

Section de Mathématiques

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden
Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences
Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **129 (1949)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

I. Section de Mathématiques

Séance de la Société suisse de Mathématiques

Samedi, le 3 septembre 1949

Président : Prof. Dr CHARLES BLANC (Lausanne)

Secrétaire : Prof. F. FIALA (Neuchâtel)

1. FÉLIX FIALA (Neuchâtel). — *Quelques généralisations de la symétrisation de Steiner.*

Il peut être utile et intéressant de considérer quelques transformations apparentées à la *symétrisation* utilisée par Steiner dans ses recherches sur le problème des isopérimètres:

1. *La symétrisation partielle* d'une figure est utilisable p. ex. pour diminuer le périmètre de certains polygones en conservant leur surface et le nombre des côtés.

2. *La symétrisation circulaire* consiste à considérer les arcs interceptés sur la figure donnée par une famille de cercles concentriques de centre O et à faire glisser chaque arc sur le cercle qui le porte, jusqu'à ce qu'il soit symétrique par rapport à une droite passant par O.

On démontre facilement comme dans le cas de Steiner, qui est en fait un cas limite, que la symétrisation circulaire conserve l'aire et diminue le périmètre de la figure considérée.

Un des avantages de ce procédé est de pouvoir être utilisé tel quel sur une surface à courbure constante, sphère ou plan hyperbolique et d'y démontrer élémentairement la propriété de minimum du périmètre du cercle.

3. Etant donné un triangle, ou plus généralement un polygone quelconque, ou plus généralement une courbe simplement fermée, et une droite d, on considère toutes les figures obtenues à partir de la figure donnée par une affinité d'axe d et de direction parallèle à d; quelle est la condition pour que la figure donnée présente le périmètre minimum? (Toutes les figures ont même aire.)

Soit $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$, ($P_{n+1} = P_1$) les sommets du polygone.

En prenant la droite d comme axe des x et un axe perpendiculaire comme axe des y, désignons par

a_k et b_k les composantes du vecteur $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$
par l_k sa longueur et par φ_k l'angle qu'il fait avec l'axe des x.

La condition cherchée est

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{l_k} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n l_k \sin 2 \varphi_k = 0$$

Pour une courbe, en posant $ds^2 = dx^2 + dy^2$ et $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$

on a pour condition

$$\int \frac{dx dy}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad \int \sin 2 \varphi ds = 0$$

L'application de cette condition aux polygones réguliers fournit le théorème élémentaire suivant (énoncé dans le cas du triangle):

Si l'on circonscrit le rectangle ABCD au triangle équilatéral AEF, l'aire du triangle ECF est égale à la somme des aires des triangles ABE et AFD.

2. BENO ECKMANN (Zürich). — *Analytische und harmonische Differentiale in komplexen Mannigfaltigkeiten.* — Kein Manuskript erhalten.

3. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Les divers groupes que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles du sixième ordre et les bases de ces groupes.*

Soit n un entier ≥ 6 , soit \mathfrak{S}_n le groupe symétrique d'ordre $n!$ dont les substitutions permutent les éléments $1, 2, \dots, n$. Soit S un système connexe et primitif¹ de cycles du sixième ordre qui permutent au total n éléments et soient C_1, C_2, \dots, C_k les cycles du système S .

Lemme 1. Si un groupe transitif et primitif de substitutions des éléments $1, 2, \dots, n$ contient deux cycles connexes et imprimitifs indépendants du sixième ordre, ce groupe est le symétrique \mathfrak{S}_n .

Lemme 2. Soient $m \geq 2$ et $n \geq m$ deux entiers, soit G un groupe transitif et primitif de substitutions de degré n , dont les substitutions permutent les éléments $1, 2, \dots, n$, et qui contient un cycle $C = (c_1 c_2 \dots c_m)$ d'ordre m . Alors les transformés de C par toutes les substitutions du groupe G constituent un système connexe et primitif de cycles d'ordre m qui permutent les n nombres $1, 2, \dots, n$.

Proposition I. Quel que soit l'entier $k \geq 2$ et quels que soient les k cycles du sixième ordre C_1, C_2, \dots, C_k qui forment un système connexe

¹ Soit E l'ensemble des éléments permutés par les cycles du système S . Le système S est *connexe* s'il n'existe aucun sous-ensemble propre de E , composé de la totalité des éléments de certains cycles de S . Le système S est *primitif* s'il est impossible de décomposer E en $h \geq 2$ sous-ensembles E_1, E_2, \dots, E_h du même ordre ≥ 2 , disjoints deux à deux et tels que tout cycle de S qui transforme au moins un élément d'un ensemble E_i en un élément d'un ensemble E_j transforme tout l'ensemble E_i en E_j ($1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq h$).

et primitif S , ces k cycles engendrent soit un groupe G_{120} d'ordre 120 et de degré 6, soit un groupe G_{42} de degré 7 et d'ordre 42, soit un groupe G_{336} d'ordre 336 et de degré 8, soit le groupe symétrique des substitutions des éléments permutés par tous les cycles du système S .

