Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 133 (1953)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sonntag, den 6. September 1953

Präsident: Prof. F. Fiala (Neuchâtel)
Sekretär: Prof. E. Stiefel (Zürich)

1. Robert Zwahlen (Zürich). – *Ein «neues» Eigenwertproblem.* (Vgl. «Verhandlungen» der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft, 1949, S. 91–92.) Der Verfasser verdankt den Anstoß zu seinen Untersuchungen über die Diracschen Ideen Herrn *Prof. Dr. E. Stiefel.*

Eine Differentialgleichung

$$-y'' + c(x)\,y = \lambda y \qquad 1)$$

in welcher $c(x)$ eine gegebene analytische Funktion der reellen, unabhängigen Variablen x bedeuten möge, mit den «Randbedingungen»

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx < \infty \qquad 2)$$

stellt bekanntlich ein *Eigenwertproblem* dar. Als Definitionsbereich der auftretenden Funktionen verwenden wir die reelle x-Achse. Man fragt nach den sogenannten *Eigenlösungen* $y(x)$, welche die Bedingungen 1) und 2) erfüllen und nach den *Eigenwerten* λ.

Es soll hier zunächst – ohne auf die Theorie des Hilbertschen Raumes einzutreten – an Bekanntes von dem Eigenwertproblem von Hermite erinnert werden.

Es liegt das Hermitesche Eigenwertproblem vor, wenn in Gleichung 1) $c(x) \equiv x^2$. Man findet, z. B. durch Probieren, die Lösung:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \; [1] \qquad 3)$$

---

[1] $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ und $y'' = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}$, folglich $-y'' + x^2 y = y$, d. h. $\lambda = 1$. Die Bedingung 2) ist erfüllt, weil bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}$$

Vgl. z. B. Riemann-Weber, die partiellen DGl. der Physik, Band I, Braunschweig 1919, S. 27.

Dirac hat bemerkt, daß die Beziehung gilt[2]:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot + x^2\cdot\right]\left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right] - \left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right]\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot + x^2\cdot\right]$$

$$= 2\left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right] \qquad 4)$$

Die Beziehung 4) auf die Eigenlösung 3) ausgeübt, führt zu folgendem Ergebnis:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot + x^2\cdot\right](y' - x\,y) = \left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right]\left[-y'' + x^2y\right] + 2\left[y' - xy\right]$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right] y + 2\left[y' - x\,y\right]$$

$$= 3\,(y' - xy)$$

Das heißt: $y' - xy$ ist auch Eigenlösung; die Randbedingung 2) ist offensichtlich erfüllt, der Eigenwert von $y' - x\,y$ ist 3.

Bildet man

$$\frac{d}{dx}(y' - x\,y) - x(y' - xy) = \left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right]^2 y,$$

so erhält man eine weitere Lösung von 1) und 2) mit dem Eigenwert $\lambda = 5$. Allgemein kann man zeigen:

$$\left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right]^n \cdot y$$

ist eine Eigenlösung von 1) und 2) mit dem Eigenwert $\lambda = 2n + 1$.

Das Diracsche Verfahren erlaubt also, aus einer einzigen Eigenlösung durch einfache Operationen deren unendlich viele zu errechnen. Man erhält damit – wie man zeigen kann – alle Eigenlösungen.

* * *

[2] Wir schreiben für $\frac{d}{dx}(c\cdot y) = \frac{dc}{dx}\cdot y + c\cdot\frac{dy}{dx}$ einfach

$$\frac{d}{dx}c\cdot = \frac{dc}{dx}\cdot + c\,\frac{d}{dx}.$$ Damit folgt

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot + x^2\cdot\right]\left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right] \equiv -\frac{d^3}{dx^3}\cdot + x\frac{d^2}{dx^2}\cdot + 2\frac{d}{dx}\cdot + x^2\frac{d}{dx}\cdot - x^3\cdot$$

$$\left[\frac{d}{dx}\cdot - x\cdot\right]\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot + x^2\cdot\right] \equiv -\frac{d^3}{dx^3}\cdot + x\frac{d^2}{dx^2}\cdot + x^2\frac{d}{dx}\cdot + 2x\cdot - x^3\cdot$$

