

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =  
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della  
Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 125 (1945)

**Vereinsnachrichten:** Section de Mathématiques

**Autor:** [s.n.]

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.11.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. Section de Mathématiques

Séance de la Société suisse de Mathématiques

Samedi et dimanche, les 1<sup>er</sup> et 2 septembre 1945

Président : Prof. Dr G. DE RHAM (Lausanne)

Secrétaire : Prof. Dr HUGO HADWIGER (Berne)

1. M. DIETHELM (Schwyz). — *Über Anwendungen der Intensitätsfunktion in der Mathematik.*

Der Referent schildert zunächst das Wesen der einer gegebenen Funktion  $f(x)$  zugeordneten Intensitätsfunktion  $\mu(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$  und

hebt die grosse Bedeutung dieses Begriffes für Statistik und Versicherungsmathematik hervor. Dann werden einige charakteristische Züge an Hand von zwei geeigneten Beispielen illustriert:

1.  $f(x) = ke^{-h^2 x^2}$ ,  $k > 0$ ,  $h \leq 0$ ;  $\mu(x) = 2h^2 x$  (*Gauss'sche Fehlerfunktion*).  $k$  ist keine wesentliche,  $h$  eine wesentliche Konstante. Falls  $h = 0$  ist, wird  $\mu(x) = 0$ . Wenn in der Fehlerfunktion  $k = 1$  gesetzt wird und für die verschiedenen Werte von  $h$  alle Kurven gezeichnet werden, so sind diese in den beiden Grenzfällen  $h = 0$ ,  $f(x) = 1$  und  $h = \infty$   $f(x) = 0$  für  $x \neq 0$ ,  $= 1$  für  $x = 0$ , die besonders betrachtet werden, eingeschlossen. In den genannten Grenzfällen ist  $\mu(x) = 0$  bzw.  $\mu(x) = 0$  für  $x = 0$ ,  $= \pm \infty$  für  $x \neq 0$ .

2.  $f(x) = \frac{c}{x}$ ,  $c > 0$ ;  $\mu(x) = \frac{1}{x}$  (*Gleichseitige Hyperbel*).  $c$  ist keine wesentliche Konstante. Es ergibt sich der Satz, dass diejenige Funktion  $f(x)$ , für welche die Intensitätsfunktion der Intensitätsfunktion sich gleich bleibt, die gleichseitige Hyperbel  $\frac{c}{x}$  ist.

2. BENO ECKMANN (Lausanne). — *Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe.*

Einer beliebigen Gruppe  $\mathfrak{G}$  (multiplikativ geschrieben) und einem Ring  $J$  wird in folgender Weise ein Ring  $R(\mathfrak{G}, J)$  zugeordnet. Man betrachtet für  $n = 1, 2, \dots$  Funktionen  $f^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $n$  Variablen, die die Gruppe  $\mathfrak{G}$  durchlaufen, mit Werten in  $J$ ;  $n$  heisst die Dimension

von  $f^n$ . Ferner sollen unter Funktionen  $f^0$  der Dimension 0 die Elemente von  $J$  verstanden werden. Für alle Funktionen wird ein *Produkt*  $f^n \circ g^k = h^{n+k}$  durch

$$h^{n+k}(x_1, \dots, x_{n+k}) = f^n(x_1, \dots, x_n) \cdot g^k(x_n^{-1}x_{n+1}, \dots, x_n^{-1}x_{n+k})$$

für  $n > 0, k > 0$ , und

$$f^n \circ g^0(x_1, \dots, x_n) = f^n(x_1, \dots, x_n) \cdot g^0,$$

$$f^0 \circ g^k(x_1, \dots, x_k) = f^0 \cdot g^k(x_1, \dots, x_k)$$

erklärt, welches distributiv und assoziativ ist; ferner eine *Ableitung*  $\delta f^n$ , die als  $(n+1)$ -dimensionale Funktion

$$\delta f^n(x_1, \dots, x_{n+1}) = f^n(x_1^{-1}x_2, \dots, x_1^{-1}x_{n+1})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f^n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

