Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 125 (1945)

Artikel: Discours d'ouverture du Président annuel de la S.H.S.N.

Autor: Bays, Séverin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-90445

Discours d'ouverture du Président annuel de la S. H. S. N.

devant la 125^{me} Assemblée annuelle à Fribourg

Les concepts mathématiques sont-ils inventés ou découverts?

Par

SÉVERIN BAYS, Fribourg

Monsieur le président, Mesdames et Messieurs,

Il y a 130 ans, dans les journées des 6, 7 et 8 octobre 1815, naissait la Société Helvétique des Sciences Naturelles, dans la propriété de HENRI-ALBERT GOSSE, sur la commune française de *Mornex,* au sommet d'un contrefort du Petit-Salève, appelé encore aujourd'hui le Mont-Gosse. Les deux initiateurs de la réunion étaient le pharmacien genevois ALBERT GOSSE et le pasteur et professeur bernois SAMUEL WYTTENBACH. Une trentaine de naturalistes, professeurs et pasteurs, médecins et pharmaciens, physiciens et chimistes s'y trouvaient réunis, dont 18 de Genève, 7 de Berne, 4 de Vaud et 2 de Neuchâtel. Ce n'est pas le lieu de vous développer ici le programme de cette première réunion, ni de vous retracer la carrière de ces deux fondateurs, ou de ces naturalistes réunis à *Mornex,* hommes pieux et savants, ayant le culte de la science, un amour et un intérêt passionnés pour la nature. On arrêta que l'association porterait le nom de Société Helvétique des Sciences Naturelles qui lui est resté; on adopta le principe de la variation annuelle du lieu de rassemblement et celui d'une seule réunion par an. A cinq années près rien n'a changé, puisque aujourd'hui, après 130 ans, les 1er, 2 et 3 septembre 1945, la Société Helvétique des Sciences Naturelles tient sa 125^{me} Assemblée annuelle de 3 jours à Fribourg, après avoir été à Sils en 1944, à Schaffhouse en 1943, à Sion en 1942, etc. Elle tiendra son Assemblée annuelle prochaine de 1946 à Zurich; elle y fêtera le 200^{me} anniversaire de la plus ancienne de nos sociétés cantonales d'histoire naturelle, celle de Zurich, fondée en 1746 par le médecin et savant à peu près universel, JOHANNES GESSNER. Là non plus, je ne puis développer plus longuement ici l'histoire de la constitution de ces groupements scientifiques cantonaux; nous avions été précédé d'un siècle à peu près dans les grands pays voisins; la création de la Société royale de Londres date de 1645, celle de l'Académie des curieux de la nature à Schweinfurt, puis Halle, de 1652; en 1657 naît l'Académie florentine del Cimento et enfin en 1666 l'Académie royale des Sciences de Paris.

Les débuts de nos sociétés cantonales furent modestes comme aussi d'ailleurs ceux des grandes académies dont je viens de citer les noms. Après Zurich, vint la société de Bâle en 1751, celle de Berne en 1786, de Genève en 1790, etc. La constitution de la première Société fribourgeoise des Sciences Naturelles est de 1832; elle reçut en 1840, pour la première fois à Fribourg, la Société Helvétique avec le P. GRÉGOIRE GIRARD comme président annuel. Puis cette première société disparut sans laisser de traces, probablement à l'époque du « Sonderbund »; elle ressuscita définitivement en 1871 pour recevoir une seconde fois la S. H. S. N. en 1872, avec le D^{r} méd. J.-B. THÜRLER comme président annuel. Depuis elle a fait son chemin modeste, mais pourtant définitivement assuré, grâce principalement aux mérites d'un homme qui fut pendant 25 ans président de la Société fribourgeoise des Sciences Naturelles, reçut deux fois la S. H. S. N. comme président annuel, en 1891 et en 1907, et qui lors de votre cinquième et dernière Assemblée annuelle à Fribourg, en 1926, était notre président d'honneur de la réunion, M. MAURICE MUSY, docteur *honoris causa* de notre Faculté des sciences. M. MUSY est mort depuis, le 18 novembre 1927, un an après sa présidence d'honneur de l'Assemblée annuelle de la Société Helvétique, un an après le charmant discours que lui avait fait, en fin du banquet de clôture, le président central de 1926, M. MAURICE LUGEON, pour établir ses mérites.

Mais je reviens à la Société Helvétique des Sciences Naturelles et à ses cinq quarts de siècle de développement continu. J'ai pensé qu'un jubilé de 130 ans mérite quelques mots, même pour la vie d'une grande société comme la nôtre, destinée à de longues étapes;

j'ai fait aussi ce rappel avec l'intention de présenter en quelques mots cette Société Helvétique à mes compatriotes de Fribourg qui se trouvent ici et qui, jusqu'à ce moment, ne la connaissaient peut-être que de nom. Aujourd'hui la Société Helvétique des Sciences Naturelles compte pour son propre compte près de 1500 membres; elle comprend 15 sociétés de branches affiliées, 25 sociétés cantonales ou locales de sciences naturelles; dans les 15 sections constituées par les sociétés de branches, sont présentées aujourd'hui et demain, dans cette assemblée que nous allons ouvrir, près de 200 communications scientifiques. Et je ne parle pas des publications de la Société dans ses 130 ans d'existence, de ses 125 volumes des Actes annuels de la S. H. S. N., de ses 80 volumes de Mémoires scientifiques particuliers, des nombreuses et diverses commissions qu'elle a créées dans son sein, la plupart directement en vue de la recherche scientifique et dont les travaux sont aussi considérables.