Der Verfasser hat die Diracsche Idee ausgebaut und sich gefragt, ob vielleicht noch andere, zu 4) analoge, Beziehungen existieren, die die Lösung von Eigenwertproblemen in sich schließen, und ist bisher zu folgendem Ergebnis gekommen:

Das bekannte Eigenwertproblem der Laguerreschen Polynome läßt sich analog behandeln, ferner läßt sich zum Eigenwertproblem der schwingenden Saite jene Operation beschreiben, welche die n-te Eigenlösung in die $(n + 1)$-te überführt; darüber möge bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

Neu dürfte auch folgendes sein:

Die Differentialgleichung

$$-y'' + \left[\frac{k^2}{16}x^2 - \frac{2\gamma}{x^2}\right] y = \lambda y \qquad 5)$$

mit den «Randbedingungen»

$$\Big[\, y\,(o) = o \qquad 6)\Big]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,(x)\,\overline{y\,(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \big| y\,(x) \big|^2 dx < \infty \qquad 7)$$

besitzt für $k > o$, $\lambda > \frac{k}{4}$ die Lösung

$$y = x^{+\frac{2\lambda}{k} - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{k}{8}x^2} \qquad 8)$$

und mit y ist auch

$$-\lambda y - \frac{k}{2}x\,y' + \left[\frac{k^2}{8}x^2 - \frac{k}{4}\right] y \qquad 9)$$

Eigenlösung. Eigenwerte sind die Zahlen λ, $\lambda + k$, $\lambda + 2\,k$, usf. γ hängt mit λ und k zusammen durch

$$\gamma = -\frac{1}{2}\left(\frac{4\,\lambda^2}{k^2} - \frac{4\,\lambda}{k} + \frac{3}{4}\right) \text{[3]} \qquad 10)$$

* * *

Betrachten wir insbesondere das Eigenwertproblem, welches sich ergibt für $\lambda = 2$, $\mathrm{k} = 4$. Man erhält $\gamma = \frac{1}{8}$ und als alleinige Eigenlösung:

$$y = \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

---

[3] Die Beziehung liefert für das Hermitesche Problem $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$; es ist in Gl. 5) $k = 4$ und $\gamma = o$.

Zur Unterscheidung setzen wir

$$y = y_1 \qquad \lambda = \lambda_1$$

und es folgt

$$y_1' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x\sqrt{x} \right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Gemäß 9) ist auch die Funktion

$$y_2 = -2\sqrt{x \cdot e}^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \left[\sqrt{x \cdot e}^{-\frac{x^2}{2}} \right]' + (2x^2 - 1)\sqrt{x \cdot e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= 4\,(x^2 - 1) \cdot y_1 \qquad 11)$$

Eigenlösung von

$$-y'' + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2} \right) y = \lambda y \qquad 12)$$

unter Erfüllung von 6) und 7). Man erhält durch Einsetzen in Gleichung 21)

$$-\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)\,y_1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2} \right)(x^2 - 1)\,y_1$$

$$= (x^2 - 1)\left[-y_1'' + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2} \right) y_1 \right] - 2 \cdot 2x \cdot y_1' - 2y_1$$

$$= (x^2 - 1) \cdot 2y_1 - 4x \left(\frac{1}{2x} - x \right) y_1 - 2y_1$$

$$= 6\,(x^2 - 1)\,y_1.$$

Der Eigenwert λ_2 ist also tatsächlich 6.

Analog findet man nach leichter Rechnung:

$$y_3 = (x^4 - 4x^2 + 2) \cdot \sqrt{x \cdot \mathrm{e}}^{-\frac{x^2}{2}} = (x^4 - 4x^2 + 2)\,y_1$$

und für den Eigenwert λ_3 erhält man 10. Das Verfahren kann nach Belieben fortgesetzt werden.

