

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.
Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société
Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative
= Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 140 (1960)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. Sektion für Mathematik
Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, den 24. September 1960

Präsident: Prof. Dr. H. JECKLIN (Zürich)
Sekretär: Prof. Dr J. DE SIEBENTHAL (Lausanne)

1. H. BIERI (Bern). – *Beitrag zum Reinhardschen Problem.*

2. W. HOLENWEG (Wolhusen). – *Über die Ordnung von Burnside-Gruppen mit zwei Erzeugenden.*

3. J. O. FLECKENSTEIN (Basel). – $\sqrt{3}$ bei Archimedes¹.

4. P. NOLFI (Zürich). – *Mathematische Analyse des Jaßspiels.*

Einleitung: In den nachstehenden Ausführungen werden die Grundregeln des Jaßspiels als bekannt vorausgesetzt. Wer dieses Spiel noch nicht kennen sollte, dem ist zu empfehlen, es zu erlernen. Es handelt sich um ein schönes, aber auch instruktives Spiel. Man lernt, wie man die Karten, die einem durch den Zufall zugeteilt werden, am besten einsetzen kann. Das ist eine gute Übung, denn im täglichen Leben kommt es auch darauf an, daß man seine Kräfte so gut wie möglich einsetzt.

Wer für das Jaßspiel Interesse hat, kaufe das Schweizerische Jaßreglement. Darin findet er die Grundregeln und die Verhaltungsvorschriften. Da es mehrere Spielarten gibt, wie den Aucho, den Hindersi usw. haben wir unsere Ausführungen möglichst allgemein gehalten; im speziellen beziehen sie sich auf den Schieber, der wohl am bekanntesten sein dürfte. Das Spiel besteht — um es kurz in Erinnerung zu rufen — aus 36 Karten, unterteilt in vier Sorten (Farben genannt), nämlich: Schaufel, Eckstein, Herz und Kreuz bzw. Schilten, Schellen, Rose und Eichel beim deutschen Spiel. Die 9 Karten einer Farbe heißen nach ihrem Stichwert geordnet: As (11), König (4), Dame (3), Bub (2), Trumfbub (20), Zehner (10), Neuner (0), Nell (14), Achter (0), Siebner (0), Sechser (0). Die in Klammern angeführten Ziffern geben die Punktzahl an bei der Auswertung des Erlöses. Die Summe aller Punktzahlen: $4 \cdot 11 + 4 \cdot 4 +$

¹ Erscheint in «L'Enseignement Mathématique».

$4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 20 + 4 \cdot 10 + 14 = 152$, ergibt zusammen mit den 5 Punkten für den letzten Stich 157.

Der Weis: Die Karten werden gemischt und zu je dreimal drei verteilt. Jeder der vier Spieler erhält 9 ihm vom Zufall zugeteilte Karten. Dabei werden gewisse Zusammensetzungen, insgesamt 78 einschließlich Stöcke, prämiert. Drei Karten gleicher Farbe und in der Reihenfolge gelten 20, vier 50, fünf 100, 4 Asse, 4 Könige oder 4 Damen oder 4 Zehner 100, vier Buben sogar 200, König und Dame der Trumpfkarten 20 Punkte.

Für den Mathematiker entsteht zunächst die interessante Aufgabe, die Häufigkeiten zu berechnen, mit der diese besonderen Ereignisse sich einstellen. Zunächst ist es einfach, die Wahrscheinlichkeit für 4 Asse, 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben oder 4 Zehner zu berechnen. Bezeichnet man allgemein mit n die Zahl der Karten, mit r die Zahl der einem Spieler zu kommenden Karten, so gibt es für ihn insgesamt $\binom{n}{r}$ unterschiedliche Möglichkeiten der Zuteilung. Werden nun nur diejenigen Austeilungen berücksichtigt, die Δ bestimmte Karten enthalten, so gibt es deren $\binom{n-\Delta}{r-\Delta}$ unterschiedliche Möglichkeiten.

$$\text{Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird } w_{\Delta} = \frac{\binom{n-\Delta}{r-\Delta}}{\binom{n}{r}}.$$

Für $n = 36$, $r = 9$ und $\Delta = 4$ erhält man $w_4 = 0,0021$.

