Sektion für Mathematik

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sonntag, den 14. September 1958

Präsident: Prof. Dr G. VINCENT (Lausanne)
Sekretär: Prof. Dr. H. JECKLIN (Zürich)

1. J. RIGUET (Adliswil). – *Graphes catégoriques et structures locales*[1].

2. S. PICCARD (Neuchâtel). – *Les groupes abéliens associés à certains groupes.*

I. Soit G un groupe multiplicatif non libre défini par un ensemble E d'éléments générateurs et une famille F de relations fondamentales qui les lient. Supposons qu'il existe un entier $n \geqq 2$ et un sous-ensemble E^* de E, dont chaque élément figure au premier membre de l'une au moins des relations $f = 1$ de la famille F, tel que le premier membre f de toute relation $f = 1$ de la famille F est de degré congru à 0 modulo n par rapport à chacun (par rapport à l'ensemble) des éléments de E^* qui figurent dans l'expression de f. Nous disons que le groupe G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun (par rapport à l'ensemble) des éléments de l'ensemble E^*. On peut alors associer au groupe G un groupe abélien dont les éléments sont des classes d'éléments de G et ce groupe abélien fournit des renseignements sur la structure du groupe G.

Supposons, pour fixer les idées, que G est fini d'ordre N. Soit $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = E^*$ et supposons que G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments de l'ensemble E. On peut alors décomposer l'ensemble des éléments de G en n^k classes d'équivalence comme suit.

Soient $i_1, i_2, \ldots, i_k$ k entiers dont chacun est compris entre 0 et $n-1$ et soit a un élément quelconque de G. a peut être obtenu par composition finie des éléments de E. Soit $a = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Nous disons que a est de classe $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ si φ est de degré $\equiv i_u$ (mod n) par rapport à a_u, quel que soit $u = 1, 2, \ldots, k$. Nous appelons produit de deux classes $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ et $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ l'ensemble des éléments de G de la forme ab, $a \in M_{i_1 i_2 \ldots i_k}$,

[1] Erscheint in «L'Enseignement Mathématique».

$b \in M_{j_1 j_2 \dots j_k}$. Ce produit est à son tour une classe $M_{l_1 l_2 \dots l_k}$, telle que $l_u \equiv i_u + j_u \pmod{n}$ quel que soit $u = 1, 2, \dots, k$. Avec cette loi de multiplication qui est commutative, les classes M forment un groupe abélien Γ associé au groupe G. Toute classe M contient, avec chaque élément a de G la classe entière des éléments de G conjugués à a. Le groupe G ne saurait être engendré par moins de k éléments, autrement dit le système générateur E est minimum. Si le groupe G jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chaque élément d'un de ses systèmes générateurs, il jouit de la même propriété par rapport à chacun de ses systèmes générateurs minima et les classes M définies ci-dessus ont un caractère intrinsèque. Quel que soit le sous-groupe γ du groupe Γ, la réunion des éléments de G faisant partie des classes M qui constituent les éléments du groupe γ, est un sous-groupe invariant de G. Le nombre des sous-groupes invariants de G est donc non inférieur au nombre total des sous-groupes du groupe Γ. Si le groupe G est d'ordre fini N, chaque classe M comprend N/n^k éléments, N est un multiple de n^k. L'ordre r de toute classe $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ considérée comme élément de Γ est égal à n/d, où d est le plus grand commun diviseur des nombres $n, i_1, i_2, \dots, i_k$. Le groupe Γ est à base minimum d'ordre k. Le nombre total des systèmes générateurs minima (bases) de G est $\leqq [(N/p_1^k)^k] ({p_1}^k - 1) \dots ({p_1}^k - {p_1}^{k-1})/n!$, où p_1 est le plus petit diviseur premier de n. Tout groupe abélien G d'ordre fini jouit de la propriété P (mod a_1) par rapport à tout élément de chacun de ses systèmes générateurs minima, a_1 désignant le plus petit des invariants du groupe G. Il existe, pour tout entier $n \geqq 2$, des groupes non abéliens à un nombre fini d'éléments générateurs qui jouissent de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chaque élément de tout système générateur minimum.

