

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =  
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della  
Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 134 (1954)

**Vereinsnachrichten:** Sektion für Mathematik

**Autor:** [s.n.]

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sonntag, den 26. September 1954

*Präsident:* Prof. J. J. BURCKHARDT (Zürich)

*Sekretär:* Prof. G. VINCENT (Lausanne)

### 1. A. MARET (Biel). – *Eine Beweismöglichkeit des Vierfarbensatzes.*

Beim Problem, die Höchstzahl der Farben zu bestimmen, die für die Färbung einer (politischen) Karte nötig sind, kann man sich auf sog. Minimalkarten beschränken, d. h. auf Karten, die nur Dreiländerecken aufweisen. Bis heute ist nun nicht bemerkt oder dem Umstand zu wenig Bedeutung gegeben worden, daß solche Karten Länder oder Ländergruppen aufweisen können, die nur von *zwei* andern Ländern umgeben werden. Läßt man dies zunächst nicht zu, sollen also zunächst alle Länder oder Ländergruppen von mindestens *drei* andern Ländern umgeben werden, so hat man Karten, die wir «spezielle» Minimalkarten nennen wollen. Es kann nun gezeigt werden, daß diese Karten die maximal mögliche gegenseitige Benachbarung der Länder unter sich aufweisen und mit vier Farben immer gefärbt werden können.

Dazu wird eine für jede Karte charakteristische «Benachbarungsmatrix» aufgestellt. Ist ein Land zu einem andern benachbart, so wird «1» in die Matrix eingetragen, und wenn nicht «0». Es kann nun leicht die *maximale* Anzahl von Einern für eine solche Matrix angegeben werden. Sie beträgt  $N = 6n - 12$ , wenn  $n$  die Zahl der Länder bedeutet. Es stellt sich nun heraus, daß just die «speziellen» Minimalkarten diese Maximalzahl von Einern aufweisen. Da diese mit höchstens vier Farben immer gefärbt werden können, ist es auch der Fall für alle andern Karten, die ja nie diese maximale Benachbarung der Länder untereinander aufweisen können. Ihre Matrix hat immer weniger Einer als  $N$ .

Auf Grund dieser Erkenntnisse kann eine *Färbregel* aufgestellt werden, die verhindert, daß eine angefangene Färbung einer Karte unter Umständen wieder rückgängig gemacht werden muß, um mit nur vier Farben auszukommen (s. dazu Hilbert und Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, New York, Dover publications 1944, S. 297). Damit findet ebenfalls vom praktischen Gesichtspunkt aus das im Jahre 1878 von Cayley formulierte Problem wenigstens teilweise eine Lösung.

## 2. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Structure de groupes.*

Soit  $G$  un groupe d'ordre fini  $N$  défini par un système d'éléments générateurs indépendants 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  (pas nécessairement minimum) liés par les relations caractéristiques 2)  $f_i(S_1, S_2, \dots, S_m) = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Appelons «produit» la loi de composition du groupe  $G$ . Soit  $p$  un nombre premier  $\geq 2$ , soient  $r$  et  $i_1, \dots, i_r$  des entiers tels que  $1 \leq r \leq m$ ,  $1 \leq i_1, < i_2 < \dots < i_r \leq m$ .

Nous dirons que le groupe  $G$  jouit de la propriété  $P_r(\text{mod } p)$  par rapport aux  $r$  éléments  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$  du système 1) si  $f_i(S_1, \dots, S_m)$  est de degré  $v_{ij} \equiv 0 \pmod{p}$  par rapport à  $S_{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $i = 1, \dots, k$ . D'autre part, nous dirons que  $G$  jouit de la propriété  $P(\text{mod } p)$  par rapport à l'ensemble des éléments  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$  si  $f_i(S_1, \dots, S_m)$  est de degré  $v_i \equiv 0 \pmod{p}$  par rapport à l'ensemble des éléments  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$ .

Si le groupe  $G$  jouit de la propriété  $P_r(\text{mod } p)$  par rapport à un système de  $m$  éléments générateurs, il peut être dépourvu de la même propriété par rapport à un autre système formé de  $m$  éléments générateurs, au cas où  $r < m$ .