Ein Spieler hat also auf 468 Kartenverteilungen die Chance, einmal 4 Könige zu erhalten, irgendeiner der Spieler auf 117 Kartenverteilungen. Da es insgesamt 5 solche Weise gibt (4 Asse, 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben, 4 Zehner), erscheint irgendeines dieser Ereignisse im Durchschnitt auf rund 25 Verteilungen. Etwas schwieriger zu berechnen ist die Häufigkeit der Weise aus Folgeblättern (z. B. As, König, Dame), also der Punktzahlen 20 bei 3 Karten, 50 bei 4 Karten und 100 bei 5 Karten. Hier ist es so, daß auch bei gleicher Kartenzahl nicht alle Weise gleich oft erscheinen. Das Dreiblatt As-König-Dame tritt häufiger auf als z.B. König-Dame-Bub. Es erscheint paradox, doch ist zu beachten, daß ein Dreiblatt nur dann entsteht, wenn keine Anschlußkarte vorausgeht oder nachfolgt. Nun kann das Dreiblatt As-König-Dame nur nach einer Seite hin, nämlich durch den Buben, zu einem Vierblatt ergänzt werden, während beim Dreiblatt König-Dame-Bub diese Möglichkeit nach beiden Seiten hin besteht. Im ersten Falle gilt die Formel:

$$w_{3/} = w_{/3} = \frac{\binom{n-\Delta-1}{r-\Delta}}{\binom{n}{r}}. \text{ Im zweiten Fall dagegen}$$

$$w_{/3/} = \frac{\binom{n-\Delta-2}{r-\Delta}}{\binom{n}{r}}. \text{ Für } n = 36, r = 9 \text{ und } \Delta = 3 \text{ erhält man } w_{3/} \\ = w_{/3} = 0,0018 \text{ bzw. } w_{/3/} = 0,0015. \text{ Der Erwartungswert, mit dem die Weisung von 20 Punkten auftritt, beträgt (immer auf zwei Stellen genau)} \\ E_3 = 0,23 \text{ pro Spieler und } 0,93 \text{ auf jede Kartenverteilung (Partie). Es können somit im Durchschnitt fast nach jeder Verteilung 3 Blatt gewie-}$$

sen werden. — Nach dem gleichen Vorgehen kann die Häufigkeit für 4 Folgekarten berechnet werden. Der Erwartungswert beträgt $E_4 = 0,04$. Derjenige für das Auftreten von 5 Karten beträgt $E_5 = 0,005 \dots$ Der Erwartungswert für irgendeinen Weis stellt sich auf 0,34 pro Spieler. Der durchschnittliche Wert eines Weises beläuft sich auf 28 Punkte. Er kann indessen nicht voll angerechnet werden, weil die Gegner mitunter zu überbieten vermögen. — Sehr selten tritt das Neunblatt auf, d.h. der Fall, daß ein Spieler alle 9 Karten der gleichen Farbe zugeteilt erhält. Er kann beim Zuger mit 300 Punkten als der «Große Weis» angerechnet werden. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt pro Partie 0,000 000 17 oder $17 \cdot 10^{-10}$.