Quel que soit l'entier $n \geqq 2$, il existe un groupe *non abélien* de transformation des entiers positifs (d'ordre infini) défini par deux éléments générateurs a et b liés par les seules relations fondamentales $a^n = 1$, $b^n = 1$. Un tel groupe jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chacun de ses deux éléments générateurs a et b. Tel est, par exemple, le groupe G engendré par les deux transformations a et b suivantes, où nous posons pour abréger $l_1 = n$, $l_k = l_{k-1} + n\,(n-1)^{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$; a comprend le cycle $(1, 2, \dots, n)$ ainsi que l'ensemble des cycles $(l_{2i-1}+1, l_{2i}+1, l_{2i}+2, \dots, l_{2i}+n-1)$, $(l_{2i-1}+2, l_{2i}+n, \dots, l_{2i}+2\,(n-1))$, $\dots$, $(l_{2i}, l_{2i+1}-n+2, l_{2i+1}-n+3, \dots, l_{2i+1})$, $i = 1, 2, 3, \dots$, et b se compose des cycles $(1, l_1+1, l_1+2, \dots, l_1+(n-1))$, $(2, l_1+n, \dots, l_1+2(n-1))$, $\dots$, $(l_1, l_2-n+2, l_2-n+3, \dots, l_2)$ ainsi que de l'ensemble des cycles $(l_{2i}+1, l_{2i+1}+1, \dots, l_{2i+1}+n-1)$, $(l_{2i}+2, l_{2i+1}+n, \dots, l_{2i+1}+2(n-1))$, $\dots$, $(l_{2i+1}, l_{2i+2}-n+2, l_{2i+2}-n+3, \dots, l_{2i+2})$, $i = 1, 2, 3, \dots$ Toutes les transformations a^{i_1}, $b^{j_1}a^{i1}$, $a^{i2}b^{j1}a^{i_1}$, $b^{j2}a^{i2}b^{j1}a^{i1}$, $\dots$, où $i_1 = 1, 2, \dots, n$ et $j_1, i_2, j_2, \dots$ prennent l'une des valeurs $1, 2, \dots, n-1$, sont en effet distinctes et on a $ab \neq ba$, quel que soit $n \geqq 2$.

II. Supposons maintenant que G est un groupe multiplicatif libre ayant un nombre fini d'éléments générateurs libres $a_1, a_2, \dots, a_k$. Un tel groupe, pour autant qu'il n'est pas cyclique, possède une infinité de systèmes générateurs formés, chacun, de k éléments libres, systèmes que nous appelons *bases* de G. Soit $A = \{ a_1, a_2, ..., a_k \}$ une base quelconque de G et soit n un entier quelconque $\geqq 2$. Nous allons répartir les éléments de G en classe d'équivalence $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ comme suit. Soit a un élément quelconque du groupe G. Il peut être obtenu par composition finie des éléments de la base A et cette composition, par l'utilisation éventuelle de relations triviales résultant des axiomes de groupe, peut se mettre de façon unique sous la forme réduite 1) $a = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_l}^{j_l}$, où $j_1, ..., j_l$ sont des entiers quelconques $\neq 0$ si $l > 1$, $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_l}$ sont des éléments pas nécessairement distincts de la base considérée, $l \geqq 1$ et, si $l > 1$, $a_{i_m} \neq a_{i_m+1}$, quel que soit $m = 1, 2, ..., l-1$. D'après les hypothèses faites sur la base A d'un groupe libre, a peut se mettre de façon unique sous la forme 1). Nous dirons que l'élément a fait partie de la classe $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$, où $i_1, i_2, ..., i_k$ sont des nombres de l'ensemble $\{0, 1, ..., n-1\}$ si le second membre de l'égalité 1) est de degré $\equiv i_u \pmod n$, $u = 1, 2, ..., k$. On répartit ainsi l'ensemble des éléments de G en classes M d'égale puissance et chacune des classes M contient, avec un élément a de G, la classe entière des éléments de G conjugués à a. Les classes M sont indépendantes de la base choisie, elles forment un groupe associé à G, avec la loi de composition définie comme pour les classes M des groupes non libres jouissant de la propriété $P \pmod n$ par rapport à chaque élément d'un système générateur minimum. Il s'ensuit qu'on peut décomposer d'une infinité de façons différentes le groupe G en classe d'équivalence, qu'on peut lui associer une infinité de groupes abéliens, qu'il possède une infinité de sous-groupes invariants, etc. Des méthodes analogues s'appliquent à l'étude de la structure de tous les groupes libres.