Si  $G$  jouit de la propriété  $P(\text{mod } p)$  par rapport à  $r$  éléments  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$  d'un système d'éléments générateurs 1), l'ordre de chacun des éléments  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$  est un multiple de  $p$ , l'ordre  $N$  de  $G$  est un multiple de  $p$  et  $G$  possède au moins un sous-groupe distingué d'ordre  $N/p$ .

Supposons maintenant que  $G$  jouit de la propriété  $P_r(\text{mod } p)$  par rapport aux éléments  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$  du système 1). Alors l'ordre de chacun des éléments  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$  est un multiple de  $p$ , l'ordre  $N$  de  $G$  est un multiple de  $p^r$ .

Soient  $a_1, \dots, a_r$   $r$  nombres quelconques de l'ensemble  $\{0, \dots, p-1\}$  et soit  $R = f(S_1, \dots, S_m)$  un élément quelconque de  $G$ . Nous dirons que  $R$  est de classe  $Ma_1 \dots a_r$  si le degré  $n_j$  de  $f$  par rapport à  $S_{i_j}$  satisfait la congruence  $n_j \equiv a_j \pmod{p}$ ,  $j = 1, \dots, r$ . On définit ainsi  $p^r$  classes  $Ma_1 \dots a_r$  dont chacune contient  $N/p^r$  éléments de  $G$ . Appelons produit de deux classes  $Ma_1 \dots a_r$   $Mb_1 \dots b_r$  l'ensemble des éléments  $ST$  de  $G$ ,  $S \in Ma_1 \dots a_r$ ,  $T \in Mb_1 \dots b_r$ . On a  $Ma_1 \dots a_r Mb_1 \dots b_r = Mc_1 \dots c_r$ , où  $c_i \equiv a_i + b_i \pmod{p}$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Avec cette loi de composition, les classes  $M$  constituent un groupe abélien  $\Gamma$  dont la classe  $Mo \dots o$ , est l'élément zéro et dont tout élément autre que zéro est d'ordre  $p$ .

Si une classe  $M$  contient un élément  $R$  de  $G$ , elle contient la classe entière des éléments de  $G$  conjugués à  $R$ . Quel que soit le sous-groupe  $\gamma$  de  $\Gamma$ , la réunion des éléments de  $G$  faisant partie des classes  $M$  qui constituent le groupe  $\gamma$  est un sous-groupe distingué de  $G$ . Le groupe  $G$  ne saurait être engendré par moins de  $r$  éléments. Quel que soit l'entier  $i$

( $1 \leq i \leq p-1$ ),  $G$  possède au moins  $(p^r-1) \dots (p^r-p^{r-1})/(p^i-1) \dots (p^i-p^{i-1})$  sous-groupes distingués d'ordre  $N/p^{r-i}$ . Quel que soit le sous-groupe  $g$  de  $G$ , il existe un entier  $l$  ( $0 \leq l \leq r$ ), tel que  $g$  contient des éléments de  $p^l$  classes  $M$  et de  $p^l$  seulement et qu'il contient le même nombre d'éléments de chacune de ces classes. Si un groupe  $G$  d'ordre fini  $N$  possède au moins un sous-groupe distingué  $G$  d'ordre  $N/p$ , où  $p$  est premier,  $G$  jouit de la propriété  $P \pmod{p}$  par rapport à l'ensemble des éléments de l'un au moins de ses systèmes générateurs.

**3. CHARLES BLANC (Lausanne).** — *Estimation de la covariance et du spectre d'une fonction aléatoire.*

Considérons le problème suivant: on possède un échantillon d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux  $X(t)$  sur un intervalle fini  $(0, T)$ ; on demande d'estimer la covariance et le spectre de Fourier de  $X(t)$ .