Die Möglichkeiten eines Spielverlaufs. Den Spieler interessiert insbesondere, zu wissen, ob Möglichkeiten bestehen, gewisse Verhaltungsregeln anzugeben, wie man am vorteilhaftesten spielen soll. Diese Frage kann grundsätzlich bejaht werden. Abgesehen von den praktischen Schwierigkeiten besteht tatsächlich die Möglichkeit, Richtlinien anzugeben, um im Einzelfall ein möglichst gutes Ergebnis zu erzielen. Aber die Gewinnung dieser Richtlinien erfordert einen unheimlichen Arbeitsaufwand und ist wohl nie zu bewältigen. Dagegen lassen sich bei derartigen Betrachtungen gewisse Einsichten gewinnen, die sehr interessant sind. — Man denkt sich dazu am besten einen Registratur, dem die Aufgabe zukommt, jedes Spiel zu registrieren. Angenommen es wäre ihm möglich, alle Fälle einzutragen und diejenigen zu streichen, die nicht gut sind, dann müßten von jeder Kartenverteilung die bestmöglichen zurückbleiben. — Betrachten wir den Verlauf aller Partien: Sie beginnen mit der Verteilung der Karten. 36 Karten können auf 4 Spieler zu je 9 Karten, insgesamt auf

$$\alpha = \frac{36!}{9!9!9!} = 21\,452\,752\,266\,265\,320\,000$$

oder auf rund $21,5 \cdot 10^{18}$, das sind 21,5 Trillionen unterschiedliche Arten verteilt werden. Man kann sich nun alle diese Fälle nummeriert denken, so daß der Registratur jedesmal bei jeder Verteilung angeben kann, welcher von den 21,5 Trillionen Fällen tatsächlich eingetreten ist.

Nach erfolgter Verteilung hält jeder Spieler 9 Karten in der Hand. In einer ersten Runde legt jeder Spieler eine Karte auf den Tisch. Dazu bestehen – abgesehen von den Vorschriften über das Ausspielen der Karten – für jeden Partner 9 Möglichkeiten, insgesamt also 9^4 . Zu Beginn der zweiten Runde hat jeder Spieler 8 Karten in der Hand, womit die Spieler 8^4 Möglichkeiten für die Abgabe einer weiteren Karte haben. Insgesamt erhält man nach dieser Rechnung

$\beta = (9!)^4$ oder rund 17,340 Trillionen ($17,3 \cdot 10^{21}$) Möglichkeiten. Das Produkt mit der Zahl der Verteilungen ergibt die obere Grenze für die Zahl der Partien.

Sie beträgt $\delta = \alpha \cdot \beta = 36 (9!)^3$ und erreicht rund $37,2 \cdot 10^{40}$ oder 372 000 Sextillionen. Diese Zahl ist zwar noch lange nicht unendlich, aber für irdische Verhältnisse überaus groß. Zum Vergleich sei angeführt, daß der Durchmesser der Milchstraße «nur» $760 \cdot 10^{18}$, d.h. 760 Trillionen

Meter mißt. Es kann mit Sicherheit angenommen werden, daß noch lange nicht alle Möglichkeiten durchgespielt wurden.

Die Entropie. Besondere Bedeutung kommt bei den Kartenspielen der Information zu. Wüßte ein Spieler von Anfang an, wie die Karten verteilt sind, könnte er sich viel besser verteidigen. Vor der Kartenverteilung schwebt der Spieler vollständig im Ungewissen, was er selbst für Karten erhalten wird. Nach der Verteilung ist er zwar über die eigenen Karten genau informiert, dagegen ist ihm unbekannt, was für Karten seine Mitspieler erhalten haben; d.h. über die tatsächliche Verteilung ist er nur teilweise orientiert. Insgesamt sind bei gleichen Handkarten eines Spielers noch $\frac{(27!)}{(9!)^3}$ oder rund 4,7 Millionen Fälle möglich.

Die Gesamtheit aller dieser Fälle bildet den Informationsbereich des Spielers. Nach der Kartenverteilung kann jeder Spieler somit lediglich feststellen, in welchem Informationsbereich er sich befindet. Der Durchschnitt aller 4 Informationsbereiche ergibt den tatsächlichen Ort, dieser ist aber den einzelnen Spielern bei Beginn des Ausspielens unbekannt. Wenn wir die Entropie des Spieles mit

