1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Sonntag, den 24. August 1952

Präsident: Prof. F. Fiala (Neuchâtel)
Sekretär: Prof. E. Stiefel (Zürich)

1. Albert Challand (Berne). – *Moyenne d'une série de grandeurs fortuites dont la loi de distribution est elle-même fortuite.*

Ce titre n'indique qu'un exemple des calculs auxquels peuvent donner lieu les événements fortuits y_1 et y_2 envisagés par le même auteur page 123, dernier alinéa, des Actes de la S.H.S.N., Davos 1950.

On peut prendre comme exemple théorique, moyennant la restriction $y \geqq 0$

$$p_1(y) = y_0\, e^{-yy_0} \text{ et } p_2(y_1, y) = y_1 e^{-yy_1}$$

Si le premier événement a la grandeur y_1, la valeur moyenne de y_2 pour cette valeur y_1 est donnée par $\int_0^\infty y_1 e^{-yy_1}\, dy \cdot y$

Effectuons cette intégrale:

$$\int_0^\infty y_1 e^{-yy_1}\, y dy = \frac{1}{y_1} \int_0^\infty e^{-z} z\, dz \text{ en posant } yy_1 = z.$$

$$\text{Mais } \int_0^\infty e^{-z} z dz = -e^{-z} z \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-z}\, dz = 1.$$

Donc y_2 vaut en moyenne $\frac{1}{y_1}$. Intégrons ce résultat pour l'ensemble des valeurs que peut prendre y_1. Il vient, en posant μ_2 pour la valeur moyenne de y_2

$$\mu_2 = \int_0^\infty \frac{y_0\, e^{-y_1 y_0}}{y_1}\, dy_1 = y_0 \int_0^\infty \frac{e^{-z}\, dz}{z} = \infty.$$

Cette antinomie d'une moyenne infinie pour une série de grandeurs toutes finies s'explique assez facilement en termes de logique. Historiquement, un cas identique est connu depuis longtemps sous le nom de *paradoxe de Saint-Pétersbourg.*

On peut se proposer d'éliminer y_1 de l'expression $p_1(y)$. Si c'était possible en général (ce qui n'est pas), cela rendrait superflue toute la théorie à laquelle cette communication est consacrée. Mais il se trouve qu'avec les fonctions choisies cette élimination est en effet possible:

Si y_1 prend la valeur y_1, la valeur correspondante de $p_2(y_1, y)$ est $y_1 e^{-yy_1}$ avec une probabilité $y_0 e^{-yy_0}$; la moyenne de $p_2(y_1, y)$ pour toutes les valeurs de y_1, c'est-à-dire la moyenne générale $p_2(y)$ de la probabilité du second événement est par conséquent

$$\int_0^\infty y_0\, e^{-y_1 y_0}\, y_1\, e^{-yy_1}\, dy_1 = \int_0^\infty y_0\, e^{-y_1(y_0+y)}\, y_1\, dy_1 =$$

$$= \frac{y_0}{(y_0+y)^2} \int_0^\infty e^{-y_1(y_0+y)}\, y_1 (y_0+y)\, d\left[y_1(y_0+y)\right] =$$

$$= \frac{y_0}{(y_0+y)^2} \int_0^\infty e^{-z} z\, dz = \frac{y_0}{(y_0+y)^2}$$

en posant $z = y_1(y_0+y)$.

La notion de probabilité d'une probabilité ressort de l'alinéa précédent. Elle a de l'avenir, et le vœu a été exprimé au symposium du 23. 8. 52 qu'elle soit étudiée de plus près. On peut légitimer cette étude par la considération suivante.

Si un événement de probabilité $p_1(y)$ prend la valeur y_1, on n'a pas seulement $y = y_1$, mais aussi $p_1(y) = p_1(y_1)$, ce qui a la même signification en vertu de l'équivalence de l'effet et de la cause, la probabilité étant une mesure de celle-ci. Si donc je puis chercher la valeur moyenne $E(y_1) = \int_0^\infty y\, p_1(y)\, dy$, je puis chercher avec la même légitimité la valeur moyenne

$$E\left[p_1(y_1)\right] = \int_0^\infty p_1(y_1)\, p_1(y)\, dy = \int_0^\infty \left[p_1(y)\right]^2 dy$$

qui a la même signification. Avec $p_1(y) = y_0\, e^{-yy_0}$, on a

$$E(p_1) = \int_0^\infty y_0^2\, e^{-2yy_0}\, dy = \frac{y_0}{2} \int_0^\infty e^{-z}\, dz = \frac{y_0}{2} \text{ en posant } z = 2yy_0.$$

D'un autre côté, la considération du nombre d'épreuves nécessaires pour que les distributions de y_1 et y_2 puissent être qualifiées de régulières, conduit à des discussions intéressantes.