Ce problème semble n'avoir jamais été abordé d'une façon rigoureuse; pratiquement, l'estimation de la covariance et du spectre résulte de calculs effectués sur l'échantillon, calculs dont les résultats sont des grandeurs aléatoires dont la distribution peut être étudiée en fonction de celle de  $X(t)$ . En reprenant les diverses techniques d'estimation, on constate qu'elles fournissent le plus souvent un résultat biaisé; pour la covariance, ce biais est d'autant plus grand que le spectre de  $X(t)$  présente une valeur plus élevée autour de l'origine. Cela explique les difficultés que l'on rencontre lorsque l'échantillon présente une variation appréciable à très basse fréquence. Pour l'estimation du spectre, on peut montrer qu'il y a avantage à procéder directement sans passer par la covariance; on calcule successivement

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \exp \left( -\frac{2i\pi nt}{T} \right) dt$$

et

$$A(\nu) = 2T |c_n|^2 \qquad \nu = \frac{n}{T};$$

on montre que  $A(\nu)$  donne une estimation non biaisée du spectre de  $X(t)$ ; cette estimation est très sélective (c'est-à-dire peu influencée par les autres valeurs du spectre) et assez fortement dispersée. On peut montrer qu'il en est de même de l'expression que l'on aurait en remplaçant l'intégrale donnant  $c_n$  par une somme. Dès lors, on peut déterminer assez bien quelle partie du spectre peut être estimée si l'on dispose d'un échantillon de longueur  $T$  et si l'on remplace l'intégrale par une somme portant sur  $N$  valeurs équidistantes de  $t$ .

**4. A. PFLUGER (Zürich).** – *Über die Bestimmung von obern und untern Schranken für die Kapazität und Torsionssteifigkeit.*

Die Torsionssteifigkeit  $P$  eines prismatischen Stabes mit dem Querschnitt  $A$  (einfachzusammenhängend) ist definiert durch

$$\frac{1}{4}P = \iint_A (\text{grad } \varphi)^2 dx dy (= D(\varphi)) = \iint_A \varphi dx dy (= \bar{\varphi})$$

mit  $\Delta \varphi = -1$  in  $A$  und  $\varphi = 0$  am Rande.  $P$  besitzt folgende Maximum- und Minimumeigenschaft: Ist  $f$  eine stückweise glatte Funktion in  $A$  mit  $f = 0$  am Rande und  $\vec{v} = (p, q)$  ein stetiges und stückweise stetig differenzierbares Vektorfeld mit  $\text{div } \vec{v} = -1$  in  $A$ , so ist  $(f)^2/D(\bar{f}) \leq \frac{1}{4}P \leq \iint_A (p^2 + q^2) dx dy$ . Dies gestattet auf algebraische Weise für  $P$  obere und untere Schranken zu gewinnen:  $A$  sei von horizontalen und vertikalen Linien begrenzt und in kongruente Quadrate von der Seitenlänge  $h$  eingeteilt. Den Ecken dieser Figur werden in folgender Weise Zahlen zugeordnet: Den Randecken null; jeder innern Ecke das arithmetische Mittel aus den Werten ihrer vier Nachbar-ecken vermehrt um  $\frac{1}{4}$ . Mit diesen Werten  $e_i$  gilt dann  $h^4 \sum e_i < \frac{1}{4}P$  (Pólya). Nun werden den Quadratflächen Zahlen zugeordnet: jeder Quadratfläche das arithmetische Mittel der Werte ihrer vier Nachbarquadrate vermehrt um  $\frac{1}{4}$ , wobei die Außenfläche der Figur  $A$  den Wert 0 hat. Mit diesen Werten  $q_k$  ist dann  $\frac{1}{4}P < h^4 \sum q_k$ . Mit gleichen Zahlen  $e_i$  und  $q_k$  gibt es wesentlich bessere Schranken. Auch die Gleichungssysteme selbst lassen sich verbessern. Bemerkenswert ist aber die Existenz einer Simultanmethode (Hersch), die es gestattet, aus einem einzigen Gleichungssystem gute obere und untere Schranken zu gewinnen. Zahlenbeispiel: Wird ein Quadrat von der Seitenlänge 1 in 36 Quadrate geteilt (Symmetrie, nur 6 Unbekannte!), so liefert die Simultanmethode  $0,1355 < P < 0,144$ . Ähnliche Methoden liefern obere und untere Schranken für die Kapazität. Die Resultate ergaben sich in Zusammenarbeit mit *J. Hersch* und *A. Schopf*. Wesentliche Anregungen dazu gab eine Vorlesung von *G. Pólya* (ETH, Wintersem. 53/54) sowie eine Arbeit in den *Comm. Math. Helv.* (vol. 27 [1953], 346–356).