Proposition II. Le groupe G engendré par un système connexe et primitif de cycles du sixième ordre est toujours à base du second ordre. Si ce groupe est d'ordre 120, il possède au total 3420 bases et est simplement isomorphe à \mathfrak{S}_5 ; si G est d'ordre 42, c'est un groupe métacyclique, il possède au total 504 bases et est caractérisé par les relations fondamentales $A^6 = 1$, $B^6 = 1$, $B^3AB^2A^4 = 1$; si G est d'ordre 336, il peut être caractérisé par les relations fondamentales $A^6 = 1$, $(B^2A^2)^2 = 1$, $(BA)^3 = 1$, $BA^3BA^5B^3A^5 = 1$, $BA^4B^2A^3B^2A^4 = 1$ et ce groupe possède au total 34 776 bases.

Lemme 3. Soient $m \geq 2$ et $n \geq m$ deux entiers et soient A et B deux substitutions connexes et primitives de degré n , dont l'une B est un cycle d'ordre m . Soit k l'ordre de A et soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des éléments permutés par A et B . Alors les k substitutions $A^i B A^{-i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, constituent un système connexe et primitif de cycles d'ordre m qui permutent tous les éléments de l'ensemble E .

Proposition III. Quel que soit l'entier $n \geq 9$, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions A et B du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , dont l'une B est un cycle du sixième ordre, constituent une base de \mathfrak{S}_n , c'est que A et B soient connexes et primitives.

4. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Les sous-groupes primitifs d'ordre 1344 du groupe alterné de degré 8.*

Soit \mathfrak{A}_8 le groupe alterné de degré 8, dont les substitutions permutent les éléments $1, 2, \dots, n$. Soit $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $E_8 = \{4, 6, 7, 8\}$, $E_{j+i} = S^i E_j S^{-i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $j = 1, 8$, soit $R_1 = (1\ 4)\ (2\ 7)\ (3\ 8)\ (5\ 6)$ et soit $R_{1+i} = S^i R_1 S^{-i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Considérons toutes les substitutions de l'une des quatre formes suivantes:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & a_4 & b_4 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_4 & a_4 & b_1 & b_3 & b_2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_2 & a_4 & b_3 & b_1 & b_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_3 & a_4 & b_2 & b_4 & b_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où a_1, a_2, a_3 sont trois nombres quelconques de E , $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est l'un des ensembles E_i ($1 \leq i \leq 14$) et $(a_1\ b_1)\ (a_2\ b_2)\ (a_3\ b_3)\ (a_4\ b_4) = R$ où $j = i$, si $1 \leq i \leq 7$ et $j = i-7$, si $8 \leq i \leq 14$. Ces substitutions forment un groupe primitif, trois fois transitif, de degré 8 et d'ordre 1344, à base du second ordre, sous-groupe de \mathfrak{A}_8 . Soit ${}_1G_{1344}$ ce groupe. En transformant ce groupe par la substitution $(4\ 7\ 5\ 6)$, on obtient un second sous-groupe primitif d'ordre 1344 de \mathfrak{A}_8 , ${}_2G_{1344}$.

Le groupe ${}_1G_{1344}$ se compose de 384 substitutions du type 7¹, de 224 substitutions du type 6.2, de 224 substitutions du type 3.3, de 252 substitutions du type 4.4, de 49 substitutions du type 2.2.2.2, de 168 substitutions du type 4.2, de 42 substitutions 2.2 et de la substitution identique 1. Ce groupe peut être entièrement caractérisé par les six relations.