$$H = - \sum_1^a p_k^a \lg p_k$$

definieren, so ist diese anfänglich gleich eins: $H = 1$. Nach der Verteilung geht die Unkenntnis über die Kartenverteilung stark zurück, die Entropie beträgt nur noch 0,59. Sie sinkt entsprechend der Abnahme an Unkenntnis mit jeder Runde (Abgabe von 4 Karten) und beträgt z.B. nach der zweiten Runde 0,44, nach der 5. Runde 0,23 und nach der 8. Runde 0,04. Nach der Abgabe der letzten Karte ist die Entropie Null. Jeder Spieler ist genau orientiert, wie die Karten verteilt waren, sofern er den Spielverlauf verfolgt hat. Man sieht hieraus, daß die Information im Laufe einer Partie zunimmt und erst am Ende derselben vollständig ist, d.h. erst, wenn es zu spät ist. Aus dieser Eigenart des Jaßspiels entstehen viele Streitigkeiten. Namentlich wenn Zuschauer anwesend sind. Diese sind dann von Anfang an vollständig orientiert, weil sie auch in die Karten der Mitspieler blicken und darum auch besser wissen können, wie der einzelne Partner spielen sollte. Sie sind sich jedoch meistens ihrer besseren Situation nicht bewußt und meinen ganz zu Unrecht, sie hätten es besser gemacht. Zuschauer sind deshalb unerwünscht.

Die Strategie. Die Chancen bei einem Kartenspiel hängen aber nicht nur von der Verteilung ab, also vom Zufall, sondern auch von der Geschicklichkeit, mit der ein Spieler seine Karten ausspielt. Gute Spieler wissen, daß es sehr darauf ankommt, und treffen schon bald nach der Kartenverteilung den Entscheid über die Reihenfolge für das Ablegen der Karten. Sie fassen eine bestimmte *Strategie* ins Auge und erreichen damit meistens gute Resultate. Da jeder Partner zu Beginn des Ausspielens 9 Karten in der Hand hält, stehen ihm insgesamt 9(!) Strategien zur Auswahl. Das Studium dieser Strategien würde zweifellos wertvolle

Erkenntnisse zu Tage fördern. Das folgt aus der Tatsache, daß der Registratur (abgesehen von der praktischen Durchführbarkeit) grundsätzlich immer die Möglichkeit hat, jedem Spieler zu sagen, welche Strategie für ihn die beste ist. Für den Registratur ist nämlich die Information von Anfang an vollständig, da er genau feststellen kann, welche Verteilung tatsächlich vorliegt. Er steht also vor einem Spiele mit vollständiger Information, und für solche hat Neumann gezeigt, daß sie immer eine Lösung, d. h. für jeden Spieler eine optimale Strategie besitzen.

Bei einem Jaßspiel mit aufgedeckten Karten hätte nämlich jede Spielpartei die Möglichkeit, ihre $(9!)^2$ eigenen sowie die ihr bekannten $(9!)^2$ gegnerischen Strategien in einem Quadrat mitsamt den Ergebnissen einzutragen und die Gleichgewichtspunkte aufzusuchen. Das gäbe allerdings ein sehr großes Quadrat mit rund 5 Millionen Eingängen auf beiden Seiten, und zwar für jede der 21,5 Trillionen Möglichkeiten.

Aus dieser wichtigen Vorarbeit ließen sich dann auch Anhaltspunkte gewinnen für das eigentliche Spiel, indem man für alle möglichen Kartenzuteilungen an einen Spieler aus den ihm zustehenden Strategien die wahrscheinlich beste herausliest. — Wegen der großen Zahl der Fälle erscheint ein solches Programm vollständig undurchführbar. Es ist aber doch denkbar, daß durch Beschränkung auf reduzierte Spiele, z. B. mit nur 12 statt 36 Karten, sich Anhaltspunkte ergeben würden. Jedenfalls gibt es hier interessante Probleme.