3. Johann Jakob Burckhardt (Zürich). – *Zum mittelalterlichen Rechnen in der Schweiz* (mit Lichtbildern).

Es werden die folgenden drei Funde besprochen:

1. Ein Exemplar des Bamberger Rechenbuches 1483 von Ulrich Wagner aus dem Besitz der Zentralbibliothek Zürich. Neben demjenigen in Zwickau ist dies das zweite bekannt gewordene vollständig erhaltene Stück. Es wird insbesondere auf das Vorkommen sowohl der alten als auch der neuen Formen der Ziffern 4 und 5 sowie auf den Ausdruck «Galei» für Division hingewiesen.

2. Aus dem Codex 830 der Stiftsbibliothek St. Gallen wird Seite 310 gezeigt. Diese enthält ein bisher nicht bemerktes Einmaleins für die Apices. Dieses ist im Unterschied zu einem ähnlichen aus Clm 14137, fol. 173r (M. Curtze, «Centralblatt für Bibliothekswesen», XVI. Jahrg., Leipzig 1899) völlig fehlerfrei. Die Form der Apices weicht nur unbedeutend von derjenigen in Clm 14137 ab.

3. Aus Cod. Bern 250 wird fol. 1r gezeigt, worauf sich ein vollständiges Gerbertsches Rechenbrett befindet, das in der Literatur bisher nicht erwähnt wird. Es ist mit «Gerbertus Latio Numeros Abacique Figuras» überschrieben und enthält 27 Kolonnen für die Ganzen von 1

bis 10^{27} und rechts anschließend drei Kolonnen für die Unzen, Scripuli und Calculi. Die erste Zeile enthält die Bezeichnung für die Zehnerpotenzen $I, X, C; \overline{I}, \overline{X}, \overline{C}; \overline{\overline{MI}}, X\overline{\overline{MI}}, C\overline{\overline{MI}}$, usw. je in Triaden. Die zweite Zeile enthält die Darstellung dieser Zahlen als Summen zweier Hälften, z. B. $X = VV$, bzw. als Produkte, z. B. $\overline{\overline{MI}} = X\overline{C}$. Die dritte Zeile endlich enthält die daraus gebildeten Hälften, also z. B. V bzw. $V\overline{C}$. Zuunterst auf der Tafel befindet sich eine sehr vollständige Münztabelle: die Unterteilung des As bis zur Unze und von der Unze über die Duella zur Drachme. Ihr folgen die kleineren Teile, u. a. der Obolus und zum Schluß der Calculus. Die Tafel ist vollständiger als diejenige in Cod. Bern, 299, die A. Nagl veröffentlicht hat (Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, phil. hist. Kl. 116 [1888]). Der Codex wird dem 10. Jahrhundert zugeschrieben, die auf Gerbert weisende Überschrift, die nicht von einer späteren Hand zu sein scheint, weist auf frühestens Ende 10. Jahrhundert (siehe hierzu A. Nagl, S. 917).

Nachtrag. Bei der Korrektur bemerkte ich, daß bereits H. Käfer, «Der Kettensatz», Diss. Zürich 1941, auf Seite 113 das Exemplar des Bamberger Rechenbuches in der Zürcher Zentralbibliothek erwähnt.