Or, c'est cette Société, ce groupement scientifique suisse, c'est vous tous, Monsieur le Président central, Messieurs les membres du Comité central, Mesdames et Messieurs, que je voudrais saluer ici, me mettant maintenant à la place du Fribourgeois qui vous reçoit, de la Société fribourgeoise des Sciences Naturelles et du Comité annuel qui a organisé cette session. Vous me permettrez de vous accueillir un peu avec les mêmes termes que j'employais, il y a 19 ans, dans notre vieille salle de conférences de la Grenette, faisant allusion à des lieux de réunion antérieurs : Fribourg n'a pour vous recevoir ni les avantages multiples d'une grande ville, ni les attraits d'une cité plus petite coquettement assise au bord d'un de nos lacs bleus. Fribourg n'a pour votre agrément que ses vieilles rues pittoresques et sa Sarine encaissée avec les ponts qui l'enjambent, pour votre science que sa jeune université déjà prospère et son intellectualité un peu à part, mais forte et vivace, pour votre cœur, que sa bonne et franche cordialité, une compréhension égale et une amitié profonde pour ses compatriotes des trois races: Suisses allemands, Suisses français et Suisses italiens.

Est-ce assez pour vous bien recevoir ? Nous l'espérons. Nous pouvons vous assurer du moins que nous avons cherché à mettre tout en œuvre pour que, malgré les restrictions et les temps difficiles, vous soyez accueillis convenablement, que vous puissiez en particulier vous livrer à vos travaux scientifiques dans de bonnes conditions. En des temps meilleurs, dans un an probablement, nous aurions pu faire mieux; nous vous prions de tenir compte des circonstances exceptionnelles de cette année-ci, sans doute les plus restrictives dans la période tragique qui s'achève lentement, si notre accueil matériel n'est pas aussi large et aussi généreux que nous l'aurions voulu.

J'ai fait allusion, il y a quelques instants, à la vieille salle de conférences où nous vous recevions il y a 19 ans. En effet, dans l'accueil matériel dont je parle, un élément a changé depuis lors. C'est l'auditoire dans lequel nous vous recevons aujourd'hui. Il me paraît juste dans cette partie officielle de mon discours, qui doit constituer l'expression de nos souhaits de bienvenue, de m'arrêter encore sur ce changement et l'importance qu'il comporte. Très souvent le président annuel, dans son discours d'ouverture, fait l'historique du passé de son canton dans l'étude des sciences naturelles. M. Maurice Musy l'a fait en 1907 en nous rappelant la vie et les travaux de nos modestes mathématiciens et naturalistes fribourgeois du passé, principalement du siècle dernier, en tête desquels prend place, évidemment à juste titre, le chanoine CHARLES-ALOYSE FONTAINE, le fondateur de notre Musée d'Histoire naturelle. Or, il a été chez nous quelqu'un, qui sans être un savant, a fait plus pour la science que la recherche individuelle du naturaliste ou du savant des sciences exactes. C'est le fondateur de notre Université, l'homme politique, le conseiller d'Etat et membre des Chambres fédérales, GEORGES PYTHON. J'ai pensé qu'il était juste, devant une assistance distinguée comme la vôtre, dans cette Aula, qui est la réalisation plus complète de son œuvre et que nous devons à son successeur, de rendre hommage en votre nom à son souvenir et au peuple fribourgeois qui l'a suivi.

Pendant trois siècles et demi les catholiques suisses ont cherché à réaliser le rêve d'une université qui leur appartînt en propre. A quantité de reprises, aux diètes particulières des cantons catholiques, le problème de la création de cette université fut posé, discuté, jugé urgent et chaque fois ajourné. C'est à la veille de l'an de grâce 1886 seulement, que GEORGES PYTHON, alors à peine âgé de 30 ans et tout jeune conseiller d'Etat du canton de Fribourg, proposa au Grand Conseil fribourgeois, dans un message adopté par le gouvernement, la fondation d'une université catholique et internationale. A ce moment-là comme aujourd'hui, notre petit parlement fribourgeois était constitué d'une majorité conservatrice et d'une opposition radicale. Il est presque émouvant, à la lecture des débats de cette session historique des représentants de notre peuple agricole, aux ressources bien modestes, de constater avec quelle unanimité, conservateurs et radicaux, comprennent l'intérêt général d'une telle œuvre et acceptent le message, dont l'article premier affectait, dès ce premier moment, à la création de l'Université, le montant de fr. 2.500.000.—. Le vote des députés eut lieu à l'appel nominal, à l'unanimité complète, et pourtant pour ce débat comme en toute autre circonstance, l'opposition d'alors était forte, et sans doute, comme aujourd'hui, en particulier parmi nos députés du district de Morat, il y avait des protestants à côté des catholiques. Quoi qu'il en soit, le geste de départ était fait. Avec le revenu du capital voté, GEORGES PYTHON réussit à ouvrir en 1889 la Faculté des lettres et la Faculté de droit, en 1891, la Faculté de théologie, grâce à l'appoint supplémentaire d'un don de fr. 500.000.— voté par la Ville de Fribourg.