* * *

Allgemeiner findet man leicht:

1. Die Eigenwerte sind die Zahlen

$$\lambda_n = 2 + 4\,(n - 1) \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

2. Es existieren die Beziehungen

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot-2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2-1+\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]$$

$$-\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot-2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2-1+\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]\left[-\frac{d^2}{dx^2}+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]$$

$$\equiv 4\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot-2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2-1+\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right] \qquad 13)$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot+2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2+1+\frac{1}{4\,x^2}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot+2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2+1+\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]$$

$$\equiv 4\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot+2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2+1+\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right] \qquad 14)$$

Aus der Beziehung 14) folgt:
Durch Bildung von

$$-\lambda_n y_n+2\,xy_n'+(2\,x^2+1)\,y_n \qquad 15)$$

erhält man anstatt der aus 9) gebildeten, *folgenden* Eigenlösung, die der Eigenlösung y_n *vorangehende* Eigenlösung. Übt man 15) oft genug auf eine bestimmte Eigenlösung aus, so bricht die Kette der Eigenlösungen einmal ab. Die «erste» Eigenlösung y_1 wird somit den Beziehungen

$$-y_1''+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)y_1=\lambda_1 y_1$$

$$-\lambda_1\,y_1+2\,xy_1'+(2\,x^2+1)\,y_1=o \qquad 16)$$

genügen, *woraus man auf y_1 schließen kann.*

Zur Bestimmung von λ_1 kann die Beziehung dienen

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot-2\,x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2-1+\frac{1}{4x^2}\right)\cdot\right]\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot+2x\frac{d}{dx}\cdot+\left(x^2+1+\frac{1}{4x^2}\right)\cdot\right]$$

$$=\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]^2-4\left[-\frac{d^2}{dx^2}\cdot+\left(x^2-\frac{1}{4\,x^2}\right)\cdot\right]+4 \qquad 17)$$

Durch Ausübung von 17) auf y_1 wird die linke Seite $= o$ und aus der rechten Seite wird

$$(\lambda_1^2 - 4\,\lambda_1 + 4)\, y_1 = o \quad y_1 \neq o$$

$\lambda_1 = 2$ Doppellösung $\left(\text{Im allgemeinen Fall } \lambda_1 = \frac{k}{2}\right)$

3. Aus der ersten Eigenlösung 8) erhält man durch die Operation 9) ohne die Einschränkung $\lambda = 2$, $k = 4$ weitere Eigenlösungen. Die Eigenlösungen besitzen die Darstellung

$$y_n\,(x) = P_n\,(x)\, y_1\,(x) \qquad (y_1 = y \text{ von Gl. } 8).$$

$$P_n\,(x) = \sum_{i=o}^{\infty} a_{2i}\, x^{2i}$$

wobei $-(i + 1 - n) \cdot k\, a_{2i} = 4\,(i + 1)\, \frac{2\,\lambda_1 - i\,k}{k}\, a_{2i+2}$

λ_1 folgt aus der quadratischen Gleichung:

$$\lambda_1^2 - k\,\lambda_1 + \left(\frac{3}{16} + \frac{\gamma}{2}\right) k^2 = o.$$

und man erhält sukzessive die Eigenlösungen durch Bildung von

$$y_{n+1} \equiv y_n'' - \frac{k}{2}\, x\, y_n' + \left(\frac{k^2}{16}\, x^2 + \frac{2\gamma}{x^2} - \frac{k}{4}\right) y_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad 18)$$

bzw.:

$$y_{n-1} \equiv y_n'' + \frac{k}{2}\, x\, y_n' + \left(\frac{k^2}{16}\, x^2 + \frac{2\gamma}{x^2} + \frac{k}{4}\right) y_n \qquad 19),$$

wobei γ durch Gl. 10) gegeben ist. Wählt man $\gamma \neq \frac{1}{8}$, so erhält man außer y_1 noch eine zweite «erste» Eigenlösung $y_1{}^* \neq y_1$. Die Gesamtheit der Eigenfunktionen ergibt sich, indem man Gl. 18) auch für $y_1{}^*$ definiert und damit eine Kette von Eigenfunktionen $y_1{}^*$, $y_2{}^*$, $y_3{}^*$, ... erzeugt.