definiert ist ( $\delta f^0 = 0$ ). Es gilt immer  $\delta \delta f^n = 0$ .  $f^n$  heisst exakt, wenn  $\delta f^n = 0$  ist, total, wenn  $f^n = \delta g^{n-1}$  ist. Die exakten Funktionen der Dimension  $n$  bilden bezüglich der natürlichen Addition eine Gruppe  $Z^n$ , die totalen eine Untergruppe  $H^n$  von  $Z^n$ , und die Faktorgruppe  $Z^n/H^n$  heisst die  $n$ -te *Cohomologiegruppe*  $B^n(\mathfrak{G}, J)$  von  $\mathfrak{G}$  bezüglich  $J$ . Für die Ableitung eines Produktes gilt

$$\delta(f^n \circ g^k) = \delta f^n \circ g^k + (-1)^{nf^n} \circ \delta g^k;$$

also ist ein Produkt exakt, wenn beide Faktoren es sind, total, wenn ein Faktor exakt, der andere total ist. Es wird also ein  $\circ$ -Produkt für die Elemente der Gruppen  $B^n(\mathfrak{G}, J)$  induziert, welches deren direkte Summe zu einem Ring  $R(\mathfrak{G}, J)$  macht, dem *Cohomologie-Ring* von  $\mathfrak{G}$  bezüglich  $J$ .

Man stellt leicht fest, dass  $B^1(\mathfrak{G}, J)$  die Gruppe der Homomorphismen von  $\mathfrak{G}$  in die additive Gruppe von  $J$  ist, und dass  $B^2(\mathfrak{G}, J)$  zur «Gruppe der zentralen Erweiterungen von  $J$  durch  $\mathfrak{G}$ » isomorph ist.

Der Ring  $R(\mathfrak{G}, J)$  spielt in der algebraischen Topologie folgende Rolle:  $P$  sei ein (endliches oder unendliches) Polyeder,  $Q$  eine reguläre Überlagerung von  $P$  mit der Decktransformationengruppe  $\mathfrak{G}$ ; ferner seien die Homologiegruppen von  $Q$  bezüglich  $J$  alle  $= 0$ . Dann ist der *Cohomologie-Ring*<sup>1</sup> des Polyeders  $P$  bezüglich  $J$  dimensionstreu isomorph dem Ring  $R(\mathfrak{G}, J)$ . Sind die Homologiegruppen von  $Q$  nur in den Dimensionen  $< N$  gleich 0, so gilt diese Isomorphie nur bis zur Dimension  $N-1$ , und überdies ist  $B^N(\mathfrak{G}, J)$  einer Untergruppe der  $N$ -ten Cohomologiegruppe von  $P$  isomorph. — Spezialfall: Ist  $P$  ein Polyeder mit der *Fundamentalgruppe*  $\mathfrak{G}$ , welches in den Dimensionen  $2, 3, \dots, N-1$  *asphärisch* ist, dann ist der Cohomologie-Ring von  $P$  bis zur Dimension  $N-1$  dem Ring  $R(\mathfrak{G}, J)$  isomorph. — Diese Sätze gestatten verschiedene Anwendungen algebraischer und geometrischer Natur.

<sup>1</sup> Damit ist der Alexandersche Ring gemeint (vgl. J. W. Alexander, *Annals of Math.* 37 [1936], 698—708).

Die Tatsache, dass zwischen der Fundamentalgruppe und dem Cohomologie-Ring eines asphärischen Polyeders Beziehungen bestehen, ähnlich wie sie Hopf<sup>2</sup> für die Homologiegruppen gefunden hat, geht schon aus den Homotopie-Untersuchungen von Hurewicz<sup>3</sup> hervor; die algebraische Struktur dieser Beziehungen wird durch unsern Ring  $R(\mathcal{G}, J)$  geklärt und verallgemeinert. — Wegen der genauern Formulierung, der Beweise und der Anwendungen unserer Sätze verweisen wir auf die ausführliche Arbeit, die in den « Comment. Math. Helv. » erscheinen wird.

**3. ROLIN WAVRE (Genève).** — *Remarque au sujet du principe de D'Alembert.*

L'auteur établit une « nuance » dans l'expression trop brève réduction des problèmes de la dynamique à ceux de la statistique.

Voir « L'Enseignement Mathématique ».

