

Neues Beispiel einer stetigen nicht differenzierbaren Funktion

Autor(en): **Schwarz, H.A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **56 (1873)**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-89987>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

VII.

Neues Beispiel

einer

stetigen nicht differentiirbaren Function.

~~~~~  
Eine der mathematischen Section in der Sitzung  
vom 19. August 1873 gemachte Mittheilung.

Von **H. A. Schwarz.**

---

Die Frage, ob die Existenz einer Ableitung einer eindeutigen und stetigen Function reellen Argumentes bereits eine nothwendige Folge der vorausgesetzten Stetigkeit sei, oder ob nicht vielmehr die Forderung des Vorhandenseins einer Ableitung eine neue der Function auferlegte beschränkende Bedingung enthalte, hat in Kreisen deutscher Mathematiker schon vor mehr als zehn Jahren aufgehört, Gegenstand einer Diskussion zu sein.

In seiner im Jahre 1854 der Göttinger philosophischen Fakultät vorgelegten Habilitationsschrift hat Riemann ein Beispiel einer Function mitgetheilt, welche für jeden rationalen Werth des Arguments unstetig ist und dennoch durchgehends eine Integration gestattet. Von der zu dieser Function gehörenden Integralfunction kann man daher aussagen, dass dieselbe für keinen rationalen Werth des Arguments einen bestimmten Differentialcoefficienten besitzt.

Ebenso hat Herr Weierstrass im Jahre 1861 in den

Vorlesungen, welche derselbe in dem Gewerbeinstitute in Berlin über Differential- und Integralrechnung hielt, die richtige Darlegung des wahren Sachverhalts gegeben, gemäss dem alle Versuche, die Existenz einer Ableitung für stetige Functionen eines reellen Argumentes allgemein zu beweisen, ohne Ausnahme als verfehlt betrachtet werden müssen.

Da es nämlich unendlich viele eindeutige und stetige Functionen giebt, bei denen die Annahme der Existenz einer Ableitung schlechterdings unzulässig ist, so muss jede Argumentation, welche aus der Stetigkeit einer Function allein die Existenz einer Ableitung derselben zu folgern sucht\*), an einem principiellen Fehler leiden, so dass es hinreicht, ein einziges Beispiel einer eindeutig definirten und stetigen Function, welche nicht differentiirbar ist, beizubringen, um die mangelnde Folgerichtigkeit einer derartigen Schlussweise aufzudecken\*\*).

Ausser dem bereits erwähnten, von Riemann herrührenden Beispiele, nach dessen Muster beliebig viele andere

\*) *Lamarle*, Étude approfondie sur les deux équations fondamentales  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$  et  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ ,

présentée à la séance du 1<sup>er</sup> Juillet 1854. Mémoires de l'Académie royale de Belgique, in 4<sup>o</sup>, Tome XXIX. — *Duhamel*, Éléments du calcul infinitésimal, Paris 1856, Tome I, pag. 94—97. — *Bertrand*, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, Paris 1864, Tome I, pag. 2—4. — *Ph. Gilbert*, Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues. Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, in 8<sup>o</sup>, Tome XXIII, 1872.

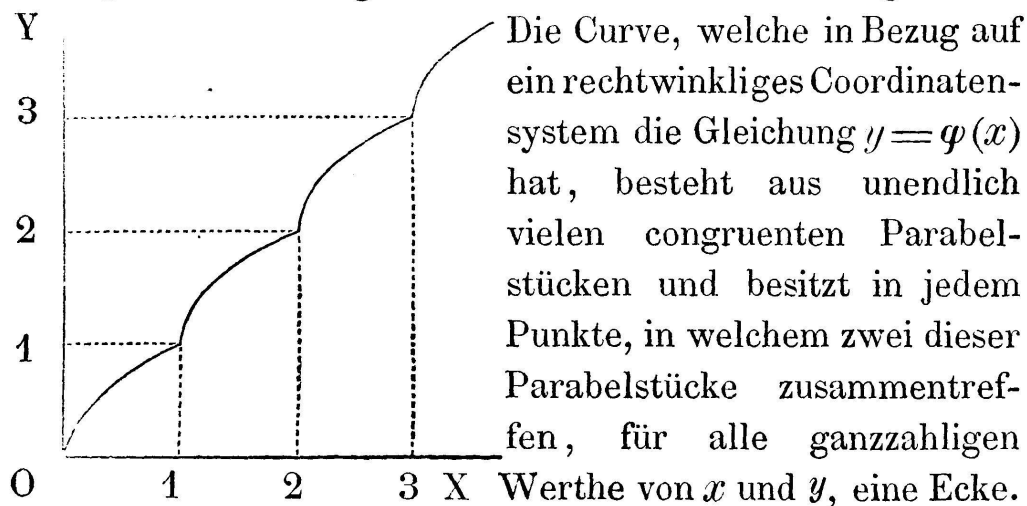
\*\*) *Ph. Gilbert*, Rectification au sujet d'un mémoire précédent, Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 2<sup>me</sup> Série, Tome XXXV, Juin 1873.