$$A^7=1, B^2=1, (BA^3)^4=1, (BA)^6=1, (BA^3BA^2BA)^2=1, \\ BA^3BABABA^4BA^5BA^6BA^5=1,$$

relations qui sont satisfaites par la base $A = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $B = (1\ 3\ 4\ 8)$ de ${}_1G_{1344}$ et qui sont caractéristiques de cette base. Si l'on répartit les substitutions de ${}_1G_{1344}$ en classes de substitutions conjuguées, on obtient onze classes qui ne se confondent pas avec les classes de substitutions semblables de ${}_1G_{1344}$, l'ordre de chacune de ces classes étant un diviseur de 1344. A partir de ces classes, on détermine aisément toutes les bases du groupe ${}_1G_{1344}$. Le nombre total de ces bases est 459.648 et elles se répartissent en 20 types²: (7, 7), (7, 6.2), (7, 3.3), (7, 4.4), (7, 2.2.2.2), (7, 4.2), (7, 2.2), (6.2, 6.2), (6.2, 3.3), (6.2, 4.4), (6.2, 2.2.2.2), (6.2, 4.2), (6.2, 2.2), (4.4, 4.4), (4.4, 3.3), (4.4, 4.2), (4.4, 2.2), (4.2, 4.2), (4.2, 3.3) et (4.2, 2.2.2.2). Parmi ces bases, il y a des bases de première espèce et du genre 1 ainsi que des bases de seconde espèce².

Le groupe ${}_1G_{1344}$ est un groupe composé. Il a pour seul sous-groupe invariant propre le groupe G_8 d'ordre 8, abélien transitif et imprimitif, formé de sept substitutions du type 2.2.2.2 et de 1. D'autre part, le groupe ${}_1G_{1344}$ compte de nombreux sous-groupes non invariants, transitifs (primitifs et imprimitifs) et intransitifs.

La partie commune aux deux groupes ${}_1G_{1344}$, ${}_2G_{1344}$ est un sous-groupe transitif primitif simple d'ordre 168 et de degré 8.

5. MAX GUT (Zürich). — *Eulersche Zahlen und großer Fermatscher Satz.*

Bekannt ist die Bedeutung der *Bernoullischen Zahlen* im ersten Fall des großen *Fermatschen Satzes* für einen ungeraden Primzahl-exponenten l . Mit Rücksicht auf den engen Zusammenhang zwischen den *Bernoullischen* und den *Eulerschen Zahlen* kann man sich fragen, welche Bedeutung die letzteren für den großen *Fermatschen Satz*

¹ Soient a_1, a_2, \dots, a_r des entiers, tels que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq 2$. Nous disons qu'une substitution A est du type $a_1. a_2. \dots a_r$, s'il est possible d'ordonner les cycles d'ordre > 1 de A en une suite $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, telle que le cycle σ_i est d'ordre a_i , $i = 1, 2, \dots, r$.

² Si un groupe de substitution G est à base du second ordre et si A, B est une base de ce groupe, nous disons que cette base est du type (t, t') lorsque l'une des substitutions A, B est du type t et l'autre est du type t' . L'autre part, nous disons que la base A, B est de première espèce et du genre 1 s'il n'existe aucune substitution (faisant ou non partie de G) qui transforme A en B et B en A et nous disons que la base A, B est de seconde espèce lorsqu'il existe une substitution R de G , telle que $RA R^{-1} = B$ et que $RB R^{-1} = A$.

haben. Unter Benutzung des Reziprozitätsgesetzes der l -ten Potenzreste im Körper der $4l$ -ten Einheitswurzeln, für welches ich eine von der p -adik freie Formulierung gebe, kann man zeigen, daß, wenn die Gleichung

$$X^{2l} + Y^{2l} = Z^{2l} \quad (*)$$

eine Lösung in ganzen rationalen zu l teilerfremden Zahlen besitzt, Kongruenzen von der Form

$$\begin{aligned} \varphi_w(t) \cdot B_{l-w} &\equiv 0 \pmod{l}, \quad w = 3, 5, \dots, l-2, \\ \varphi_{l-1}(t) &\equiv 0 \pmod{l}, \\ \varphi_w^*(t) \cdot E_{l-1-w} &\equiv 0 \pmod{l}, \quad w = 2, 4, \dots, l-1, \end{aligned}$$

bestehen. Hierbei ist $t = \frac{Y^2}{X^2}$; $\varphi_n(t)$ und $\varphi_n^*(t)$ sind gewisse ganzrational-zahlige Polynome, B_n die n -te *Bernoullische* und E_n die n -te *Eulersche* Zahl. Die ersten $\frac{l-1}{2}$ dieser Kongruenzen wurden schon von *Kummer* und

Mirimanoff angegeben und untersucht. Aus den zweiten $\frac{l-1}{2}$ dieser

Kongruenzen kann man schließen:

Die Gleichung (*) hat keine Lösung in ganzen rationalen zu l teilerfremden Zahlen X, Y, Z , wenn wenigstens eine der *Eulerschen* Zahlen $E_{l-3}, E_{l-5}, E_{l-7}, E_{l-9}, E_{l-11}$ nicht durch l teilbar ist.

Die Arbeit wird in den *Commentarii Mathematici Helvetici* erscheinen.