Restait la quatrième Faculté, celle des sciences qui est celle qui nous intéresse ici particulièrement. Elle s'ouvrit en 1896; entre temps, le gouvernement, sous l'impulsion de son chef, avait acquis et réorganisé l'ancienne entreprise locale des Eaux et Forêts, devenue depuis les Entreprises électriques fribourgeoises et fondé la Banque de l'Etat de Fribourg; une partie des bénéfices de ces deux institutions devait servir à consolider la rente de l'Université et de la nouvelle Faculté.

Ce fut la première étape. Le premier semestre de son existence, l'Université avait 29 étudiants; en 1890, elle en avait 138; en 1903, 418; en 1932, 704; en 1938, 959. Afin de ne pas alourdir le budget de sa fondation, GEORGES PYTHON avait renoncé à construire des bâtiments neufs. Les Facultés des lettres, de droit et de théologie, étaient logées au Lycée, dans le grand bâtiment construit par les Jésuites de 1829 à 1838; pour abriter la Faculté des sciences, on avait transformé l'ancienne fabrique de wagons qui se trouvait à Pérolles. L'insuffisance des locaux devint bientôt manifeste. L'Association des Amis de l'Université, présidée par le directeur de l'instruction publique, M. le conseiller d'Etat PILLER, aujourd'hui président du Conseil d'Etat et ici présent, qui a bien voulu nous faire l'honneur de collaborer au Comité annuel, résolut de prendre en mains la construction de trois nouveaux bâtiments, qui étaient indispensables à la Faculté des sciences. De 1936 à 1938, on édifia et installa les nouveaux instituts de chimie, de botanique et d'anatomie. Les étudiants en médecine qui, jusque-là, pouvaient faire à notre Faculté des sciences le premier examen propédeutique, purent dès lors y subir les deux premiers examens de leurs études médicales.

Puis, sans désemparer, l'Association des Amis de l'Université, ou plus spécialement son président, qui s'est assuré entre temps l'appui plus concret de nos Evêques et par eux des catholiques suisses, entreprend la construction définitive des bâtiments dans lesquels nous nous trouvons aujourd'hui, pour y placer les trois Facultés, des lettres, de droit et de théologie, qui effectivement, débordent depuis longtemps leurs locaux d'emprunt du bâtiment du Lycée. Le 24 juillet 1938, le nonce apostolique, Mgr Bernardini bénit la première pierre; trois ans plus tard, le 20 juillet 1941, on fête à la fois le cinquantenaire de l'*Alma mater* et l'inauguration des nouveaux bâtiments.

Je ne puis être plus long; j'aurais aimé au moins vous citer les noms des disparus, professeurs et chercheurs de cette Faculté des sciences où vous avez siégé ce matin et cet après-midi, où vous poursuivrez vos travaux demain matin. Le temps me fait défaut. J'ai pensé, par contre, ne pouvoir passer sous silence ce court aperçu historique et apporter ainsi le tribut de reconnaissance, que la science suisse doit également, au conseiller d'Etat fondateur de notre Université, Georges Python, à son continuateur, M. le conseiller d'Etat Piller, au peuple fribourgeois qui a assumé sans hésitation les lourdes charges qu'elle entraîne, à nos Evêques et aux catholiques suisses, qui, de plus en plus, participent à l'effort commun et dont l'appui nous est indispensable.

J'en viens maintenant au thème propre de mon discours.

Le développement des sciences mathématiques, dans cette première moitié du XX^{me} siècle que nous achèverons bientôt, s'est poursuivi par quantité de travaux dans les différentes parties de l'édifice puissant, aux proportions toujours plus vastes et qui paraissent bien indéfiniment extensibles, que constitue la mathématique moderne. Mais ce développement a été caractérisé aussi par une revue et un essai de consolidation des bases de la construction. Certains mathématiciens ont parlé d'une crise grave des mathématiques, d'une fêlure profonde dans les fondements; pour eux, l'édifice était à reconstruire entièrement sur des bases nouvelles, plus rigoureuses et plus solides. Pour d'autres, le mal était moins grand que ne le prétendaient les premiers; la fêlure est superficielle; les désaccords qui ont résulté, en particulier des antinomies de la théorie des ensembles, viennent de failles dans le raisonnement; il s'agit de s'entendre exactement sur le sens des termes et des symboles que l'on utilise. Pour d'autres enfin, et c'est sans doute le plus grand nombre, l'édifice est toujours solide; ils ont continué sans trouble leurs recherches et leurs travaux; la mathématique reste pour eux la science offrant à l'esprit humain la certitude la plus grande.