Les mêmes calculs répétés avec

$$p_1(y) = \frac{e^{-\frac{y}{y_0}}}{y_0} \text{ et } p_2(y_1, y) = \frac{e^{-\frac{y}{y_1}}}{y_1}$$

conduisent, malgré une certaine analogie formelle du point de départ, à des résultats tout différents.

2. Sophie Piccard (Neuchâtel). – *Sur les groupes de substitutions.*

Les groupes primitifs à base du second ordre autres que le symétrique et l'alterné que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles d'ordre k:

k	Groupe de degré	Groupe de ordre	Couple de cycles générateurs d'un groupe du type considéré	Nombre de bases[1] total	de 1re espèce genre 1	de 1re espèce genre 2	de 2e espèce
4	5	20	(1 2 3 4), (1 3 2 5)	120	100	—	20
4	6	120	(1 2 3 4), (1 2 5 6)	3 420	3 120	—	300
5	6	60	(1 2 3 4 5), (1 3 2 4 6)	1 140	840	120	180
6	6	120	(1 2 3 4 5 6), (1 3 5 2 6 4)	3 420	3 120	—	300
6	7	42	(1 2 3 4 5 6), (1 3 4 2 5 7)	504	462	—	42
6	8	336	(1 2 3 4 5 6), (1 4 3 7 8 2)	34 776	32 256	—	2 520
7	7	168	(1 2 3 4 5 6 7), (1 2 6 5 3 4 7)	9 576	8 736	—	840
7	8	56	(1 2 3 4 5 6 7), (1 2 5 4 6 3 8)	1 344	1 176	—	168
7	8	168	(1 2 3 4 5 6 7), (1 4 5 2 3 6 8)	9 576	7 392	1 344	840
7	8	1344	(1 2 3 4 5 6 7), (1 2 3 6 5 4 8)	459 648	>0	—	>0
7	9	504	(1 2 3 4 5 6 7), (1 2 8 9 4 5 3)	107 352	96 768	—	10 584
8	8	336	(1 2 3 4 5 6 7 8), (1 2 4 6 7 5 8 3)	34 776	32 256	—	2 520
8	9	72	(1 2 3 4 5 6 7 8), (2 8 4 5 7 6 3 9)	1 728	1 540	144	144
8	9	432	(1 2 3 4 5 6 7 8), (2 4 6 5 7 3 8 9)	31 104	30 240	—	864
8	10	720	(1 2 3 4 5 6 7 8 9), (1 3 2 5 4 6 9 10)	169 920	156 960	12 880	10 080
9	9	504	(1 2 3 4 5 6 7 8 9), (1 2 7 5 8 3 6 4 9)	107 352	96 768	—	10 080
9	9	1512	(1 2 3 4 5 6 7 8 9), (1 2 3 4 6 8 5 9 7)	896 616	>0	—	>0

[1] Une base S, T d'un groupe primitif G de degré n, sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, est dite de première espèce s'il n'existe aucune substitution du groupe G qui transforme S en T et T en S. La base S, T est dite de seconde espèce s'il existe une substitution R de G, telle que $RSR^{-1} = T$, $RTR^{-1} = S$. Si la base S, T est de première espèce, elle est dite de genre 1 (de genre 2) s'il n'existe aucune substitution de l'ensemble $\mathfrak{S}_n$-G qui transforme S en T et T en S (s'il existe une substitution R de $\mathfrak{S}_n$-G, telle que $RSR^{-1} = T$ et $RTR^{-1} = S$). Lorsque la base S, T est de seconde espèce, respectivement de première espèce et du genre 2, la substitution correspondante R est unique et elle est du second ordre.

Soient $k \geqq 2$ et $n > k$ deux entiers. Soit S une substitution quelconque de degré n et soit T un cycle d'ordre k faisant, avec S, partie du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Il existe, pour toute valeur de l'entier k, un entier minimum $N_k > k$, tel que si $n > N_k$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions S et T constituent une base du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (alterné $\mathfrak{A}_n$) si l'une au moins des substitutions S, T est impaire (si les deux substitutions S et T sont paires), c'est que S et T soient connexes et primitives.

