n est un sous-groupe invariant de G et le groupe quotient $G_c = G/C_1$ n'est en général pas abélien. Un couple x, x' d'éléments de G est dit symétrique modulo n si $xx' \in C_1$. Quel que soit l'élément x de G, tout élément symétrique modulo n de x est de la forme $x^{-1}\mathrm{c}$, $\mathrm{c} \in C_1$. Un sous-groupe g de G est dit symétrique modulo n s'il contient, avec tout élément x de G, tous ses symétriques modulo n. Quel que soit le sous-groupe $\mathfrak{g}$ du groupe G_c, l'ensemble des éléments de G qui appartiennent à ceux de $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe symétrique modulo n de G. Un sous-groupe g^* de G est dit invariant modulo n si $xg^*x' = g^*$ quel que soit le couple x, x' d'éléments symétriques modulo n de G. C_1 est un sous-groupe invariant

modulo n de G. L'ensemble des sous-groupes symétriques (invariants) modulo n de G, partiellement ordonné par la relation d'inclusion constitue un treillis, avec les lois usuelles de treillis de sous-groupes: intersection et union. Quel que soit le couple ordonné x, y d'éléments de G, un commutateur modulo n de ce couple est un produit de la forme $xyx'y'$ où $x'(y')$ est un symétrique modulo n quelconque de $x(y)$. L'ensemble des commutateurs modulo n de couples ordonnés d'éléments de G engendre un sous-groupe de G – dit sous-groupe commutateur modulo n, dont le groupe commutateur G' de G est un sous-groupe invariant. Toutes les notions classiques de la théorie des groupes peuvent être généralisées dans l'étude des groupes libres modulo n [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. PICCARD, S.: Les groupes libres et quasi libres modulo n. Gauthier-Villers, Paris 1966.

5. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel) – *Les P-produits et les P-groupes.*

Tout groupe multiplicatif G peut, comme on sait, être défini par un ensemble A de générateurs et une famille $\mathfrak{F}$ de relations caractéristiques qui les lient. On donne le nom de P-propriété à toute propriété qui peut être commune à toutes les relations reliant les éléments d'un ensemble de générateurs d'un groupe multiplicatif. Une relation entre éléments de A est une égalité de la forme $f = h$ (1), où f et h sont deux compositions finies d'éléments de A. On connaît à ce jour une vingtaine de P-propriétés. Citons-en quelques-unes. P_1: trivialité. Toute relation triviale entre éléments de A peut se mettre sous la forme $f = f$ où f est une composition finie quelconque d'éléments de A, réduite compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif. P_2: quasi trivialité. La relation (1) est quasi triviale si f a le même degré que h par rapport à tout élément de A. P_3: pseudo-trivialité. La relation (1) est pseudo-triviale si f a le même degré que h par rapport à l'ensemble des éléments de A. P_4: quasi-trivialité modulo n. La relation (1) est quasi triviale modulo n, où n est un entier ≥ 2 donné, si, quel que soit l'élément a de A, le degré de f par rapport à a est congru modulo n à celui de h par rapport à a. P_5: trivialité modulo n. La relation (1) est triviale modulo n si f et h ont le même reste modulo n. P_6: pseudo-trivialité modulo n. La relation (1) est pseudo-triviale modulo n si le degré de f est congru modulo n à celui de h par rapport à l'ensemble des éléments de A. P_7. Suppons que A est fini, formé de $k \geq 1$ éléments $a_1, \ldots, a_k$. La relation (1) entre éléments de A jouit de la propriété P_7 si $m_i(n_i)$ désignant le degré de $f(h)$ par rapport à a_λ, $l = 1, \ldots, k$, on a $m_1 - n_1 = \ldots = m_k - n_k$. P_8: soit encore A fini, composé des k éléments $a_1, \ldots, a_k$, dont chacun est d'ordre infini, et soit $m_i(n_i)$ le degré de $f(h)$ par rapport à a_i, $i = 1, \ldots, k$. La relation (1) jouit de la propriété P_8 si les nombres $m_i - n_i$, $i = 1, \ldots, k$, constituent une solution d'un système indéterminé S d'équations linéaires à coefficients réels entiers, à k indéterminées. P_9: quasi trivialité selon un ensemble