Les Grecs ont construit ce qu'on pourrait appeler le rez-de-chaussée de l'aile principale de l'édifice dont je parle : la géométrie d'Euclide, un modèle de rigueur et de construction mathématique. LEIBNITZ et NEWTON; leurs devanciers, ARCHIMÈDE, KEPLER et CAVALIERI; leurs successeurs surtout, en particulier les BERNOULLI et EULER par l'invention du calcul infinitésimal, ont créé le rez-de-chaussée central du bâtiment; puis avec GAUSS, CAUCHY, DEDEKIND, RIEMANN, WEIERSTRASS, etc., sont venus l'introduction du nombre imaginaire, du nombre irrationnel, le développement de l'analyse moderne qui est le corps central du bâtiment. FERMAT et PASCAL sont à l'origine de la théorie des nombres et du calcul des probabilités; DESCARTES, par l'introduction des coordonnées, fait le départ de la soudure entre la géométrie et l'analyse. La mécanique et la physique mathématique, qui constituent une autre aile du bâtiment, se développent, toujours par le moyen puissant de l'analyse, principalement avec LAGRANGE, LAPLACE, FOURIER, POISSON, AMPÈRE, etc. Puis viennent les étages plus récents ou modernes, les géométries non euclidiennes, la théorie analytique des nombres, la théorie des ensembles, la théorie des groupes, les théories des équations, la géométrie différentielle, la géométrie descriptive, les développements modernes de l'algèbre, la géométrie algébrique, la topologie, le calcul des variations, etc., etc.

Le malaise a commencé peut-être déjà avec les paradoxes de l'infini de Bolzano, la construction des premières géométries non euclidiennes de LOBATCHEWSKI et de RIEMANN. Il s'est aggravé principalement, avec l'introduction des nombres transfinis de CANTOR et les antinomies de la théorie des ensembles. Le mathématicien a l'idée parfaitement claire de la suite indéfinie des entiers naturels; c'est une idée claire de l'infini, mais de l'infini *en devenir,* de l'infini en quelque sorte qui n'est jamais atteint. CANTOR, le créateur de la théorie des ensembles, transforme cet infini en un infini *actuel* en le considérant comme réalisé. Il désigne le nombre cardinal de *tous* les entiers naturels par un symbole nouveau alephzéro et par une opération analogue à celle que nous faisons avec l'unité, arrive, partant de alephzéro, aux nombres transfinis successifs, alephun, alephdeux, etc. Aujourd'hui les résultats principaux de CANTOR sont définitivement acquis; sa théorie des ensembles de points ou de nombres est à la base de l'analyse. Alephzéro et alephun correspondent à ce qu'on appelle aussi la *puissance* du *dénombrable* et la *puissance* du *continu.* Théoriquement on peut établir des puissances supérieures à celle du continu, bien qu'il soit difficile de concevoir effectivement des ensembles ayant de telles puissances. Par contre, on ne sait pas s'il existe une puissance intermédiaire entre celle du dénombrable et celle du continu. C'est même probablement dans l'abîme qu'il y a entre ces deux notions, l'ensemble dénombrable, ou si l'on veut le *collectif arithmétique,* et le *continu géométrique* que réside le conflit; les difficultés viennent essentiellement du fait que ces deux notions ne peuvent effectivement pas se ramener l'une à l'autre.

Les efforts considérables qui ont été faits par les mathématiciens, dans ce dernier demi-siècle, pour consolider l'édifice, plus exactement pour placer ses fondements sur un terrain plus solide et plus profond, appartiennent à trois tendances particulières, qui portent aujourd'hui généralement les noms suivants, en y associant le nom du ou des mathématiciens qui en ont été les représentants principaux: l'intuitionnisme ou le néo-intuitionnisme de l'hollandais BROUWER, la logistique des anglais RUSSELL et WHITEHEAD, le formalisme de HILBERT. Je ne puis ici qu'essayer de vous caractériser en deux mots ces tendances, et seulement pour ainsi dire leur côté philosophique et non pas leurs méthodes.

Pour l'intuitionniste nous avons directement l'intuition nette des concepts mathématiques, sans l'intermédiaire du monde sensible. La construction mathématique est produite directement par notre esprit d'une façon entièrement indépendante de l'expérience; même davantage, la mathématique est la partie exacte de notre pensée.

La logistique, au contraire, prétend que la mathématique ne peut pas être fondée intuitivement, par elle seule et en elle seule; elle a besoin de la logique. Chaque formation de concept mathématique est au fond une opération logique; les démonstrations mathématiques appartiennent à un procédé général de la logique. D'une façon plus précise, l'esprit humain n'a pas trouvé quelque chose de nouveau en formulant des théorèmes mathématiques, de contenu géométrique ou arithmétique; il a simplement continué sa voie normale en parvenant à un domaine de connaissances logiques que nous appelons la mathématique. Je citerai seulement ce passage caractéristique de Leibnitz, à qui l'on doit faire remonter la logistique moderne : « Tout ce qui a été trouvé par le raisonnement, l'a été par les bonnes règles de la logique, bien que ces règles n'aient pas été toujours expressément formulées ou mises par écrit. »

Enfin, le formalisme, comme l'intuitionnisme, revient à un domaine propre des mathématiques, mais il se distingue de ce dernier dans le fait que, alors que celui-ci tient au contenu intuitif des notions mathématiques et n'admet aucun concept qui n'ait pas une représentation claire dans la pensée, le formalisme, le nom le dit déjà, fait abstraction à priori de toute signification intuitive des concepts et opérations mathématiques. On opère avec des signes et des symboles mathématiques qui n'ont pas besoin d'avoir une signification. Il n'est pas question, par exemple en géométrie, de points, de droites et de plans avec la représentation habituelle que nous en avons; il n'est question que de mots représentant des choses dont la nature propre est sans intérêt, que l'on admet seulement être distinctes et obéir à certaines connexions, tirées d'ailleurs des relations habituelles existantes entre les points, les droites et les plans. En un mot, pour le formalisme, la mathématique est un jeu; la nature *propre* des pions est sans importance; il faut seulement connaître les règles du jeu.