**5. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel).** – *Les relations caractéristiques des bases du groupe alterné.*

Nous nous sommes proposé de caractériser le groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$  de degré  $n \geq 4$  en partant de différentes bases de ce groupe. D'autre part, nous avons cherché à caractériser le groupe alterné défini comme un groupe abstrait par un couple d'éléments générateurs satisfaisant un ensemble déterminé de relations fondamentales. Nous indiquons deux tels systèmes correspondant l'un à toute valeur paire  $\geq 4$  et l'autre à toute valeur impaire  $\geq 5$  de  $n$ . Nous supposons que les éléments permutés par les substitutions de  $\mathfrak{A}_n$  sont les nombres  $1, \dots, n$ .

Toute base du second ordre aussi bien du groupe alterné  $\mathfrak{A}_4$  que de  $\mathfrak{A}_5$  peut être caractérisée par trois relations indépendantes. Voici un système de représentants indépendants des bases du second ordre de  $\mathfrak{A}_4$  et de  $\mathfrak{A}_5$  avec trois relations indépendantes caractéristiques de chacune d'elles.

Groupe  $\mathfrak{A}_4$ :  $S_1 = (1\ 2\ 3)$ ,  $T_1 = (1\ 2\ 4)$ ,  $S_1^3 = 1$ ,  $T_1^3 = 1$ ,  $(T_1 S_1)^2 = 1$ ;  $S_2 = (1\ 2\ 3)$ ,  $T_2 = (1\ 2)(3\ 4)$ ,  $S_2^3 = 1$ ,  $T_2^2 = 1$ ,  $(T_2 S_2)^3 = 1$ ;  $S_3 = (1\ 3\ 2)$ ,  $T_3 = (1\ 2)(3\ 4)$ ,  $S_3^3 = 1$ ,  $T_3^2 = 1$ ,  $(T_3 S_3)^3 = 1$ ;  $S_4 = (1\ 2\ 3)$ ,  $T_4 = (1\ 4\ 2)$ ,  $S_4^3 = 1$ ,  $T_4^3 = 1$ ,  $(T_4 S_4)^2 = 1$ ;  $S_5 = (1\ 3\ 2)$ ,  $T_5 = (1\ 2\ 4)$ ,  $S_5^3 = 1$ ,  $T_5^3 = 1$ ,  $(T_5 S_5)^2 = 1$ .

Groupe  $\mathfrak{A}_5$ :  $S_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_1 = (1\ 2\ 3)$ ,  $S_1^5 = 1$ ,  $T_1^3 = 1$ ,  $(T_1 S_1^2)^2 = 1$ ;  $S_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_2 = (1\ 3\ 2)$ ,  $S_2^5 = 1$ ,  $T_2^3 = 1$ ,  $(T_2^2 S_2^2)^2 = 1$ ;  $S_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_3 = (1\ 2\ 4)$ ,  $S_3^5 = 1$ ,  $T_3^2 S_3 T_3^{-1} S_3 = 1$ ,  $T_3 S_3^3 T_3 S_3^4 T_3^{-1} S_3^4 = 1$ ;  $S_4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_4 = (1\ 4\ 2)$ ,  $S_4^5 = 1$ ,  $T_4^3 = 1$ ,  $(T_4 S_4)^2 = 1$ ;  $S_5 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_5 = (1\ 2)(3\ 4)$ ,  $S_5^5 = 1$ ,  $T_5 S_5 T_5 S_5 T_5^{-1} S_5 = 1$ ,  $T_5 S_5^4 T_5 S_5^5 T_5^{-1} S_5^4 = 1$ ;  $S_6 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_6 = (1\ 3)(2\ 4)$ ,  $S_6^5 = 1$ ,  $T_6^2 = 1$ ,  $(T_6 S_6^2)^2 = 1$ ;  $S_7 = (1\ 2\ 3)$ ,  $T_7 = (1\ 4)(2\ 5)$ ,  $S_7^3 = 1$ ,  $T_7^2 = 1$ ,  $(T_7 S_7)^5 = 1$ ;  $S_8 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_8 = (1\ 2\ 3\ 5\ 4)$ ,  $S_8^5 = 1$ ,  $T_8^4 S_8 T_8 S_8 = 1$ ,  $S_8 T_8^{-1} S_8 T_8^4 S_8 T_8^4 = 1$ ;  $S_9 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_9 = (1\ 4\ 5\ 3\ 2)$ ,  $S_9^5 = 1$ ,  $T_9^4 S_9 T_9^{-1} S_9 = 1$ ,  $S_9 T_9 S_9 T_9^{-1} S_9 T_9^4 = 1$ ;  $S_{10} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_{10} = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$ ,  $S_{10}^5 = 1$ ,  $T_{10}^3 S_{10} T_{10}^{-2} S_{10} = 1$ ,  $T_{10}^4 S_{10}^2 T_{10}^{-1} S_{10}^2 = 1$ ;  $S_{11} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_{11} = (1\ 5\ 2\ 4\ 3)$ ,  $S_{11}^5 = 1$ ,  $T_{11}^{-3} S_{11} T_{11}^2 S_{11} = 1$ ,  $T_{11}^4 S_{11}^2 T_{11} S_{11}^2 = 1$ ;  $S_{12} = (1\ 2\ 3)$ ,  $T_{12} = (1\ 4\ 5)$ ,  $S_{12}^3 = 1$ ,  $T_{12}^3 = 1$ ,  $(T_{12}^2 S_{12} T_{12} S_{12})^2 = 1$ . \*