**4. MICHEL PLANCHEREL (Zurich).** — *Sur la convergence en moyenne d'une suite de solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire et de type elliptique.*

Soit  $u_n(p)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , une suite de solutions régulières d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire et de type elliptique. La convergence *en moyenne* d'ordre  $\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) de cette suite dans un domaine  $D$  entraîne sa convergence, *uniforme* dans tout domaine fermé strictement intérieur à  $D$ , vers une solution régulière de l'équation.

Cette proposition, qui ne paraît pas avoir été explicitement formulée jusqu'à présent, peut se démontrer aisément. Il suffira de l'esquisser dans le cas de l'équation homogène.  $O$  désignant un point intérieur à  $D$  et  $S_r$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r < d$  ( $d$  assez petit pour que  $S_d$  appartienne à  $D$  et que l'existence de la fonction de Green soit assurée pour les domaines  $S_r$ ,  $r < d$ ), la valeur d'une solution régulière  $u(p)$  de l'équation homogène en un point  $p$  intérieur à  $S_r$  s'exprime à l'aide de ses valeurs sur la périphérie  $\Sigma_r$  de  $S_r$  et de la dérivée normale de la fonction de Green par une relation

$$u(p) = \int_{\Sigma_r} h(O; p, q) u(q) d\sigma_q \quad (1)$$

où  $d\sigma_q$  est l'élément d'intégration de  $\Sigma_r$  au point  $q$ . Faisant varier  $r$  de  $r_1$  à  $r_2$  ( $0 < r_1 < r_2 < d$ ) et intégrant par rapport à  $r$ , il vient

$(r_2 - r_1) u(p) = \int_{S_{r_2} - S_{r_1}} h(O; p, q) u(q) d\tau_q$ , où  $d\tau_q$  est l'élément d'intégration du domaine  $(S_{r_2} - S_{r_1})$  au point  $q$ .

<sup>2</sup> H. Hopf, Comm. Math. Helv. 14 (1942), 257—309 und 17 (1944/45), 39—79.

<sup>3</sup> W. Hurewicz, Proc. Akad. Amsterdam 39 (1936), 215—224.

Il suffit d'appliquer cette formule à la différence  $u_m(p) - u_n(p)$  et de faire usage de l'inégalité de Hölder pour en déduire par des raisonnements simples la convergence uniforme de la suite  $u_n(p)$  dans un domaine strictement intérieur à  $S_{r_1}$ . Appliquant ensuite la relation (1) à  $u_n(p)$  pour  $r < r_1$  et passant à la limite  $n = \infty$ , on voit que cette limite satisfait à la même relation et que  $\lim u_n(p)$  est une solution régulière de l'équation donnée.

5. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Des couples de substitutions qui engendrent un groupe régulier.*

Soient  $S$  et  $T$  deux substitutions régulières de degré  $n$  ( $n = \text{entier} > 1$ ) dont les éléments sont les nombres  $1, 2, \dots, n$  et soit  $(S, T)$  le groupe qu'elles engendrent. Supposons qu'aucune des substitutions  $S, T$  n'est une itérée de l'autre, que ces deux substitutions sont connexes<sup>1</sup> et que  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_r$  ( $r = \text{entier} \geq 1$ )<sup>2</sup>. Nous avons établi en 1944 la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe  $(S, T)$  soit régulier lorsque  $r = 1$ . Supposons à présent que  $r \geq 2$ . Sans nuire à la généralité du raisonnement, nous pouvons poser

$$S = (1, 2 \dots m)(m + 1 \dots 2m) \dots ((k - 1)m + 1 \dots km),$$

où  $k$  et  $m$  sont deux entiers  $> 1$ .

Alors, si  $r = 2$  et si  $T$  est du second ordre, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe  $(S, T)$  soit régulier c'est que  $m$  soit un nombre pair et que  $T$  se compose des transpositions

$$\begin{aligned} & ((i_1 - 1)m + r_1 + 2\lambda \quad (i_2 - 1)m + r_2 + \mu\lambda), \\ & ((i_j - 1)m + r_j + 1 + 2\lambda \quad (i_{j+2} - 1)m + r_{j+2} + \mu\lambda), \\ & ((i_k - 1)m + r_k - 1 + 1 + 2\lambda \quad (i_k - 1)m + r_k + 2l - 1 + \mu\lambda), \end{aligned}$$

où  $\lambda = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1, j = 1, 2, \dots, k - 2,$