Il est évident maintenant que, à côté des mathématiciens que je vous ai nommés comme représentants de ces tendances, il faudrait en mentionner bien d'autres. Avec Brouwer, il y a Weyl et les intuitionnistes français; avant Russell, il y a Frege et après lui l'école de Vienne; avec Hilbert, il y a Bernays et leurs élèves. Les mathématiciens suisses ne sont pas non plus restés indifférents à ce problème du fondement des mathématiques. Il me suffit de citer GONSETH et son ouvrage bien connu sur les fondements des mathématiques, les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques en décembre 1938, présidés par GONSETH, avec les interventions de WAVRE, FINSLER, POLYA, BERNAYS et BURCKHARDT, la série consacrée à la logique mathématique dans le cycle des conférences internationales des Sciences mathématiques, organisées par l'Université de Genève en juin 1934.

C'est précisément, et ce sera là le second point de mon exposé, la lecture de l'une des conférences de cette dernière série, parue dans l'Enseignement mathématique, qui m'a engagé, non à prendre comme sujet, mais plutôt à mettre en exergue du présent discours, la question : *les concepts mathématiques sont-ils inventés ou découverts?* Il s'agit de la conférence de FRAENKEL, de l'Université de Jérusalem, intitulée : « Sur la notion d'existence dans les mathématiques». Les tendances des efforts faits par les mathématiciens pour consolider les bases de leur édifice tiennent évidemment de près à ce problème plus particulier, mais capital : Quelle est la manière d'*exister* des concepts mathématiques? Le but même de toute philosophie des mathématiques qui cherche à en établir rigoureusement les fondements, doit être en définitive de nous éclairer sur cette question, la notion d'existence dans les mathématiques.

Sur ce problème, d'après FRAENKEL, la différence de vues qui existait entre PLATON et ARISTOTE, peut encore caractériser à elle seule l'essentiel de ce qu'il y a à dire aujourd'hui. Pour PLATON, le monde des mathématiques est un monde indépendant, portant en lui-même ses propres lois et supérieur au physique dans sa façon d'être. L'existence des êtres mathématiques est de ce fait indépendante de la pensée humaine, comme en général, de toute activité extérieure. Pour ARISTOTE, au contraire, il n'y a pas de monde mathématique en soi; si l'on en parle c'est en tant qu'idées *abstraites de l'activité humaine,* à savoir des constructions des mathématiciens créateurs. Pour cette raison aussi ARISTOTE considère les constructions mathématiques comme conduisant seules à une vraie *επιστημη,* une connaissance des réalités, mais la projection abstraite de ces constructions sur un monde en soi, en vérité irréel, ne serait qu'une *δοξα,* une science des apparences.

L'opposition entre LEIBNITZ et KANT est voisine de celle entre PLATON et ARISTOTE. LEIBNITZ croit à la possibilité d'une *mathematica universalis* en tant que science mathématique, symbolique et formelle, qui dépasse tout ce qui est à la portée des constructions et intuitions humaines. Pour KANT, au contraire, non seulement la géométrie, mais même l'arithmétique, est liée aux formes de l'intuition humaine : espace et temps. La notion du nombre notamment dépend, d'après lui, essentiellement de la catégorie du temps.

Si nous voulons mettre maintenant les couples PLATON-ARISTOTE et LEIBNITZ-KANT en rapport avec les recherches actuelles sur les fondements des mathématiques, la classification habituelle, que j'ai donnée plus haut, des trois tendances intuitionniste, logisticienne et formaliste, ne convient pas exactement. C'est plutôt l'opposition entre les deux thèses suivantes, tirées des discussions modernes, qui semble à FRAENKEL décisive :

1re thèse. Pour l'existence des objets mathématiques, la compatibilité dans le sens de la non-contradiction à l'intérieur d'une théorie mathématique est nécessaire et en même temps suffisante. En d'autres termes, en prenant un énoncé de BERNAYS: est existant ce qui peut être sujet, c'est-à-dire peut occuper des places libres dans des fonctions propositionnelles d'une théorie non contradictoire des mathématiques ou d'une de leurs branches particulières.

2me thèse. La non-contradiction n'est pas suffisante pour l'existence, c'est-à-dire pour la vérité. C'est la possibilité de construire qui est décisive et, pour cette raison, les mathématiques sont un monde de constructions qui s'exécutent dans le temps. Si l'on passait de ces constructions à une théorie dépourvue de l'élément temps, on obtiendrait un empire d'ombres, où les symboles et le langage, c'est-à-dire des éléments effectivement en dehors des mathématiques, joueraient en fin de compte le rôle décisif.