5. J. HERSCHE (Genève). — *Le principe de Thomson comme corollaire de celui de Dirichlet*¹.

6. S. PICCARD (Neuchâtel). — *Des problèmes de la théorie générale des groupes*.

Tout élément d'un groupe multiplicatif libre G possède un degré fixe par rapport à tout élément libre de G aussi bien que par rapport à tout ensemble de générateurs libres de G . Cela permet d'associer à G un treillis de groupes abéliens qui facilite grandement l'étude de sa structure et se prête tout particulièrement à la recherche de sous-groupes invariants de G , à celle de sous-groupe d'index fini et à celle des éléments libres de G .

Les groupes libres font partie d'une classe plus générale de groupes que nous avons appelés *quasi libres* et dont on peut donner les deux définitions équivalentes suivantes: 1. Un groupe multiplicatif G est quasi libre s'il possède un système A de générateurs tel que tout élément a de G possède un degré fixe par rapport à tout élément de A . Tout élément a de G peut être obtenu par composition finie d'éléments de A , plusieurs compositions distinctes pouvant représenter le même élément, mais chacune de ces compositions ayant le même degré par rapport à a_λ , quel que soit l'élément a_λ de A . Ce degré est, par définition, le degré de a par rapport à a_λ . Tout élément d'un groupe quasi libre a également un

¹ Erscheint in «L'Enseignement Mathématique».

degré fixe par rapport à l'ensemble des éléments de A , ce degré étant par définition la somme des degrés de a par rapport à tous les éléments de A . Les éléments de A sont dits quasi libres et le système de générateurs A est irréductible. Nous appelons A une base de G .

2. D'autre part, on peut définir un groupe quasi libre G par un ensemble A d'éléments générateurs liés par une famille F de relations *quasi triviales*. Une relation $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_k}) = 1$ entre des éléments de A est dite quasi triviale si son premier membre est de degré nul par rapport à tout élément de A .

Tout groupe libre est quasi libre mais la réciproque n'est pas vraie et il existe une infinité de groupes quasi libres qui ne sont pas libres.

On peut décomposer d'une infinité de façons les éléments d'un groupe quasi libre en classes d'équivalence ayant un caractère intrinsèque indépendant de la base A de G . A partir de ces décompositions, on définit un treillis de groupes abéliens associés à G et qui permet de résoudre de nombreux problèmes de structure de G . Tout groupe quasi libre possède une infinité de sous-groupes invariant et si le groupe quasi libre G est de puissance infinie \mathfrak{m} , l'ensemble de ses sous-groupes invariants est de puissance supérieure à \mathfrak{m} . Tout sous-groupe d'un groupe quasi libre n'est pas quasi libre. Il existe même des groupes quasi libres à un nombre fini de générateurs qui possèdent des sous-groupes à une infinité de générateurs et qui sont dépourvus de bases. Tout groupe quasi libre engendré par un ensemble de puissance \mathfrak{m} de générateurs quasi libres possède un ensemble de puissance $>\mathfrak{m}$ de sous-groupes quasi libres. Tout sous-groupe quasi libre d'un groupe quasi libre à un nombre fini de générateurs est lui-même à un nombre fini de générateurs.

Soit n un entier ≥ 2 , soit A un système donné de générateurs quasi libres de G et soit i un nombre quelconque de la suite $0, 1, \dots, n-1$. Nous disons qu'un élément a de G est de classe $C_i(A)$ si a est de degré congru à i modulo n par rapport à l'ensemble des éléments de A . On décompose ainsi les éléments de G en n classes d'équivalence qui dépendent de la base A de G et qui avec la loi de composition $C_i C_j = C_k$ où $0 \leq k \leq n-1$, $k \equiv i+j \pmod{n}$, forment un groupe abélien. La classe $C_0(A)$ est un sous-groupe invariant d'index n de G . Quel que soit l'entier $n \geq 2$, tout groupe quasi libre possède des sous-groupes invariants d'index n . Tout groupe quasi libre à un nombre fini k de générateurs possède en tout cas $(n^k - 1 - N_{n,k})/q(n)$ de sous-groupes d'index fini n , quel que soit $n \geq 2$, $N_{n,k}$ désignant le nombre de suites distinctes j_1, j_2, \dots, j_k formées de nombres non tous nuls de la suite $0, 1, \dots, n-1$, tels que le p.g.c.d. des k nombres d'une telle suite et de n soit >1 .