On a des résultats suivants:

k	2	3	4	5	6	7	8	9
N_k	2	3	7	7	9	10	11	10

L'étude des bases du groupe symétrique et du groupe alterné dont l'une des substitutions est un cycle d'ordre $k \geqq 2$ peut être ramenée à l'étude des groupes que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles du même ordre k. Si l'on se borne à considérer les valeurs de k, telles que $2 \leqq k \leqq 9$, tous les groupes non cycliques que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles d'ordre k sont à base du second ordre. Pour les valeurs indiquées de k, il existe, en dehors du groupe symétrique ou du groupe alterné des éléments permutés par les cycles du système, 14 types de groupes énumérés ci-après et chacun de ces groupes peut être engendré par un couple de cycles connexes du même ordre k.

3. Hugo Hadwiger (Bern). – *Über additive und schwachstetige Polyederfunktionale.*

Es handelt sich um translationsinvariante, einfach-additive und schwachstetige Polyederfunktionale, d. h. um Funktionen $f(A)$, die über der Klasse der eigentlichen Polyeder A des k-dimensionalen euklidischen Raumes definiert sind und die nachfolgenden Eigenschaften aufweisen:

I. $f(A) = f(B)$, falls A und B translationsgleich sind;

II. $f(A+B) = f(A)+f(B)$, falls $A+B$ eine Zerlegung in A und B bezeichnet;

III. $f(A)$ ist schwachstetig, d. h. verhält sich bei Variation von A innerhalb einer Parallelschar stetig.

Das Studium derartiger Funktionale steht im engsten Zusammenhang mit der Frage der translativen Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder. Ihre Gesamtheit – offensichtlich eine lineare Mannigfaltigkeit – sei hier mit M_k bezeichnet. Durch eine rekursive Darstellungsformel kann jedes Funktional $f(A)$ von M_k ausgedrückt werden durch das Volumen $V(A)$ von A und durch Funktionale $f(A')$ von M_{k-1}, die sich auf die $({}_{k-1})$-dimensionalen Randflächen A' von A beziehen. Die Mannigfaltigkeit M_1 ist durch $f(A) = cV(A)$ gegeben. Aus der rekursiven Formel kann eine explizite Darstellung der Funktionale von M_k gewonnen werden. – Einige Folgerungen werden kurz erwähnt. Für ein Funktional von M_k gilt immer eine Zerlegung $f(A) = \Sigma_1^k f_i(A)$, wobei

$f_i(A)$ ein homogenes Funktional vom Grad i bedeutet, so daß für eine Dilatation, die A in das homothetische Polyeder λA überführt, die Beziehung $f_i\,(\lambda A) = \lambda^i f_i(A)$ gilt. Ist $f(A)$ nicht nur translationsinvariant, sondern sogar bewegungsinvariant, so kann gefolgert werden, daß $f_i(A) \equiv 0$ ist für alle i, für die $k-i$ ungerade ausfällt. Diese Sachlage hängt mit gewissen neuen Einsichten zusammen, die innerhalb der Zerlegungstheorie der Polyeder (im klassischen Sinne, d. h. bei Zugrundelegung der Bewegungsgruppe) erzielt wurden. So folgt beispielsweise aus der Tatsache, daß in Räumen gerader Dimension die linearen (homogen vom Grad 1) bewegungsinvarianten Funktionale identisch verschwinden müssen, daß jedes Polyeder mit einem Zylinder zerlegungsgleich ist.

4. BENO ECKMANN (Zürich). – *Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten.* – Kein Manuskript erhalten.

5. GEORGES DE RHAM (Lausanne). – *Sur les espaces de Riemann réductibles.*

Soit V un espace de Riemann connexe, de classe C^2. Les rotations de l'espace vectoriel euclidien T_x tangent en un point x de V qu'on obtient par transport parallèle le long des lacets différentiables par morceaux fermés en x forment un groupe appelé *groupe d'holonomie homogène* de V relatif au point x. On dit que V est *réductible,* si ce groupe est réductible, c'est-à-dire s'il laisse invariant au moins un sous-espace réel non trivial de T_x. Dans le cas contraire, V est dit *irréductible* (cf. A. Borel et A. Lichnerowicz, C. R. Acad. Sc., t. 234, 1952, p. 1835–37).

On sait, et l'on vérifie immédiatement, que le *produit riemannien* $V_1 \times V_2$ de deux espaces, c'est-à-dire la variété $V_1 \times V_2$ munie du ds^2 égal à la somme des ds^2 de V_1 et V_2, est toujours réductible. Il existe aussi des espaces réductibles qui ne sont pas des produits riemanniens. Mais on a le théorème suivant:

Tout espace de Riemann réductible qui est simplement connexe et complet est isométrique à un produit d'espaces irréductibles.

La démonstration complète sera publiée aux Commentarii Mathematici Helvetici.