La première de ces conceptions peut s'appeler brièvement le *réalisme platonicien;* la seconde, l'*idéalisme aristotélicien.*

D'une façon grossière on peut classer dans le réalisme les logisticiens et les formalistes, et dans l'idéalisme les intuitionnistes. FRAENKEL consacre la majeure partie de son exposé à justifier en somme cette répartition. Mais les conceptions chevauchent plusieurs fois. Ainsi POINCARÉ qui, par exemple, dans Science et Méthode, identifie formellement l'existence dans les mathématiques avec la non-contradiction, ne peut pas être appelé tout simplement un idéaliste. D'autre part, la position de HILBERT n'est pas non plus aussi rigide qu'on le croit en général.

Permettez-moi de vous citer le passage suivant de FRAENKEL : « La parenté de ces tendances (il s'agit des logisticiens et des formalistes) avec le réalisme platonicien est évidente. D'autre part, il est naturel de rapprocher de l'idéalisme aristotélicien qui regarde les êtres mathématiques comme créations de notre esprit et non indépendants du sujet pensant, le néo-intuitionnisme tel qu'il se manifeste, dans les mathématiques, avec BROUWER, et dans la philosophie de la manière la plus prononcée avec l'anthropologisme de BECKER qui est lié à la métaphysique de HEIDEGGER. »

Enfin je voudrais mentionner encore quelques localisations particulièrement intéressantes de mathématiciens modernes. C'est dans une parole de DEDEKIND, connue seulement depuis peu de temps, qu'on trouve la thèse la plus opposée à la conception anthropologique: nous sommes du genre divin; pour DEDEKIND, les actes scientifiques, qui forment des notions, ont une force créatrice supérieure à toute constructibilité. C'est dans un sens profond le parallèle du *αει ο Θεοσ αριθμητιζει* de PLATON. Par contre, pour l'école logisticienne de Vienne, toutes les propositions de la logique et de la mathématique sont tautologiques et ce n'est que la limitation de l'esprit humain qui nous empêche de les embrasser toutes en même temps et de les considérer seulement comme *changeant la forme* des expressions de la connaissance, sans *créer* des connaissances nouvelles. C'est HAHN, le porte-parole de cette école, qui peut dire en opposition au point de vue de PLATON : Dieu ne fait jamais des mathématiques. HERMITE était un partisan particulièrement fervent de la conception réaliste; il en est de même, parmi les grands mathématiciens contemporains, de HARDY. Par contre BOREL s'approche beaucoup de l'anthropologisme de BECKER, par exemple en liant la possibilité de définir des nombres suffisamment grands à la durée limitée de la vie de l'univers. Cette manière de voir est en accord avec la célèbre phrase de POINCARÉ, dont d'ailleurs, comme je l'ai dit, la position entre les deux camps a varié: « Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés, et tous ceux que l'on pourra inventer un jour. »

C'est le mot *inventer* qui est caractéristique dans ce propos et j'en viens maintenant au troisième et dernier point de mon exposé. La question débattue, idéalisme ou réalisme, peut aussi s'exprimer par l'alternative: Est-ce que le mathématicien invente ses objets et propositions, ou est-ce qu'il les découvre ? Il *invente* suivant les idéalistes, il *découvre* suivant les réalistes. C'est sans doute la question ainsi posée, qui a engagé notre collègue Wavre à écrire l'étude parue en 1942, dans le « Jahrbuch » de la Société suisse de philosophie, et intitulée : « Inventer et découvrir ». Le but de Wavre est manifestement celui-ci; il le déclare d'ailleurs au début de son mémoire: prendre une position intermédiaire. Il y a dans les mathématiques incontestablement la part de l'invention et la part de la découverte. L'étude de cette répartition lui paraît justement apte à préciser les raisons que l'on a d'être idéaliste ou réaliste, non pas dans le sens d'un choix inévitable, mais d'un juste dosage entre ces deux tendances, dans le sens, dit-il, de l'adoption d'une position médiatrice. Et il poursuit ainsi: « En mécanique céleste on n'est sorti de l'alternative entre Ptolémée et Copernic qu'en faisant, avec Galilée et Newton, intervenir la mécanique terrestre. Dans le même sens j'ose espérer qu'un jour les philosophes sortiront de l'alternative, idéalisme ou réalisme, grâce à l'effort des techniciens.»

Et son étude est incontestablement un effort heureux pour faire la distinction entre la part de l'invention et celle de la découverte dans nos concepts mathématiques. Nous sommes tout proche d'être entièrement d'accord avec lui, et chacun qui a pénétré son exposé doit convenir que sa position intermédiaire est juste, sauf peut-être en ce qui concerne les notions premières. Je cite ce qui me paraît marquer le plus nettement ses conclusions : « L'invention en mathématiques est apparue orientée vers l'action; elle réunit un matériel opératoire, une synthèse de moyens; la découverte est un enregistrement de rapports nécessaires. Si nous inventons des opérations et des définitions, on pourrait ajouter „et des notations", nous découvrons des conséquences qui habituellement s'inscrivent dans les théorèmes. Cette distinction s'atténue s'il s'agit de la prise de conscience d'une notion première. On serait tenté de dire que les notions premières sont des notions innées; elles préexistent dans l'esprit, donc vous les y découvrez. Vous n'avez pas pu les inventer, elles étaient déjà là. Cet argument de la préexistence nous paraît trompeur. Ces notions ne sont pas dans la pensée avant qu'on y pense, mais elles se cristallisent semblablement dans toutes les intelligences mathématiques. » Et auparavant encore cette phrase, caractéristique pour ce que nous voulons faire entendre : « Je ne sais donc si nous inventons ou découvrons les nombres entiers; la question n'a peut-être plus de sens. Par contre, nous découvrirons sans peine, si l'entier 137 est premier ou décomposable, etc. »