gebildet werden können\*), sind den Mathematikern, welche das Glück gehabt haben, ihre Studien unter Leitung der jetzt an der Berliner Universität wirkenden Männer zu machen, noch einige andere charakteristische Beispiele bekannt, welche über verschiedene Möglichkeiten, die hier eintreten können, helles Licht verbreiten. Das Beispiel, welches im Nachfolgenden mitgetheilt wird und welches seiner Einfachheit wegen vielleicht nicht ohne Interesse ist, beansprucht keinen sachlichen Vorzug vor anderen Beispielen dieser Art.

Wenn mit  $x$  eine veränderliche Grösse, welche nur positive Werthe annehmen soll, und mit  $E(x)$  jedesmal die grösste in  $x$  enthaltene ganze Zahl bezeichnet wird, so stellt der Ausdruck

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)},$$

vorausgesetzt, dass der Quadratwurzel stets ihr positiver Werth beigelegt wird, eine für alle Werthe der Variablen  $x$  eindeutig erklärte und continuirliche Function derselben dar, welche die Eigenschaft hat, dass zu grösseren Werthen des Arguments stets grössere Werthe der Function gehören.



\*) Auch die Programmabhandlung von Hermann Hankel: Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, Tübingen 1870, knüpft an das Beispiel Riemann's an.

Es kann beiläufig bemerkt werden, dass die zwischen den beiden Variablen  $x$  und  $y$  bestehende Abhängigkeit auch ohne Wurzelzeichen und ohne Zuhülfenahme einer zahlen-theoretischen Function, wie der Function  $E(x)$ , in der Weise durch eine Gleichung dargestellt werden kann, dass sich die Geltung derselben gleichzeitig auf alle Paare zusammengehörender Werthe von  $x$  und  $y$ , und, wenn die Variable  $x$  auf positive Werthe beschränkt bleibt, auch nur auf diese erstreckt. Den angegebenen Bedingungen genügt z. B. die Gleichung

$$x=y-\frac{1}{6}+\frac{1}{\pi^2}\left(\cos 2y\pi+\frac{1}{2^2}\cos 4y\pi+\frac{1}{3^2}\cos 6y\pi+\dots\right).]$$

Die Function  $\varphi(x)$  hat, wie sich leicht nachweisen lässt, folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\leq x+\frac{1}{4}; \quad 0 \leq h \leq 1, \quad \varphi(x+h)-\varphi(x) \leq \sqrt{h}; \\ h &\geq 1, \quad \varphi(x+h)-\varphi(x) < 2h.\end{aligned}$$

Man setze nun

$$f(x)=\sum \frac{\varphi(2^n \cdot x)}{2^n \cdot 2^n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots \infty)$$

so wird behauptet:

a. Die Function  $f(x)$  ist eine für alle Werthe des Argumentes  $x$  eindeutig erklärte stetige Function dieser Variablen, welche die Eigenschaft hat, dass zu grösseren Werthen des Argumentes stets grössere Werthe der Function gehören.

b. Ein wie kleines Intervall  $x_0 \dots X$  man aber auch abgrenzen möge, stets lassen sich unendlich viele diesem Intervalle angehörnde Werthe  $x'$  angeben, für welche der Quotient  $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$  jede vorgeschriebene beliebig

gross angenommene Zahl  $g$  überschreitet, wenn die Grösse  $h$  von der positiven Seite her abnehmend der Null sich nähert.

Beweis. *a.* Die Reihe  $\sum \frac{\varphi(2^n \cdot x)}{2^n \cdot 2^n}$  convergirt für alle in Betracht kommenden Werthe von  $x$  in gleichem Grade. Aus diesem Grunde überträgt sich die Eigenschaft der Eindeutigkeit und Stetigkeit, welche die einzelnen Glieder der Reihe als Functionen von  $x$  besitzen, auch auf die Summe derselben.

Wenn man von dem Begriffe einer für alle in Betracht kommenden Werthe der Variablen in gleichem Grade convergirenden Reihe nicht Gebrauch machen will, so kann man die Stetigkeit der Function  $f(x)$  auch wie folgt beweisen. Es ist