Toute base du second ordre de  $\mathfrak{A}_6$  peut être caractérisée par 4 relations indépendantes.

L'alterné  $\mathfrak{A}_n$  peut être défini par  $n - 2$  éléments générateurs indépendants  $b_1, \dots, b_{n-2}$  liés par les relations  $b_i^3 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n - 2$ ,  $(b_i b_j)^2 = 1$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, n - 2$ .

D'autre part, quel que soit l'entier pair  $n \geq 4$ , l'alterné  $\mathfrak{A}_n$  peut être défini par deux éléments générateurs  $c, d$  liés par les relations

$$\text{I) } c^{n-1} = 1, \text{ II) } d^{\frac{n}{2}} = 1, \text{ III) } (c^{-1} d)^3 = 1, \text{ IV) } (c^{\frac{n}{2}-1} d^i c^{-\frac{n}{2}+1} d^{-i})^2 = 1, \\ i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \text{ V) } (c^{\frac{n}{2}-1} d^i c^{\frac{n}{2}-1} d^{-i+1})^2 = 1, \quad i = 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Pour  $n = 6$ , nous avons pu déduire la relation  $(c^{-1} d)^3 = 1$  des autres. Dans V) [VI)] on n'obtient des relations indépendantes que pour  $i = 1$ ,

$$\dots, \frac{n-4}{4} + 1 \quad [i = 2, \dots, \frac{n-4}{4} + 1], \text{ si } \frac{n}{2} \text{ est pair, ou } i = 1, \\ \dots, \frac{n-2}{4} [i = 2, \dots, \frac{n-2}{4} + 1], \text{ si } \frac{n}{2} \text{ est impair.}$$

\* Plusieurs de ces systèmes sont bien connus.

Pour  $n = 4$ , les trois relations I, II et III suffisent à caractériser le groupe  $\mathfrak{A}_4$

D'autre part, quel que soit le nombre impair  $n = 2n' + 1 \geq 5$ , le groupe  $\mathfrak{A}_n$  peut être défini par deux éléments générateurs indépendants  $c$  et  $d$  liés par les relations fondamentales I')  $c^3 = 1$ , II')  $d^{n-2} = 1$ , III')  $(cd)^n = 1$ , IV')  $(d^i cd^{-i} c)^2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n' - 1$ .

Pour  $n = 5$ , nous avons pu déduire la relation I') des autres relations de ce système.

**6. HANS KÜNZI (Zürich).** — *Wertverteilung meromorpher Funktionen mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet.* — Kein Manuskript erhalten.

Es haben noch gesprochen: H. Rutishauser, Zürich, und W. Senft, Dietikon.