$i_1 i_2 \dots i_k$  est une permutation des nombres  $1, 2, \dots, k$ , les nombres  $r_1, r_2, \dots, r_k$  font partie de la suite  $1, 2, \dots, m$  et où :

- a)  $\mu = 2$  et  $l$  est un entier, tel que  $1 \leq 2l - 1 \leq m - 1$  et que  $4l \equiv 2 \pmod{m}$ , si  $k$  est impair ;
- b)  $\mu$  est un nombre pair compris entre 2 et  $m - 2$  et tel qu'il existe un entier positif  $\varrho$  vérifiant la congruence 1)  $\mu\varrho \equiv 2 \pmod{m}$ , le plus petit entier  $\varrho > 0$  qui vérifie 1) satisfaisant également la congruence 2)  $\mu \equiv 2\varrho \pmod{m}$ , et  $l$  étant un entier tel que
- $1 \leq 2l - 1 \leq m - 1$  et que 3)  $2\varrho^{\frac{k}{2}} \equiv 4l - 2 \pmod{m}$  et 4)  $2(l - 1)(\varrho + 1) \equiv 0 \pmod{m}$ , lorsque  $k$  est pair.

<sup>1</sup>  $S$  et  $T$  sont connexes s'il n'existe aucun sous-ensemble propre de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  composé de tous les éléments de certains cycles aussi bien de  $S$  que de  $T$ .

<sup>2</sup>  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_r$  si  $T$  transforme les éléments de chaque cycle  $C$  de  $S$  en éléments de  $r$  cycles de  $S$ , autres que  $C$ .

Si  $r = m$ ,  $k = m + 1$  et si  $T$  est du second ordre, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe  $(S, T)$  soit régulier, c'est que pour tout entier  $l$  ( $1 \leq l \leq m - 1$ ) il existe deux entiers  $s_1$  et  $t_1$  ( $1 \leq s_1 \leq m - 1$ ,  $1 \leq t_1 \leq m - 1$ ) tels que  $T S^l T = S^{s_1} T S^{t_1}$ . Les nombres  $s_1$  et  $t_1$  sont tels que, pour tout  $m \geq 3$ , on ne saurait avoir  $s_1 = t_1 = 1$  ni  $s_1 = m - t_1$ ; pour tout  $m > 6$ , on ne saurait avoir  $s_1 = t_1 = m - 1$ ; pour tout  $m > 3$ , on ne saurait avoir  $s_1 = t_1$ , si  $s_1 < m - 1$ ; si  $s_1 = 1$ , alors  $m$  est pair et  $t_1 = \frac{m}{2}$ ; de même, si  $t_1 = 1$ , alors  $m$  est pair et  $s_1 = \frac{m}{2}$ ;

pour  $m > 3$ , on ne saurait avoir  $s_1 = m - 1$  ni  $t_1 = m - 1$ , si  $s_1 \neq t_1$ ; d'autre part, on ne saurait avoir  $t_1 = s_1 + 1$  [ $s_1 = t_1 + 1$ ] que si  $4s_1 \equiv 0 \pmod{m}$  [si  $4t_1 \equiv 0 \pmod{m}$ ]; si  $m = 2m'$ , on ne saurait avoir: a)  $s_1 = m' - 1$ ,  $t_1 = m' + 1$ , si  $m \geq 4$ ; b)  $s_1 = m' - 1$ ,  $t_1 = m'$  ou  $2m' - 2$ , ni  $s_1 = m'$ ,  $t_1 = m' + 1$  ou  $m' + 2$ , si  $m \geq 6$ ; c)  $s_1 = m' - 2$ ,  $t_1 = m'$ , si  $m > 6$ . Par contre, pour  $m = 3$ , on peut avoir  $s_1 = t_1 = 2$ ; pour  $m = 4$ , on peut avoir  $s_1 = 1$ ,  $t_1 = 2$  et  $s_1 = 2$ ,  $t_1 = 1$ ; pour  $m = 5$ , il n'existe pas de substitution  $T$  définie ci-dessus et telle que le groupe  $(S, T)$  soit régulier; pour  $m = 6$ , on peut avoir seulement  $s_1 = t_1 = 5$ ; pour  $m = 7$ , on ne peut avoir que  $s_1 = 3$ ,  $t_1 = 5$  ou  $s_1 = 5$ ,  $t_1 = 3$ ; pour  $m = 8$ , on ne peut avoir que  $s_1 = 2$ ,  $t_1 = 3$  ou  $s_1 = 3$ ,  $t_1 = 2$ .