6. CHARLES BLANC (Lausanne). — *A propos de la théorie des plaques élastiques.*

Les équations de la théorie des plaques élastiques sont souvent données *a priori*, ou déduites directement d'hypothèses sur le comportement de la plaque; plus rarement, on tente de les tirer des équations des milieux isotropes à 3 dimensions. Pour y parvenir, il faut donner une définition de la plaque telle que son état puisse être décrit par des fonctions de 2 variables, fonctions qui satisfont, en vertu de cette définition, à des équations aux dérivées partielles et à des conditions aux limites sur les bords de la plaque.

En général, le passage des équations des milieux à 3 dimensions à celles de la plaque est fait d'une manière dépourvue de rigueur. En outre, on se borne au cas trop particulier d'un milieu isotrope et homogène. Or il est possible de faire le calcul d'une façon très générale et pleinement rigoureuse, en transformant au préalable les équations différentielles en équations intégrales (suivant en cela la méthode mise au point par M. Picone et ses collaborateurs).

Choisissant l'axe Oz perpendiculaire aux faces de la plaque, on prend pour fonctions inconnues les dérivées secondes U, V, W par rapport à z des composantes u, v, w du déplacement d'un point de la plaque. On obtient ainsi des équations intégral-différentielles (intégrales en z, différentielles en x et y), qui se transforment en équations différentielles en x et y si on prend pour fonctions inconnues des moyennes de U, V et W prises dans l'épaisseur de la plaque.

La méthode s'applique facilement, même si le milieu n'est ni isotrope ni homogène; circonstance très favorable, les hypothèses que l'on fait sur la nature de la déformation (donc la définition de la plaque) apparaissent dans le choix de fonctions qui figurent toutes sous des signes de quadrature.

7. ROBERT ZWAHLEN (Zürich). — *Eigenwertprobleme mit zwei- oder dreigliedrigen rationalen Rekursionsformeln zwischen den Eigenwerten.*

Bei vielen Eigenwertproblemen der mathematischen Physik tritt die Erscheinung auf, daß die Eigenwerte arithmetische Reihen erster oder höherer Ordnung bilden oder in anderer Weise durch einfache Rekursionsformeln zusammenhängen (z. B. die Probleme, welche auf trigonometrische Funktionen oder Kugelfunktionen führen). Es wird versucht, die Eigenwertprobleme dieser speziellen Gruppe durch einen allgemeinen Ansatz gemeinsam zu behandeln.

Es sei im Hilbertschen Raume ein Hermitescher Operator F gegeben, dessen Eigenwerte λ_n bestimmt werden sollen. Man wisse zum voraus, daß die λ_n die Rekursionsformel

$$\lambda_{n+1} = \frac{\sum a_{ik} \lambda_{n+1}^i \lambda_n^k}{\sum b_{jl} \lambda_{n+1}^j \lambda_n^l} \quad (1)$$

erfüllen. Dann existiert ein anderer Operator S, der den n-ten Eigenvektor y in den (n + 1)-ten überführt und zusammen mit F der Vertauschungsrelation

$$FS \sum b_{jl} F^j S F^l = \sum a_{ik} S F^i S F^k \quad (2)$$

genügt.

Umgekehrt: Läßt sich bei gegebenem F ein Operator S konstruieren, so daß die Vertauschungsrelation (2) erfüllt ist, so gilt für die Eigenwerte die Rekursionsformel (1) und für die Eigenvektoren die Rekursionsformel $y_{n+1} = S y_n$.

Es ergibt sich damit folgende Methode zur Lösung von Eigenwertproblemen unserer Gruppe: Man sucht bei gegebenem F einen Operator S zu konstruieren, so daß die Vertauschungsrelation (2) gilt. Kennt man dann die ersten Eigenwerte und Eigenvektoren, so folgen alle anderen Eigenwerte und Eigenvektoren rekursiv. Die Methode läßt sich für die meisten klassischen Probleme der mathematischen Physik

durchführen, wo der Rekursions-Operator S in vielen Fällen eine Integraltransformation ist.

Es ergeben sich so bekannte Rekursionsformeln und Integraldarstellungen für die Legendreschen, Tschebyscheffschen, Hermiteschen und Laguerreschen Eigenfunktionen. Die Methode geht auf einen Gedanken von Dirac zurück, der im Falle eines Eigenwertproblems der Quantenmechanik die Eigenvektoren in der beschriebenen Weise berechnet hat.

8. WILFRED KAPLAN (Michigan). — *Dynamische Systeme mit Unbestimmtheit*. — Kein Manuskript erhalten.

Ont encore parlé: H. Bieri, Bern; Heinrich Guggenheim, Bâle.