Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 121 (1941)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag und Sonntag, 6. und 7. September 1941

Präsident: Prof. Dr. Louis Kollros (Zürich)
Sekretär: Prof. Dr. G. de Rham (Lausanne)

1. Karl Merz, Chur. — *Kreuzhaube erweitert nach Boy.*

Eine einfache Kreuzhaube[1] besitzt eine Doppelstrecke $SO \equiv 5$, wobei S die gemeinsame Spitze ist, von den beiden an SO in Scheitellage anstossenden dreiseitigen Pyramiden, und O der Schnitt der beiden Diagonalen des Quadrates, auf dem über zwei Scheiteldreiecken die beiden Pyramiden errichtet sind. Wird das unter jenem Quadrat ansetzende Prisma noch durch seine Grundfläche abgeschlossen, so ist das entstandene Polyeder als 11-Flach mit $e = 10$, $k = 20$, also $c = 1$, eine Abbildung der projektiven Ebene, wobei S und O singuläre Punkte sind, als Endpunkte der Doppelstrecke.

Diese Kreuzhaube soll nun so erweitert werden, dass dadurch am Polyeder eine Selbstdurchdringung entsteht, die einen einfachen geschlossenen Streckenzug bildet, so dass keine Endpunkte mehr an der Durchdringung bestehen. Um dies zu erzielen, sind zu der Doppelstrecke $OS \equiv 5$ noch weitere Doppelstrecken anzufügen, zum Beispiel $ST \equiv 9$ und $TO \equiv 3$, womit das Doppelstreckendreieck SOT entsteht. Um dabei die neue Doppelstrecke 9 zu erhalten, hat man die in 9 als Kante zusammenstossenden beiden Flächen A und E über 9 hinaus zu erweitern und dann noch mittelst zwei abschliessenden Flächen eine neue Scheitelzelle aussen längs 9 anzufügen. Längs 3 entsteht, auf entsprechende Weise, eine innere Hohlzelle, die in Scheitellage ist zu einer äussern Lücke der Kreuzhaube. Von diesem geschlossenen Polyeder, $f = 15$, $e = 14$, $k = 28$, also auch mit $c = 1$, mit dem Dreieck SOT als Selbstdurchdringung, lässt sich ein Netz herstellen (Vorweisung). Bei der Aufklappung dieses Netzes zum 15-Flach tritt die Eigentümlichkeit ein, dass die dabei entstehenden Wendestrecken, in denen Ober- und Unterseite des Netzes aneinanderstossen und damit die Einseitigkeit herbeiführen, zugleich in die Doppelstrecken fallen. Das Dreieck SOT der Doppelstrecken entspricht damit der unendlich fernen Geraden,

[1] K. Merz. Kreuzhaube aus verschiedenen Netzen, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. LXXXV. 1940 (Seite 51).

welche die Wendegerade der projektiven Ebene ist, und es entspricht daher zugleich auch der Selbstdurchdringung dieser Ebene. Diese durch die erweiterte Kreuzhaube erhaltene Abbildung der projektiven Ebene hat allerdings noch die drei singulären Punkte S, O, T, die aber von einfacherer Art sind als die sechs singulären Punkte am Heptaeder, in denen die drei Doppelstrecken als Selbstdurchdringungen endigen. Ausserdem fehlt der dreifache Punkt, wie er am Heptaeder auftritt. Doch tritt dafür eine Hohlzelle auf. Dieses Polyeder kann als Zugang zu einer neuen Boyschen Fläche dienen.

2. Marcel Diethelm (Rickenbach-Schwyz). — *Ein kurzer Weg zur Entwicklung der Hyperbelfunktionen.*

1. Definition und Konstruktion der Hyperbel, besonders der gleichseitigen Hyperbel.

2. Ableitung der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel und der Gleichung des Asymptotenpaares.

3. Behandlung der Aufgabe : Gesucht die Schnittpunkte einer Geraden mit der Hyperbel und gesucht die Schnittpunkte derselben Geraden mit den Asymptoten. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt für $x_1 + x_2$, das heisst für den Mittelpunkt der Geraden denselben Wert, woraus folgt :

a) Eine Gerade schneidet die Hyperbel und ihre Asymptoten derart, dass ihre zwischen den Hyperbelästen und Asymptoten gelegenen beiden Stücke gleich lang sind.

b) Das Parallelogramm, das von den Asymptoten und den durch einen Hyperbelpunkt zu den Asymptoten parallel gelegten Geraden begrenzt wird, hat einen Inhalt, der für alle Hyperbelpunkte derselbe ist :

$$x \cdot y = c$$

$$y = \frac{c}{x} \quad \text{Gleichung der Hyperbel.}$$

c) Bei der gleichseitigen Hyperbel wird das Parallelogramm zum Rechteck. Bei Benützung der Asymptoten als Koordinaten ist der Inhalt dieses Rechtecks gleich demjenigen eines Quadrates

$$x \cdot y = a^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2x} \quad \text{Gleichung der gleichseitigen Hyperbel.}$$

4. Berechnung des Hyperbelsektors

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2p^2}$$

5. Berechnung des zu einem Hyperbelbogen gehörigen Sinus und Cosinus.

6. Ableitung der beiden Fundamental-Hyperbelfunktionen

$$\mathfrak{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

$$\mathfrak{Cos}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

Die Ableitung der Fundamental-Hyperbelfunktionen aus der Fläche des Hyperbelsektors ist von Bedeutung, weil damit die enge Verknüpfung der geometrischen und der algebraischen Interpretation der Hyperbelfunktionen gegeben ist.