## 6. HUGO HADWIGER (Bern). — *Mittelbarkeit und Integration in Gruppen.*

Der Referent beschreibt einige Forschungsziele innerhalb des Problems der (bedingt invarianten) Integration beliebiger (reell- oder komplexwertiger, nicht notwendig beschränkter) Funktionen über beliebigen abstrakten Gruppen. — Für Gruppen spezieller Struktur (z. B. für metrische, separable und im Kleinen kompakte Gruppen) sind verschiedene invariante Integrationen entwickelt worden. Hier sind an erster Stelle wohl die Arbeiten von *A. Haar*, *A. Weil*, *I. Schur*, *H. Weyl* und *E. Cartan* zu nennen<sup>1</sup>. Referent stellt sich die Frage, ob die Übertragung des klassischen *Jordan-Lebesgueschen* Überdeckungsformalismus auf Gruppen, zur Entwicklung einer Mass- und Integrations-theorie (Theorie des *Haarschen* Masses) nicht ersetzt werden könnte durch die Anwendung eines grundsätzlich anders gearteten Elementarprozesses, der der Gruppenstruktur besser angepasst ist und keine topologischen Eigenschaften der Gruppe voraussetzt.

Eine Elementaroperation dieser Art scheint die in der Theorie der fast-periodischen Funktionen u. a. von *J. von Neumann*<sup>2</sup> herangezogene Mittelwertbildung zu sein. Der mit diesem Prozess verbundene Begriff

<sup>1</sup> Vgl. das Literaturverzeichnis bei *A. Weil*, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris 1940).

<sup>2</sup> Vgl. *F. Rellich*, Über die Neumannschen fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe. *Math. Ann.* **111** (1935), 560—567.

ist derjenige der Mittelbarkeit, den der Referent in den Mittelpunkt der Entwicklung seiner Theorie stellen möchte. *Definition*: Eine über der Gruppe  $G$  erklärte Funktion  $F(x)$  heisst mittelbar, wenn es einen Zahlwert  $M$  (Mittelwert) gibt, so dass sich zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein System  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) von endlich vielen Gruppenelementen  $x$  (Raster) angeben lässt, so dass für alle beliebig gewählten Gruppenelemente  $y$  und  $z$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n F(y x_i z) - M \right| < \varepsilon$$

gilt. — Der « Integraloperator », der einer mittelbaren Funktion den Mittelwert zuordnet, ist *eindeutig, endlich-additiv, bewegungsinvariant* und *mittelhaft*. Damit sind vier grundsätzliche Forderungen zitiert, die man in jeder vernünftigen Integrationstheorie an das Integral stellt.

Nach einer klassischen Entdeckung von *Hausdorff*<sup>3</sup> ist es im allgemeinen nicht möglich, über einer vorgegebenen Gruppe einen Integraloperator über der Klasse *aller* Funktionen zu konstruieren, der allen vier Forderungen genügt. Solche Integrationen sind dann i. a. stets nur über gewissen Funktionenklassen (Klasse der integrierbaren Funktionen) definiert. Ausnahmen gibt es bei spezielleren, beispielsweise *Abelschen Gruppen* (*Banachsche Integrale*).

Die vom Referenten in Aussicht gestellte Entwicklung der Theorie zielt nun darauf hin, über einer beliebigen Gruppe doch ein für alle Funktionen erklärtes Integral einzuführen, wobei nun natürlich eingeräumt werden muss, dass nicht mehr alle vier Postulate strikte erfüllt sind. Das Integral ist dann bedingt invariant; dies soll bedeuten, dass die Haupteigenschaft der Invarianz nur bei komplizierten Funktionen verloren geht, während für normale (beispielsweise mittelbare) Funktionen alle vier Postulate strikte gelten. Die Konstruktion dieser Integrale beruht wesentlich auf dem Begriff der Mittelbarkeit.

Einige Existenz-, Eindeutigkeits-, Erweiterungs- und Fortsetzungssätze werden in Aussicht gestellt.

