Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement

Autor(en): **Plancherel, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **95 (1912)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-90211

indications relatives à différents polyèdres rencontrés dans le cours de ses recherches.

8. Prof. Dr M. Plancherel, Fribourg. *Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement.*

$P_n(x)$ désignant le polynôme de Legendre $\frac{1}{2^n\, n\,!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$, nous appellerons série de polynômes de Legendre toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a\, n\, P_n(x)$. $f(x)$ étant une fonction sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, on peut former les *coefficients de Legendre* $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n(x)\, dx$. La série $\Sigma\, f_n\, P_n(x)$ formée au moyen de ces coefficients n'est pas nécessairement convergente; nous l'appellerons la *série de Legendre* de $f(x)$, $f(x)$ en sera dite la *génératrice.*

On peut se poser au sujet de ces séries des questions analogues à celles que *Cantor* et *Dubois-Reymond* ont posées et partiellement résolues dans la théorie des séries trigonométriques. Les théorèmes suivants constituent une réponse partielle à ces questions.

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ converge vers zéro, est que $a_n = o$ $(n = 1, 2, 3, \ldots,)$.* Ce théorème est dû à M. Dini. La méthode qui me donne les théorèmes suivants m'en fournit une démonstration plus simple.

II. *Si la série $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ converge dans tout l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, vers une fonction $f(x)$ bornée, c'est une série de Legendre dont $f(x)$ est la génératrice.*

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ (convergente ou non) possède une fonction génératrice*

$f(x)$ est que la série $\Sigma\, a_n \int_{-1}^{x} P_n(x)\, dx$ converge dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ vers $\int_{-1}^{x} f(x)\, dx$.

Dans les théorèmes analogues de Cantor et de Dubois-Reymond, l'élément analytique qui joue un grand rôle dans la démonstration est l'expression $\frac{1}{h}\,[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]$ dont la limite pour $h = o$ donne la dérivée seconde généralisée de $f(x)$. Pour trouver dans notre cas une expression jouant un rôle analogue, nous considérerons une fonction F (δ, φ) sur la sphère de rayon 1. Décrivant autour du point (δ, φ) comme centre un petit cercle de rayon sphérique h, appelant (δ', φ') les points de ce petit cercle, ds' l'élement d'are et s le périmètre de ce petit cercle, nous formerons l'expression

$$\Delta_2 \mathrm{F}(\delta, \varphi; \mathrm{h}) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\mathrm{h}}{2}} \left[\frac{1}{s} \int \mathrm{F}(\delta', \varphi') ds' - \mathrm{F}(\delta, \varphi)\right]$$

Notant Δ_2 F (δ, φ) la limite de cette expression pour $h = o$, il vient, si F possède une différentielle seconde,

$$\Delta_2 \mathrm{F} = \frac{1}{\sin \delta} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\sin \delta \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \delta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \delta} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \varphi^2}.$$

En particulier, $\Delta_2 \mathrm{P}_n(\cos \delta) = -n(n+1)\, \mathrm{P}_n(\cos \delta)$. L'expression Δ_2 F $(\delta, \varphi; h)$ jouit de propriétés d'extrémum qui permettent de suivre dans la démonstration de nos théorèmes une marche analogue à celle donnée par Hölder dans le cas des séries trigonométriques. Faisant correspondre maintenant par la substitution $x = \cos \delta$, à toute série $\Sigma\, a_n \mathrm{P}_n(x)$ une fonction $\mathrm{F}(\delta) = -\Sigma \frac{a_n}{n(n+1)} \mathrm{P}_n(\cos \delta)$, on démontre que $\lim_{h=o} \sin \frac{h}{2}\, \Delta_2 \mathrm{F}(\delta, h) = o$ et qu'en tout point de convergence de la série $\Sigma\, a_n \mathrm{P}_n(x)$, $\Delta_2 \mathrm{F}(\delta) + a_o = \Sigma\, a_n \mathrm{P}_n(\cos \delta)$. L'utilisation de ces propriétés conduit sans difficulté aux théorèmes énoncés plus haut.