Tout élément quasi libre d'un groupe quasi libre est d'ordre infini. Tout groupe quasi libre est d'ordre infini et possède un treillis de sous-groupes invariants distincts composés uniquement d'éléments qui ne sont pas quasi libres. Tout élément de G (que nous appelons «nul») de degré nul par rapport à chaque élément d'une base donnée de G jouit de la même propriété par rapport à tout élément de chaque base de G et il n'est pas quasi libre. Quelle que soit la base B d'un groupe quasi libre G et

quel que soit le sous-ensemble B^* non vide de G , B^* engendre un sous-groupe quasi libre G^* de G et tout élément quasi libre de G^* est aussi un élément quasi libre de G ¹.

Nous disons qu'un groupe G est fondamental s'il possède des systèmes irréductibles de générateurs appelés *bases* de G . Tous les groupes d'ordre fini, les groupes quasi libres, etc. sont fondamentaux mais il existe aussi une infinité de groupes non fondamentaux.

Nous disons qu'un groupe fondamental G est décomposé en le produit quasi libre de ses sous-groupes fondamentaux G_λ , $\lambda \in \Lambda$, et nous écrivons
1) $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ si les sous-groupes G_λ engendent G et si quelle que soit la base A_λ de G_λ , $\lambda \in \Lambda$, l'ensemble $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ constitue une base de G . Le produit quasi libre présente de grandes analogies avec le produit libre. Il est également susceptible de prolongement et de raccourcissement.

7. S. PICCARD (Neuchâtel). — *Sur les éléments libres des groupes libres.*

Un élément d'un groupe libre est appelé *libre* s'il fait partie d'un système de générateurs libres du groupe, c'est-à-dire d'un système de générateurs qui ne sont liés que par des relations triviales découlant des axiomes de groupe. Tous les éléments d'un groupe libre ne sont pas libres. Soit L l'ensemble des éléments libres et N l'ensemble des éléments non libres d'un groupe libre G . Si G est cyclique, engendré par le seul élément libre a , l'ensemble L se compose, comme on sait, des deux éléments a et a^{-1} alors que l'ensemble N est infini. Si le groupe libre G n'est pas cyclique, les deux ensembles L et N sont infinis et de même puissance. On peut répartir les éléments de G en classes d'équivalence, telles que chacune de ces classes soit où bien composée uniquement d'éléments de N ou bien qu'elle contienne aussi bien des éléments de L que des éléments de N , chacune de ces classes contenant au plus un élément de tout système irréductible de générateurs de G . Ces classes sont les éléments des groupes abéliens dont le treillis est associé à G . Soit A un système donné de générateurs libres a_λ , $\lambda \in \Lambda$, du groupe libre G . Soit a un élément quelconque de G . Il existe comme on sait une composition finie réduite unique d'éléments de A qui représente a . Cette composition est de la forme
1) $a_{\lambda_1}^{i_1} a_{\lambda_2}^{i_2} \dots a_{\lambda_n}^{i_n}$ où n est un entier ≥ 1 , $a_{\lambda_t} \in A$, $t = 1, 2, \dots, n$, $a_{\lambda_t} \neq a_{\lambda_{t+1}}$, $t = 1, 2, \dots, n-1$, et i_1, \dots, i_n , sont des entiers dont aucun n'est nul si $a \neq 1$. Une composition finie réduite d'éléments de A étant donnée, il s'agit de savoir si elle représente un élément libre de G ou non. Dans le cas où l'ensemble A est fini, la solution de ce problème découle

¹ Voir à ce sujet:

1. S. Piccard: Structure des groupes libres. Annales sc. de l'Ecole normale supérieure, Paris, LXXVI, 1959, fasc. 1, p. 1–58.
2. S. Piccard: Les groupes quasi libres. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, Paris, t. 250, p. 3260–3262.
3. S. Piccard: Les groupes quasi libres. Publications du Séminaire de géométrie de l'Université de Neuchâtel, fasc. 3, 1961.