$N = \{n_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, de modules. Soit $A = \{a_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, un ensemble de puissance quelconque de générateurs d'un groupe multiplicatif G. A tout indice $\lambda \in \Lambda$ faisons correspondre un entier $n_\lambda \geq 2$, un même entier pouvant correspondre à divers indices de l'ensemble Λ. La relation (1) est quasi triviale suivant les modules de l'ensemble $N = \{n_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$ si le degré de f par rapport à a_λ est congru modulo n_λ à celui de h par rapport à a, quel que soit l'indice $\lambda \in \Lambda$. P_{10}; trivialité selon un ensemble $N = \{n_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, de modules. Soit encore n_λ un entier ≥ 2 associé à a_λ, $\forall \lambda \in \Lambda$, et soit $N = \{n_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$. Quelle que soit la composition finie f d'éléments de $A = \{a_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, réduite compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif, on réduit f selon les modules de l'ensemble N en effectuant successivement et autant de fois que possible des opérations élémentaires dont chacun consiste à réduire modulo n_λ l'exposant de toute puissance entière de a_λ figurant dans le produit considéré puis de réduire le produit résultant compte tenu des seuls axiomes de groupe multiplicatif. Un groupe multiplicatif G est appelé un P-groupe s'il possède au moins un ensemble A de générateurs liés par des relations dont chacune possède une P-propriété. A est appelé un ensemble de P-générateurs de G et on donne le nom de P-éléments de G à tout élément de G qui fait partie d'un ensemble (au moins) de P-générateurs de G.

On dit qu'un groupe multiplicatif G est un P-produit de ses sous-groupes $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$ si quel que soit l'ensemble A_λ de générateurs du groupe G_λ et quel que soit l'ensemble F_λ de relations caractéristiques qui les lie, l'ensemble $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ est un ensemble de générateurs de G pour lequel il existe une famille F_P de relations dont aucune ne relie entre eux les éléments d'un même ensemble A_λ, mais dont chacune jouit de la P-propriété donnée, l'ensemble $F_P \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ constituant un ensemble de relations caractéristiques de A.

Soit, d'autre part, $\{G_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, un ensemble donné de puissance quelconque de groupes multiplicatifs, doit A_λ un ensemble de générateurs du groupe G_λ et soit F_λ une famille de relations caractéristiques qui les lie. Posons $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ et soit F une famille de relations entre éléments de A, telle que le sous-ensemble de F formé des relations qui relient entre eux les éléments de A_λ se confond avec F_λ et que toute relation de F qui ne fait partie d'aucun F_λ jouit d'une P-propriété donnée. Soit $\Pi^* G_\lambda = G^*$ le produit libre des groupes G_λ. On obtient un P-produit des groupes G_λ en identifiant dans G^* tous les éléments égaux en vertu des relations de la famille F. On désigne un tel produit par le symbole $\Pi^P G_\lambda$.

Si la P-propriété est la trivialité, la quasi trivialité, la pseudo-trivialité ou encore la trivialité modulo n, la quasi trivialité modulo n ou la pseudo-trivialité modulo n, au lieu de parler de P-produit on parle de produit libre, de produit quasi libre, de produit pseudo-libre ou encore de produit libre, quasi libre ou pseudo-libre modulo n.

Tout P-produit de groupes $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$, est isomorphe à un groupe-quotient du produit libre de ces groupes.

Tout P-produit peut être prolongé dans ce sens que si $G = \Pi^P G_\lambda$ et si $G_\lambda = \Pi^P G_{\lambda\mu}, \mu \in M$, on a aussi $G = \Pi^P G_{\lambda\mu}, \mu \in M, \lambda \in \Lambda$.

D'autre part, si dans un groupe G qui est un P-produit de groupes G_λ, $\lambda \in \Lambda$, on répartit de façon quelconque les groupes G_λ en ensembles disjoints deux à deux $\{G_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda_\mu$, $\mu \in M$, $\bigcup_\mu \Lambda_\mu = \Lambda$, et si on appelle $\mathfrak{G}_\mu$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des sous-groupes G_λ, $\lambda \in \Lambda_\mu$, G est un P-produit de ses sous-groupes $\mathfrak{G}_\mu$, $\mu \in M$. On exprime ce fait en disant que tout P-produit peut être réduit.

Tout P-produit de P-groupes est un P-groupe.

Quel que soit le P-élément d d'un P-groupe G, le groupe cyclique engendré par d est un P-groupe.

Quelle que soit la P-propriété qui peut être commune à toutes les relations reliant les générateurs d'un groupe multiplicatif, tout groupe libre G est un P-groupe.

6. W. HENGARTNER (Zürich) – *Lineare Differentialgleichungssysteme mit ganzen Funktionen als Koeffizienten.*

7. J. STEINIG (Zürich) – *Über die Vorzeichenwechsel gewisser zahlentheoretischer Funktionen.*

8. A. ROBERT (Neuchâtel) – *Espaces localement convexes quasi-complets.*

9. U. SUTER (Zürich) – *Schnittflächen komplexer Stiefelmannigfaltigkeiten.*