$$f(x+h) - f(x) = \sum \frac{\varphi(2^n x + 2^n h) - \varphi(2^n x)}{2^n \cdot 2^n}.$$

Der Grösse  $h$  möge ein positiver Werth beigelegt werden, welcher kleiner ist als 1. Es sei  $r$  eine ganze Zahl, welche so bestimmt ist, dass

$$\frac{1}{2^{r+1}} < h < \frac{1}{2^r}.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_0^r \frac{\varphi(2^n x + 2^n h) - \varphi(2^n x)}{2^n \cdot 2^n} &< \sum_0^r \frac{\sqrt{2^n \cdot h}}{2^n \cdot 2^n} \\ &< \frac{2\sqrt{2} - (2\sqrt{2})^{-r}}{2\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{h}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \sum_{r+1}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x + 2^n h) - \varphi(2^n x)}{2^n \cdot 2^n} &< \sum_{r+1}^{\infty} 2 \cdot \frac{2^n h}{2^n \cdot 2^n} = \frac{h}{2^{r-1}} \\ &< \frac{\sqrt{h} \cdot \sqrt{h}}{2^{r-1}} < \frac{2\sqrt{h}}{(2\sqrt{2})^r}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$f(x+h) - f(x) < \left\{ \frac{2\sqrt{2} - (2\sqrt{2})^{-r}}{2\sqrt{2} - 1} + 2(2\sqrt{2})^{-r} \right\} \cdot \sqrt{h}.$$

Der Coefficient von  $\sqrt{h}$  erlangt seinen grössten Werth, nämlich den Werth 3, wenn  $r=0$  gesetzt wird. Es ist also, wenn  $h$  der Bedingung  $0 \leq h \leq 1$  genügt,

$$f(x+h) - f(x) < 3\sqrt{h},$$

und, wenn  $x$  durch  $x-h$  ersetzt wird,  $f(x) - f(x-h) < 3\sqrt{h}$ .

Die Function  $f(x)$  ist demnach, wie behauptet wurde, eine stetige Function ihres Argumentes.

b. Wie klein auch ein gegebenes Intervall  $x_0 \dots X$  sein möge, man kann stets eine ganze Zahl  $m$  so gross wählen, dass  $\frac{1}{2^{m-1}}$  kleiner ist als  $X - x_0$  und dann eine ganze ungrade Zahl  $m'$  so bestimmen, dass

$$x_0 < \frac{m'}{2^m} < X.$$

Man setze nun  $\frac{m'}{2^m} = x'$  und berechne für positive von Null verschiedene Werthe von  $h$  den Quotienten

$$\frac{f(x'+h) - f(x')}{h} = \sum_0^{\infty} \frac{\varphi(2^n x' + 2^n h) - \varphi(2^n x')}{2^n \cdot 2^n \cdot h}.$$

Da sämtliche Glieder der unendlichen Reihe auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung positiv sind, so erhält man, wenn man von diesen Gliedern nur dasjenige beibehält, für welches  $n=m$  ist,

$$\frac{f(x'+h) - f(x')}{h} > \frac{\varphi(2^m x' + 2^m h) - \varphi(2^m x')}{2^m \cdot 2^m \cdot h}.$$

Beschränkt man nun, was gestattet ist, die Veränderlichkeit der Grösse  $h$  auf solche Werthe, welche kleiner sind als  $\frac{1}{2^m}$ , so ist in Folge der Erklärung der Function  $\varphi(x)$

$$\varphi(2^m x' + 2^m h) - \varphi(2^m x') = \sqrt{2^m h}.$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ergibt sich also

$$\frac{f(x' + h) - f(x')}{h} > \frac{1}{(2\sqrt{2})^m \cdot \sqrt{h}}.$$

Für hinreichend kleine positive Werthe von  $h$  überschreitet daher der Differenzenquotient  $\frac{f(x' + h) - f(x')}{h}$

jede vorgeschriebene beliebig gross angenommene Zahl  $g$ .

Andererseits ergibt sich, dass für denselben Werth von  $x'$  und für positive abnehmende Werthe von  $h$  die Beziehung

$$\lim_{(h=0)} \frac{f(x' - h) - f(x')}{-h} = \frac{1}{2^m} + \sum_{0}^{m-1} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n x' - E(2^n x')}}.$$

stattfindet.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass die Annahme der Existenz einer Ableitung der Function  $f(x)$ , welche für jeden Werth des Argumentes  $x$ , auch nur innerhalb irgend eines beliebig kleinen Intervalles, einen bestimmten endlichen Werth hätte, unstatthaft ist.