4. Es lassen sich unter Umständen durch Ansetzen allgemeiner linearer Differential-Operationen, an Stelle von 18) und 19) (Ableitungen 3., 4., ... Ordnung) weitere Verallgemeinerungen finden, deren Eigenwerte arithmetische Reihen 1. Ordnung bilden.

5. Im Buche von Szegö, Orthogonal Polynomials 1939[4], S. 371, wird eine Verallgemeinerung des Hermiteschen Problems dargestellt, dessen Lösungen indessen wieder mit Hilfe der Hermiteschen Orthogonalfunktionen dargestellt werden, was für das oben durchgerechnete Beispiel nicht gilt.

---

[4] Colloquium Publications, *American Mathematical Society*, Volume XXIII.

2. CH. BLANC (Lausanne). – *Etude stochastique de l'erreur pour les formules d'intégration numérique d'équations différentielles.*

La lecture des ouvrages un peu récents consacrés à l'intégration numérique d'équations différentielles fait apparaître l'abondance des méthodes et la difficulté de les comparer quant à leur précision. On connaît des bornes d'erreur pour quelques cas, mais elles sont en fait presque toujours inutilisables dans des circonstances particulières intéressantes et ne permettent certainement pas d'établir des comparaisons concluantes.

Les concepts stochastiques appliqués déjà par l'auteur à d'autres problèmes permettent par contre d'aborder cette étude d'une manière très efficace. Soit une équation différentielle (1) $y' = f(x, y)$, dont on cherche l'intégrale $y = F(x)$ avec $F(x_0) = y_0$. L'équation (1) est d'abord *linéarisée*, c'est-à-dire remplacée par une équation linéaire admettant l'intégrale $y = F(x)$ et les mêmes intégrales dans le voisinage, à des infiniment petits d'ordre supérieur près; l'équation linéaire est

$$(2) \qquad y' = A(x)\, y + F'(x) - A(x)\, F(x),$$

avec $A(x) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, où on a remplacé y par $F(x)$.

En supposant $F(x)$ aléatoire, stationnaire d'ordre deux, de moyenne nulle et de covariance $r(h)$, on peut calculer la covariance de deux fonctionnelles linéaires de $F(x)$; or, pour toutes les formules usuelles (Runge-Kutta, Adams, Milne, par ex.), l'erreur est une fonctionnelle linéaire de l'intégrale. Il est dès lors possible de donner explicitement la variance de l'erreur, et même facile de la calculer si on admet une représentation spectrale pour $r(h)$. Pour toutes les formules, les hypothèses sur l'équation et sur l'intégrale considérées sont les mêmes, ce qui permet les comparaisons. Par exemple, on montre ainsi qu'en moyenne et à travail égal, la formule de Runge-Kutta est plus favorable que celle de Milne, si le produit de A par le pas d'intégration est assez petit, et moins favorable si ce produit est plus grand. Les exemples donnés par ces auteurs permettent alors de constater combien il est prématuré de juger de ces méthodes au vu d'un seul cas particulier.

3. B. ECKMANN (Zürich). – *Über Enden und Derivationen in einer Gruppe.* – Kein Manuskript erhalten.

4. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). – *Structure de groupes.*