En effet, à notre humble avis, la question de savoir si nous inventons ou découvrons les nombres entiers n'a plus de sens. Nous n'inventons, ni ne découvrons les nombres entiers. Nous les *abstrayons* du monde sensible. Nous pensons, nous sommes même convaincu qu'une intelligence humaine dans un corps privé de tous ses sens, placé donc dès le premier moment de son existence dans la nuit et le silence absolus, et l'absence totale de sensations, ne parviendrait jamais à la notion du nombre entier, pas plus d'ailleurs qu'elle ne parviendrait à un concept d'idée quelconque. Nous ne pensons donc pas comme PLATON que les idées *humaines* existent de toute éternité, au delà du monde sensible, dans un lieu supracéleste qu'aperçoit l'âme, et que la connaissance et le savoir sont de simples réminiscences. Cettc manière de voir implique chez PLATON la préexistence de l'âme; dans la philosophie thomiste l'âme est créée au moment où le corps est conçu. L'enfant ne naît pas, ayant même simplement à l'état latent, dans son intelligence, l'idée des nombres 1, 2, 3, 4; il abstrait peu à peu cette notion du monde sensible qui l'entoure; de même que sous les mots papa et maman se forme peu à peu dans son intelligence l'idée de son père et de sa mère, idée d'abord très liée au concret, à la nourriture ou à la caresse qu'on lui donne, puis abstraite peu à peu et de plus en plus avec les années, de même il apprend à compter avec sa mère les objets qui l'entourent; l'idée se forme peu à peu dans son intelligence des ensembles : 2 objets, 3 objets, 4 objets, etc., puis après, peu à peu, du nombre entier cardinal, abstrait, 2, 3, 4, etc.

L'idée du nombre entier n'est pas plus difficile à acquérir, c'est-à-dire à *abstraire,* pour l'enfant, que celle de père et mère, de ce qui est nourriture et de ce qui est jouet, de ce qui est bien et de ce qui est mal; à mon humble avis, ce sont des idées de même nature. L'intelligence humaine est un instrument merveilleux, dont la puissance d'abstraction croît rapidement avec l'exercice; peu à peu elle se meuble de la somme plus ou moins considérable d'idées que nous avons. Pour beaucoup d'entre elles, il est vrai, nous n'avons pas eu à refaire tout l'effort d'abstraction de nos devanciers; elles nous sont fournies par l'enseignement et l'étude.

Revenons à nos entiers; l'enfant déjà, sinon l'étudiant ou le mathématicien, arrive rapidement à l'abstraction fondamentale qui est venue encore du monde physique : à chaque entier nous pouvons faire suivre l'entier suivant en augmentant le premier d'une unité. Quand Poincaré écrit: « Tous les nombres entiers que l'on a inventés et tous ceux que l'on pourra inventer un jour », je pense qu'il veut dire : tous les nombres entiers que l'on a *exprimés* et tous ceux que l'on pourra *exprimer* un jour. Et tant que le nombre entier est *fini,* on peut l'exprimer d'une façon plus ou moins courte; la plus longue sera $1 + 1 + 1 + \ldots$; il est vrai que, dans cette expression, le temps intervient et que nous revenons ainsi à l'anthropologisme de Becker et Borel. L'invention intervient alors dans la recherche du procédé le plus court pour exprimer ce nombre entier et dans les opérations auxquelles nous le soumettons; nous découvrons, par contre, les propriétés de la suite des nombres entiers, propriétés qui sont impliquées dans le fait même de la suite. Mais la suite elle-même, nous ne l'inventons, ni ne la découvrons, nous l'abstrayons du monde sensible.

Une autre notion première, abstraite du monde sensible et qui jusqu'ici apparaît bien irréductible à celle du nombre entier, est celle du continu ou de l'étendue géométrique. Elle est plus profonde et vient plus tard. La notion du continu à une dimension nous est fournie par un fil tendu ou non tendu, par l'arête d'une règle, une tige de blé, la trajectoire d'une pierre, la marche d'un rayon lumineux, etc.; celle du continu à deux dimensions, par la surface d'une eau tranquille, les vallonnements de la surface terrestre, etc., etc. Il en résulte les notions géométriques de la droite et de la courbe, du plan et de la surface, puis du point comme croisement de courbes, etc. Ce sont des notions sur le contenu desquelles nous sommes tous parfaitement d'accord, ou pour employer le langage de Wavre précité, elles se cristallisent semblablement dans toutes les intelligences mathématiques ou même courantes, mais à mon humble avis, elles ne sont pas des faits d'intuition immédiate ou de réminiscences antérieures, elles sont simplement des faits d'abstraction.