4. A. Hæfliger (Genève). – *Sur les projections d'un tore sur un plan*[1].

5. Albert Pfluger (Zürich). – *Eine Bemerkung zur Theorie der quasikonformen Abbildungen.*

Die Abbildung f eines Gebietes D der z-Ebene in die w-Ebene [eine komplexwertige Funktion $f(z)$ auf D] heißt K-quasikonform ($K \geqq 1$), wenn sie in D im Sinne von Tonelli absolut stetig ist, lokal quadratisch integrierbare Ableitungen besitzt und fast überall einer Differentialgleichung $f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z$ genügt, wo $\mu(z)$ komplexwertig, meßbar und $|\mu(z)| \leqq \dfrac{K-1}{K+1}$ ist. Sie ist eine innere Abbildung, und zwar die Zusammensetzung eines K-quasikonformen Homöomorphismus von D in ein Gebiet Δ der ζ-Ebene mit einer in Δ analytischen Funktion $h(\zeta)$. Bekannt ist der folgende Satz über analytische Fortsetzung (*Painlevé*, «Annales de Toulouse», t. 2 [1888], p. 28): Wird ein Gebiet D (der z-Ebene) durch einen rektifizierbaren Jordanbogen C in die beiden Teilgebiete D_1 und D_2 zerlegt und ist eine auf D stetige Funktion in D_1 und in D_2 analytisch, so ist sie im ganzen Gebiet D analytisch. Ob ein richtiger Satz entsteht, wenn man in dem *Painlevé*schen Satz das Wort analytisch durch quasikonform ersetzt, ist m. W. eine nicht gelöste Frage (vgl. *A. Mori*, «On Quasiconformality and Pseudoanalyticity». Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 68 [1957], S. 74. Hier wird gezeigt, daß der betreffende Satz richtig ist, wenn die Bildmenge von C keine innern Punkte enthält.)

---

[1] Erscheint in «L'Enseignement Mathématique».

Das Problem könnte jedoch auf den analytischen Fall ($\mu = 0$) reduziert werden, wenn man wüßte, daß die Rektifizierbarkeit von Kurvenbogen gegenüber quasikonformen Homöomorphismen invariant wäre. Dies ist aber nicht der Fall. Es gilt nämlich der Satz: Zu jedem $K > 1$ existiert ein K-quasikonformer Homöomorphismus der Ebene auf sich, der eine Kreislinie auf eine nichtrektifizierbare Jordankurve abbildet. Die quasikonformen Abbildungen, die vieles mit den konformen und den analytischen Abbildungen gemeinsam haben, können also in anderer Hinsicht sehr stark davon abweichen. Sein Beweis ergibt sich durch Kombination der folgenden drei Sätze:

1. Zu jedem $K > 1$ existiert ein K-quasikonformer Homöomorphismus der Kreisscheibe auf sich, wo die induzierte topologische Abbildung der Kreisperipherie nicht absolut stetig ist (A. Beurling and L.V. Ahlfors, «The boundary-correspondence under quasiconformal mappings». «Acta math.», Vol. 96 [1956], S. 125-142).

2. Ist die komplexwertige Funktion $\mu(z)$ in der ganzen Ebene meßbar und ist $|\mu(z)| \leqq \dfrac{K-1}{K+1}$ für alle z, so existiert ein K-quasikonformer Homöomorphismus $\zeta(z)$ der z-Ebene auf sich mit $\zeta_{\bar{z}} = \mu(z)\,\zeta_z$ fast überall (Ch. B. Morrey, «On the solution of quasilinear elliptic partial equations». Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 43 [1938], S. 126–166).

3. Wird der Einheitskreis auf ein Gebiet abgebildet, das von einer rektifizierbaren Jordankurve berandet ist, so ist die Abbildungsfunktion auf der Kreisperipherie eine absolute stetige Funktion des Winkelargumentes (F. und M. Riesz, «Über Randwerte einer analytischen Funktion». IV^e Congrès des Math. Scandinaves, 1916, S. 27–44).

6. H. Huber (Basel). – *Eine Anwendung der Funktionentheorie auf geometrische Probleme*[1].

---

[1] Erscheint in «L'Enseignement Mathématique».