d'un théorème du mathématicien russe Grouschkko¹. Cette solution peut être formulée comme suit: Soit $A = A(a_1, a_2, \dots, a_k)$ (k fini ≥ 2). On sait que tout système de générateurs libres, appelé base, de G , est alors formé de k éléments. Soit $B(b_1, b_2, \dots, b_k)$ une base quelconque de G , soit O_1 l'opération qui consiste à remplacer dans une base de G un élément par son inverse et soit O_2 l'opération qui consiste à remplacer dans une base de G un élément quelconque par le produit à droite ou à gauche de cet élément avec une composition finie quelconque des autres éléments de la base considérée. Toute base B de G peut se déduire de la base A par un nombre fini d'opérations O_1 et O_2 .

Supposons maintenant que l'ensemble A est de puissance infinie. On a alors les deux propositions suivantes:

Proposition 1. Quel que soit le sous-groupe G^* du groupe libre G , tout élément libre de G qui fait partie de G^* est aussi un élément libre de G^* .

Proposition 2. Quelle que soit la base A d'un groupe libre G et quel que soit le sous-ensemble non vide A^* de A , tout élément libre du groupe libre G^* engendré par A^* est aussi un élément libre du groupe G .

Il ressort de ces deux propositions que pour savoir si un élément quelconque a d'un groupe libre à base infinie A est libre ou non, il suffit de considérer la composition finie réduite d'éléments de A qui le représente: soit $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r})$ cette composition dans laquelle figurent certains éléments $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r}$ de A , en nombre fini r ; on envisagera ensuite le sous-groupe G^* de G engendré par les éléments $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r}$ et on s'appuiera sur le théorème de Grouschkko pour décider si a est un élément libre de G^* ou non. Si a est libre dans G^* il l'est également dans G d'après la proposition 2.

Il ressort de ces considérations que toute composition finie réduite de la forme 1) d'éléments d'une base d'un groupe libre G dans laquelle tous les exposants i_1, i_2, \dots, i_n sont $\neq 1$ ou -1 représente un élément non libre de G . D'autre part, quels que soient les entiers $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^i$, si le groupe libre G est engendré par les k éléments a_1, a_2, \dots, a_k , le produit $\left[a_1 (a_2 a_1^{r_1^1})^{r_2^2} (a_3 a_2^{r_2^2} a_1^{r_1^1})^{r_3^3} \dots (a_k a_{k-1}^{r_{k-1}^{k-1}} a_{k-2}^{r_{k-2}^{k-2}} \dots a_1^{r_1^1})^{r_k^k} \right]^{r_1^1} a_k a_{k-1}^{r_{k-1}^{k-1}} a_{k-2}^{r_{k-2}^{k-2}} \dots a_1^{r_k^1}$ définit un élément libre de G .

Si un élément a d'un groupe libre G est de degré nul par rapport à tout élément d'une base A de G , il est également de degré nul par rapport à chaque élément de toute autre base B de G . Un tel élément de G n'est pas libre.

Quel que soit l'entier $n \geq 2$, si un élément a d'un groupe libre G est de degré congru à zéro modulo n par rapport à chaque élément d'une base A de G , cet élément est également de degré congru à zéro modulo n .

¹ Voir, par exemple, Kurosch: Théorie des Groupes, 2^e éd. russe, Moscou, p. 252 et ss.

par rapport à chaque élément de toute autre base de G et un tel élément n'est également pas libre.

Tout groupe libre possède une infinité de sous-groupes invariants distincts composés uniquement d'éléments non libres.

Les propositions 1 et 2 facilitent grandement la recherche des éléments libres et permettent de ramener le cas des groupes libres à base de puissance infinie quelconque à celui des groupes libres à un nombre fini de générateurs.

8. G. HUNZIKER (Reinach). — *Kritisches zum Parallelenpostulat Euklids.* — Kein Manuskript erhalten.