Pour étudier la structure d'un groupe imprimitif G_1, nous avons considéré des suites complètes de groupes associés à G_1. Soit 1) $G_1, G_2, \ldots, G_m$ une telle suite ($m \geq 2$); soit N_i l'ordre de G_i. Le groupe G_i est N_i/N_{i+1} fois isomorphe à G_{i+1}, $i = 1, \ldots, m-1$ et les groupes $G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}$ sont imprimitifs. A tout élément a_1 de G_1 on peut alors associer une suite 2) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ où a_i est l'élément de G_i qui correspond à a_1 dans l'isomorphisme de G_1 à G_i, produit des isomorphismes de G_1 à G_2, ..., de G_{i-1} à $G_i, i = 2, \ldots, m$. On peut définir $2(2^m-1)$ classes de substitutions de G_1, dont 2^m-1 sont des classes paires et les autres impaires. On dira notamment qu'une substitution a_1 de G_1 est de classe $C_j^{i_1 i_2 \ldots i_t}$ ($1 \leq i_1 \ldots \leq i_t \leq m$, $1 \leq t \leq m$, $j = o$ ou 1) si le nombre ν de substitutions impaires dans la suite $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t}$ est congru à j modulo 2. $j = o$ pour les classes paires et $j = 1$ pour les classes impaires. Le groupe G_1 est dit complet par rapport à la suite 1) si aucune des classes $C_j^{i_1 i_2 \ldots i_t}$ n'est vide et si toutes ces classes sont distinctes. Supposons que tel est le cas. Alors le groupe G est à base d'ordre m et le nombre total de ses bases est $\leq \left(\frac{N_1}{2^m}\right)^m \frac{(2^m-1)\ (2^m-2)\ldots(2^m-2^{m-1})}{m!}$. Le nombre t est l'ordre de la classe $C_j^{i_1 i_2 \ldots i_t}$.

Toute substitution a de G_1 est commune à m classes du premier ordre. Soient $C_{\alpha_1}^1, C_{\alpha_2}^2, \ldots, C_{\alpha_m}^m$ les classes du premier ordre dont fait partie une substitution donnée a de G_1. Nous dirons que la substitution a est du genre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. La substitution a est de classe $C_o^{i_1 \ldots i_t}$ si $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_t} \equiv o \pmod 2$ et elle est de classe $C_1^{i_1 \ldots i_t}$ dans le cas contraire. Soit $M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ l'ensemble des substitutions de G_1 qui sont du genre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. On définit ainsi 2^m classes M et chaque élément de G_1 fait partie d'une de ces classes et d'une seule. Le produit de deux classes M : $M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}\ M_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}$ est, par définition, l'ensemble des substitutions ab, $a \in M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$, $b \in M_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}$. Ce produit est, à son tour, une classe M, notamment $M_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m}$, où $\gamma_i \equiv \alpha_i + \beta_i \pmod m$. Avec cette loi de composition, les classes M forment un groupe abélien G dont tout élément, excepté la classe $M_{o \ldots o}$ appelée classe zéro, est du second ordre. Ce groupe est à base d'ordre $k \leq m$ et tout système de k éléments indépendants constitue une base de ce groupe. La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe G_1 soit complet par rapport à la suite 1) c'est que, quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ de l'ensemble $\{o, 1\}$, la classe $M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ ne soit pas vide et, par suite, que G soit d'ordre 2^m.

On peut généraliser cette étude à des groupes abstraits pour lesquels il existe un nombre premier p, tel que dans toute relation de la forme $\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 1$ liant des éléments $l_1, l_2, \ldots, l_n$ de ce groupe, la somme des exposants de $l_1, \ldots, l_n$ soit $\equiv o \pmod p$.

5. Sophie Piccard (Neuchâtel). – *Quelques problèmes de la théorie des substitutions.*

Pour trouver un système de relations caractéristiques d'un groupe d'ordre fini, il suffit de connaître une quelconque de ses bases et de reconstituer le groupe à partir de cette base. A chaque base d'un groupe on peut faire correspondre un système de relations caractéristiques du groupe. Ce système n'est pas défini de façon unique et il est aussi caractéristique de la base qui a permis de le trouver. Deux bases qui se correspondent dans un automorphisme interne ou externe du groupe satisfont à un même ensemble de relations caractéristiques.