### 7. CHARLES BLANC (Lausanne). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.*

Le problème de Cauchy relatif à certaines équations aux dérivées partielles peut se résoudre graphiquement par le tracé des caractéristiques: le procédé est en particulier applicable à l'équation des cordes vibrantes et à celle des propagations d'ondes planes gazeuses. En fait, de telles équations introduisent deux fonctions inconnues des deux variables  $x$  (espace) et  $t$  (temps); et dans les cas indiqués plus haut, les équations des caractéristiques se simplifient en ce sens que la première ne contient que les différentielles de  $x$  et de  $t$ , et la seconde celles des deux fonctions inconnues. L'épure se fait alors simultanément.

<sup>3</sup> *F. Hausdorff*, Bemerkungen über den Inhalt von Punktmengen. *Math. Ann.* **75** (1914), 428—433.

ment sur deux tableaux. La méthode ne peut plus être employée sans autre dans le cas d'équations plus générales : l'une des deux équations différentielles des caractéristiques contient alors trois différentielles (au moins), celles des deux fonctions inconnues et celle de l'une des deux variables. Il est possible toutefois, par un changement approprié des fonctions inconnues, de se ramener alors au cas où il n'y a que deux différentielles. Il suffit d'utiliser certains théorèmes sur les formes différentielles extérieures, en particulier le théorème suivant (voir E. Cartan : Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, Ann. Ec. Norm. [3] 16 [1899], 239—332) : toute forme  $\omega$  de classe 4 peut se ramener à

$$\omega = p_1 dy_1 + p_2 dy_2$$

où  $p_1, p_2, y_1, y_2$  sont 4 fonctions convenablement choisies des 4 lettres figurant dans la forme  $\omega$ . L'épure se fait alors dans le plan des nouvelles fonctions  $y_1$  et  $y_2$ .

Ainsi, pour le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_1(u, z) \frac{\partial z}{\partial x} + \psi_1(u, z) &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_2(u, z) \frac{\partial u}{\partial x} + \psi_2(u, z) &= 0 \end{aligned} \quad \varphi_1 \varphi_2 > 0$$

(qui généralise celui des propagations gazeuses planes), les caractéristiques ont les équations

$$\begin{aligned} dx - (u \pm \sqrt{\varphi_1 \varphi_2}) dt &= 0 \\ \omega &= \pm \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}} (\psi_2 dt + dz) + \psi_1 dt + du = 0; \end{aligned}$$

la forme  $\omega$  contient les 3 différentielles  $dt, dz$  et  $du$ ; en posant

$$A = \pm \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}, \quad K = A\psi_2 + \psi_1$$

et si l'on suppose que  $A$  dépend de  $z$  seulement, elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} \omega &= d\zeta - pdw \\ \text{avec} \quad p &= t + K \\ \zeta &= tK + \int Adz + \frac{1}{2} K^2 + u \\ w &= K \end{aligned}$$

L'épure se fait alors dans le plan  $(\zeta, w)$ .

On peut procéder d'une manière analogue dans de nombreux cas, par exemple pour l'équation des télégraphistes relative à une ligne non homogène.



8. MAX GUT (Zürich). — *Zur Theorie der Normenreste einer relativ-zyklischen Erweiterung von ungeradem Primzahlgrade.*

Erscheint in der « Vierteljahrsschrift » der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.

9. LOUIS LOCHER (Winterthur). — *Bericht über eine neue Zeitschrift « Elemente der Mathematik ».*

Den Mitgliedern der Gesellschaft wird ein Probeheft mit einem orientierenden Schreiben zugesandt, so dass sich ein Bericht an dieser Stelle erübrigt.

10. ROLIN WAVRE et ROBERT SOUDAN (Genève). — *Sur les Polydromies des fonctions polyharmoniques.*

Les fonctions polyharmoniques, étudiées dans l'espace réel, présentent des multiformités du même type que celles des fonctions harmoniques. Les résultats se généralisent facilement à l'espace à  $n$  dimensions.

11. JOACHIM OTTO FLECKENSTEIN (Basel). — *Die genaue Datierung der erstmaligen analytischen Formulierung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten durch Johann I Bernoulli.*

In der Literatur heisst es allgemein, Johann I Bernoulli habe in einem Brief vom 26. Januar 1717 an Varignon erstmals die analytische Fassung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten (P. d. v. G.)