6. GUSTAV HUNZIKER (Reinach, Aargau) – *Über Parallelentheorie.*

Die Geometrien der Ebene und der Kugel- und Hyperboloid-Sattelfläche gelten bekanntlich als gleichberechtigt und alle drei als gleicherweise axiomatisch widerspruchsfrei. Physisch aber kann natürlich nur *1* der 3 verwirklicht sein. So dürfte man erwarten, daß auch logisch nur *1* der 3 ganz einwandfrei bestehen könne und daß man den beiden andern irgendwie Unstimmigkeiten sollte nachweisen können. Und tatsächlich, wenn man dieser Sache nachgeht, sind Widersprüche nachweisbar, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Vergleichen wir die drei Fälle zunächst etwas, so erkennt man, daß zwei der drei Flächen einander in der Hinsicht näher verwandt sind, daß es bei ihnen Gerade (im weitern Sinne) gibt, die ins Unendliche gehen, wogegen auf der Kugelfläche nicht. Und wegen dieser Beteiligung von Unendlichem sind jene zwei Geometrien logisch unsauber, nicht widerspruchsfrei; denn logisch sauber ist nur, was genau umschrieben, klar abgegrenzt ist. – Aber wir wollen den Beweis der logischen Unsauberkeit nicht nur so allgemein, sondern an konkreten Beispielen erbringen.

Hiezu denken wir uns nun auf einer Euklidischen Geraden, als Zahlenstrahl, von einem Punkt A_0 aus, den natürlichen Zahlen (1, 2, 3 ... bis ∞) entsprechende Punkte A_1, A_2, A_3 ... bis $A\infty$ angemerkt und zu dieser Geraden durch 1 Punkt P (außerhalb von g) zu g die Parallele p. Nun läßt sich jedem solchen Punkte A_i umkehrbar eindeutig ein Strahl A_iP zuordnen und letzterem ebenso umkehrbar eindeutig ein Winkel A_iPA_{i-l}. Während aber die Streckensumme $A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots$ gemäß üblicher Auffassung *ohne* Ende wachsen kann zufolge der Endlosigkeit der natürlichen Zahlenreihe, muß die Summe der diesen Einheitsstrecken entsprechenden Winkel $A_0AA_1 + A_1AA_2 + A_2AA_3 + \ldots$. zufolge des Euklidischen Parallelenpostulats bei 90° unzweifelhaft *enden* (auch als «konvergierende unendliche» Reihe mit dem *Grenz*wert 90°)! Das aber ist, wegen der durch die Strahlen A_iP vermittelten eindeutigen Zuordnung der Punkte A_i zu den Winkeln A_iPA_{i-1} ein Widerspruch; denn es können nur entweder *beide* ohne Ende wachsen oder *beide* nicht.

So kann man z. B. auch jedem Posten der zum *Grenzwert* 1 konvergierenden Reihe $^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + \ldots$ eindeutig eine Summe $^1/_2 + {}^1/_4$, $^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8$, $^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16}$ usw. zuordnen. Wenn es nun für die Zufügung solcher Posten kein Ende gäbe, so auch für deren Summen nicht; der *End*wert (*Grenz*wert) dieser ist aber 1. Also müßte von 2 einander umkehrbar eindeutig zugeordneten Gebilden das eine eindeutig begrenzt sein und das andere nicht. Das ist *nicht* widerspruchsfrei. – Diese offensichtliche Ungereimtheit (siehe Cantorsche Mengentheorie!) blieb wohl nur deswegen für die Analysis ungefährlich, weil man von «unendlichen konvergenten» Reihen (welche beiden Eigenschaften sich ja gegenseitig ausschließen!) nur *redet,* hingegen mit ihrem *End*wert *rechnet.*

Aus dem vorher Gesagten folgt: Es sind keine Euklidischen Parallelen widerspruchsfrei denkbar (Euklid hat deren Existenz ja nicht bewiesen, nur vorausgesetzt!) – und deshalb auch keine Euklidischen Geraden! – Und was nicht widerspruchsfrei – und das bedeutet: logisch nicht möglich – ist, ist auch nicht physisch realisierbar bzw. realisiert. So können z. B. die Parallelperspektive und die Euklidische Geometrie nur Annäherungen an die Wirklichkeit sein, die eben theoretisch besonders einfach und für gewöhnliche Bedürfnisse genügend genau sind.

Es haben noch gesprochen: H. Blumer, Zürich; Werner Gautschi, Basel; H. Guggenheimer, Basel; Joseph Hersch, Zürich; M. Jeger, Olten; H. Meier, Rorbas; K. Voß, Zürich.