Soit G un groupe d'ordre fini, soit $B_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $B_2 = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_m\}$ deux bases de ce groupe et soit 1) $\varphi_i(A_1, \ldots, A_m) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, un système de relations caractéristiques de la base B_1. Comme B_1 est une base de G, chacun des éléments A'_i s'obtient par composition finie des éléments de B_1. Soit 2) $A'_i = \xi_i(A_1, \ldots, A_m)$, $i = 1, \ldots, m$. Comme B_2 est aussi une base de G, chacun des éléments de B_1 peut, à son tour, s'obtenir par composition finie de $A'_1, \ldots, A'_m$. Soit 3) $A_i = \psi_i(A'_1, \ldots, A'_m)$. Si les égalités 3) peuvent se déduire des égalités 2) sans faire appel à aucune autre relation entre les éléments de G, en remplaçant dans les égalités 2), A_i par $\psi_i(A'_1, \ldots, A'_m)$, quel que soit $i = 1, \ldots, m$, on obtient la relation triviale $A'_i = A'_i$, $i = 1, \ldots, m$, et, dans ce cas, on peut déduire les relations caractéristiques de la base B_2 des relations 1), en remplaçant dans celle-ci A_i par $\psi_i(A'_1, \ldots, A'_m)$, quel que soit $i = 1, \ldots, m$.

Si l'on veut caractériser un groupe d'ordre fini de toutes les façons possibles correspondant à ses différentes bases, il suffit de considérer un système de représentants indépendants des bases de ce groupe et de chercher un système de relations caractéristiques de chacune de ces bases. Le travail peut encore être réduit lorsque le groupe possède des automorphismes externes.

C'est ainsi que l'on peut déduire tous les systèmes de relations caractéristiques du groupe alterné $\mathfrak{A}_6$ de degré 6 à partir de quatre de ses bases, par exemple des quatre bases (S, T) suivantes pour chacune desquelles nous donnons un système de relations caractéristiques: 1) $S = (1\,2\,3\,4)(5\,6)$, $T = (1\,5\,2\,6)(3\,4)$; $S^4 = 1$, $TS^2TS^2T^{-3}S^2 = 1$, $T^2ST^2ST^{-2}S = 1$, $T^3S^3TST^{-1}S^3T^{-3}S = 1$. 2) $S = (1\,2\,3\,4\,5)$, $T = (1\,2\,3)(4\,5\,6)$; $S^5 = 1$, $S^4TS^4T^{-2}S^4T^{-2} = 1$, $TSTST^{-2}ST^{-2}S = 1$. $T^2S^3TS^2T^{-1}S^3T^{-2}S^2 = 1$. 3) $S = (1\,2\,3\,4\,5)$, $T = (1\,2\,4\,3\,6)$; $S^5 = 1$, $T^5 = 1$, $(T^2S^2)^2 = 1$, $TS^2TST^4S^3T^4S = 1$. 4) $S = (1\,2\,3\,4\,5)$, $T = (1\,4\,3\,2\,6)$; $S^5 = 1$, $T^5 = 1$, $(TS)^2 = 1$, $T^4S^3T^2ST^3ST^2S^3 = 1$.

Dans son travail «Concerning the abstract groups of order $k!$ and $k!/2\ldots$» (1), Moore avait établi, entre autres, un système de relations caractéristiques du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 4)$ à partir de la base $S = (1\,2\ldots n)$, $T = (1\,2)$. C'est le système suivant: 1) $S^n = 1$, 2) $T^2 = 1$, 3) $(TS)^{n-1} = 1$, 4) $(TSTS^{-1})^3 = 1$, 5) $(TS^lTS^{-l})^2 = 1$, $l = 2, 3, \ldots, n-2$. Toutes les relations de ce système ne sont pas indépendantes. Il suffit de prendre dans 5) $l = 2, \ldots, n/2$ $(n-1/2)$ si n est pair (impair). D'autre part, 4) résulte des autres relations du système indiqué quel que soit $n \geq 4$.

[1] Proceedings of the London Math. Society, vol. XXVII, 1897.

Es haben noch gesprochen: J. Hersch, Zürich; A. Longhi, Lugano; J. Milnor, Zürich; K. Voß, Zürich.