Nos sens sont adaptés au monde physique moyen; ils ne sont pas faits pour les dimensions des atomes ou du monde stellaire. Il est probable que si nos sens étaient construits, par exemple, pour l'échelle du monde atomique et non pour celle du monde physique moyen que nous percevons, la première géométrie trouvée n'aurait pas été la géométrie d'Euclide, mais vraisemblablement l'une de nos géométries non euclidiennes.

Un élément primordial de notre intelligence est la faculté de *comparer*; elle sert grandement à opérer l'abstraction. De la comparaison des collections d'objets est venu le fait de les *compter* et l'abstraction du nombre entier; de la comparaison des grandeurs est venu le fait de les *mesurer* et l'abstraction plus précise du continu géométrique; ce continu géométrique, linéaire ou à deux ou trois dimensions, nous vient de notre propre corps et de tout ce qui nous entoure, en repos ou en mouvement. Il est nettement conçu dans les figures ou les formes géométriques et il me paraît être, avec le concept du nombre entier, à la base de tout l'édifice mathématique.

Le nombre rationnel vient du nombre entier et aussi de la mesure; le nombre irrationnel vient sûrement du continu géométrique; la diagonale du carré de côté 1 en a fourni le premier exemplaire. Le nombre complexe, qui est venu sans doute en premier lieu du fait que chaque équation ait une racine, peut paraître une création de l'esprit humain, une création dont les conséquences sont illimitées; mais l'unité imaginaire appartient aussi au monde physique tel que nous le connaissons aujourd'hui et si nos sens, encore une fois, avaient une autre adaptation, il n'est pas dit que la racine carrée de —1, n'ait pu être une abstraction, aussi bien que l'unité réelle.

Notre faculté de comparer est connexe à celle de faire correspondre; la notion de fonction qui est toute la base de l'analyse vient d'une correspondance établie entre deux suites ou plus normalement entre deux continus géométriques. Mais, encore une fois, dans un corps privé de toute perception du monde physique, cette faculté d'établir une correspondance n'aurait jamais pu s'exercer, manquant de l'idée abstraite pour le faire. Enfin les notions d'ensembles, de groupes, de corps, etc., sont encore du collectif arithmétique et il nous semble qu'en dernière analyse tout revient effectivement à ces deux abstractions fondamentales, la suite des entiers naturels et l'étendue géométrique.

Par contre, ces deux abstractions paraissent irréductibles l'une à l'autre. L'introduction de la coupure de Dedekind et d'autres essais, de Weyl en particulier, sont des tentatives de pont jeté sur l'abîme qui les sépare. Les vieux aphorismes de Zénon sur le mouvement sont l'expression même immédiate de cette irréductibilité. Permettez-moi de vous citer encore le passage suivant de Fraenkel qui correspond là-dessus exactement à notre pensée : « C'est peut-être le plus ancien et en même temps le plus important des problèmes que posent les fondements des mathématiques que de construire un pont au-dessus du précipice qui s'étend entre deux natures : d'une part la nature *discrète, qualitative, combinatoire, individuelle* de l'*arithmétique* et surtout de la suite des nombres naturels (région du dénombrement), et d'autre part la nature *cohérente, quantitative, homogène* du *continu* géométrique et analytique, par exemple, de la totalité des nombres réels (région de la mesure). Ce problème fondamental est à la base des paradoxes connus de Zénon d'Elée et de certains sophistes. Malgré les efforts des sciences philosophiques, mathématiques et aussi théologiques, nous n'y avons guère avancé pendant plus de 2000 ans. En tout cas nous sommes très loin d'avoir construit un pont satisfaisant entre les nombres, qui représentent des individus aux propriétés caractéristiques pour chacun d'eux, et les points uniformément répartis dans la « bouillie » fluide du continu. »

Je termine, en revenant maintenant au dilemme: inventer ou découvrir. Sur la base des notions premières, il est indubitable alors que le mathématicien invente et découvre. Il invente les notations, les définitions, les opérateurs; il découvre les théorèmes et les propriétés impliquées dans ses concepts de départ. Il invente chaque fois qu'il a une certaine latitude dans sa recherche; il découvre quand son résultat est impliqué entièrement dans ses prémisses. Dans l'immense parterre des faits mathématiques, les inventions ou créations du mathématicien sont en quelque sorte les chemins et sentiers d'accès aux différentes régions du parterre. Ces voies d'accès ont pu être ou pourront être tracées de façons différentes; l'ensemble du parterre n'en reste pas moins le même. S'il existe une intelligence supérieure qui a organisé l'univers, intelligence humaine comprise, ce que nous croyons, le parterre des *vérités* mathématiques existe alors sans doute, je dirai à l'état naturel, dans l'omniscience divine. Dieu n'a pas besoin des voies d'accès que nous y traçons; il a la connaissance immédiate de toutes les propriétés. Nous revenons à Hahn : Dien ne fait jamais des mathématiques.

Mais j'ai hâte de descendre de ces hauteurs de la philosophie et de la théologie, où le mathématicien est un profane, pour ouvrir modestement cette 125me Assemblée générale de la S. H. S. N.