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{k}_i \cdot \vec{\delta s}_i = 0$$

publiziert. Man kennt dieses Datum aus Varignons Hauptwerk « Nouvelle Mécanique », das 1725 posthum erschien. Dort bringt Varignon auf S. 174—176 des 2. Bandes das P. d. v. G. als ein « Corollaire général » zur Statik und zitiert den entsprechenden Text des Bernoullischen Briefes unter Angabe des obigen Datums, das seither in die Lehrbücher eingegangen ist.

Da in der Originalsammlung der Korrespondenz Bernoulli-Varignon unter diesem Datum kein Brief Bernoullis gefunden wurde, hielt man den wichtigen Brief für endgültig verloren. Bei der Bearbeitung dieser Korrespondenz in Basel wurde aber unter dem Datum vom 26. Februar 1715 ein Bernoulli-Brief aufgefunden, der den Text des Varignonschen Zitats in der « Nouvelle Mécanique » vollständig enthält. Da Varignon am 27. März 1715 den Brief vom 26. Februar 1715 mit dem P. d. v. G. verdankt, ist ein Irrtum Bernoullis resp. seines Kopisten, der mit der Abfassung der Briefduplikate beauftragt war — die übrigens heute die einzigen Dokumente der Bernoullischen Briefe darstellen, da der Nachlass des Adressaten verschollen ist — voll-

ständig ausgeschlossen, und es ist das Datum vom 26. *Februar 1715 als das richtige* statt des überall zitierten anzusehen. Damit beruht gerade das Datum, das man bei den mechanischen Prinzipien als einziges genau zitiert, auf einem Irrtum.

Wie dieser entstand, kann heute nicht mehr eruiert werden. Entweder hat Varignon in dem Manuskript zu seinem Hauptwerk versehentlich ein falsches Datum eingesetzt, oder die Bearbeiter des posthumen Nachlasses, de Beaufort und Camus, haben sich geirrt.

Bei der analytischen Formulierung des schon der Antike bekannten P. d. v. G. durch Johann I Bernoulli tritt zum erstenmal der Begriff Energie für die mechanische Arbeit ( $A = k \cdot s \cdot \cos [k, s]$ ) auf. In diesem Sinn hatte allerdings Bernoulli schon in einem « privaten » Brief vom 12. August 1714 an den Chevalier Renau d'Elisagaray den Energiebegriff benutzt. Dieser hochgestellte französische Marineoffizier und Akademiker hatte ein in Frankreich vielbewundertes Werk über die mathematische Theorie der « Manœuvre des vaisseaux » (1689) geschrieben; Bernoulli wies ihm aber darin die dauernde Verwechslung des Energie- mit dem Kraftbegriff nach, wobei sich in der Folge eine längere briefliche Disputation zwischen den beiden Gelehrten entwickelte. In dem erwähnten Brief an Renau leitet übrigens Bernoulli schon die Gleichgewichtsbedingungen aus dem P. d. v. G. her, ohne dieses allerdings ausdrücklich zu formulieren. Varignon war nun mit Renau befreundet und musste diesem öfters die Argumente Bernoullis erklären. Es war eine der Rückfragen Varignons, die Bernoulli veranlasste, in dem Brief vom 17. Februar 1715 das P. d. v. G. ausdrücklich analytisch zu formulieren und an 11 klassischen Beispielen der Statik die Fruchtbarkeit und Eleganz dieses Prinzips zu erläutern. Varignon hat bei seinem Zitat des Bernoullischen Briefes in der « Nouvelle Mécanique » den vielleicht interessantesten Teil unterdrückt, den, wo nämlich aus dem P. d. v. G. die Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Maschinen, Hebel, Rolle, Flaschenzug usw. hergeleitet werden.

Die falsche Datierung dieses Briefes mag noch dazu beigetragen haben, gänzlich zu vergessen, dass Probleme der Marine den Hintergrund für die Vorgeschichte des P. d. v. G. abgaben und die « Irrtümer eines mathematischen Amateurs » die erste analytische Formulierung des P. d. v. G. und die Prägung des modernen Begriffes Energie im Sinne der mechanischen Arbeit von seiten eines grossen Mathematikers provozierten.

Ont encore parlé : Ed. Arnous, Leysin; P. Bidal, Aigle; P. Bernays, Zurich; F. Fiala, Neuchâtel.