7. Der geometrische Vergleich zwischen den hyperbolischen und goniometrischen Funktionen.

8. Ableitung der Kreis- und Hyperbelfunktionen aus der Exponentialreihe.

9. Wichtige Formeln (Rechnung) und Beziehungen zwischen dem gemeinsamen Winkel φ und dem transzendenten Winkel ϑ.

3. Johann Jakob Burckhardt (Zürich). — *Der Nachlass von Ludwig Schläfli.*

Zusammenfassung eines Berichtes über die Katalogisierung und Neuordnung des Nachlasses von Ludwig Schläfli, der mit einem Sachregister und einem Anhang über Schläflis Arbeiten zur Theorie der quadratischen Formen in den Mitteilungen der Berner Naturf. Ges. veröffentlicht werden soll. — Der Nachlass ist unter Zugrundelegung des Verzeichnisses von Graf (Mitteilungen der Berner Naturf. Ges. 1896) geordnet worden mit Unterstützung der *Escher-Abegg*-Stiftung. Ein Sachverzeichnis hilft Zusammengehörendes aufzufinden. — Aus folgenden Gebieten haben wir Manuskripte gefunden, die einer weiteren Bearbeitung wert sind: 1. Theorie der Flächen dritter Ordnung, 2. 25 Hefte geometrischen Inhaltes, 3. 12 Hefte zu Hermites Theorie der Modulargleichungen, 4. Theorie der quadratischen Formen.

4. Louis Kollros (Zurich). — *1. Généralisation de théorèmes de Miquel et Clifford.*

Cinq droites d'un plan, prises 4 à 4, déterminent 5 paraboles dont les foyers sont sur un cercle (théorème de Miquel). Ce cercle est le lieu géométrique des points P tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les 5 droites données et le point P lui-même soient sur une conique.

Six droites d'un plan, prises 5 à 5, déterminent 6 cercles de Miquel; ces 6 cercles passent par un point; 7 droites, prises 6 à 6, déterminent 7 de ces points qui sont sur un cercle, et ainsi de suite (théorème de Clifford, Math. Papers, p. 38). Les cercles de Clifford

peuvent aussi être définis comme lieux géométriques; on trouve le résultat suivant :

« On donne $2n+1$ droites dans un plan; le lieu géométrique des points P tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur ces droites soient sur une courbe algébrique de degré n ayant en P un point multiple d'ordre $n-1$ est un cercle. » Si on a $2n+2$ droites, il n'y a qu'un point jouissant de cette propriété.

2. *Démonstration de deux formules de Steiner.*

Une conique est déterminée par son centre O et trois tangentes. Soient A, B, C les sommets du triangle formé par les trois tangentes, A', B', C' les milieux des côtés a, b, c, r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, x, y, z les distances du centre O aux côtés a, b, c et x', y', z' les distances de O aux côtés du triangle $A'B'C'$. Si la conique inscrite au triangle ABC est une ellipse, son aire E_i est donnée par la formule : $E_i^2 = 4\,\pi^2 r x' y' z'$; l'aire E_c de l'ellipse de même centre circonscrite au triangle ABC est donnée par :

$$E_c^2 = \pi^2 r \frac{x^2 y^2 z^2}{x' y' z'}.$$

Si la conique est une hyperbole (inscrite ou circonscrite à ABC) d'axes $2m$ et $2in$, chaque formule donne l'aire de l'ellipse d'axes $2m$ et $2n$.

Pour démontrer ces 2 formules de Steiner (Oeuvres complètes, t. II, p. 329), on peut déterminer le produit des puissances des involutions des points conjugués sur les axes. Mais on peut aussi transformer les formules en expressions invariantes par affinité en multipliant et divisant la première par abc et la seconde par $a^2 b^2 c^2$. Si l'on désigne l'aire du triangle ABC par T $(= abc : 4r)$ et les doubles des aires des triangles OBC, OCA, OAB respectivement par $t = ax$, $t' = by$, $t'' = cz$, on aura : $ax' = T - t$, $by' = T - t'$, $cz' = T - t''$ et

$$E_i^2 = \frac{\pi^2 (T-t)(T-t')(T-t'')}{T}, \qquad E_c^2 = \frac{\pi^2 t^2 t'^2 t''^2}{4\,T(T-t)(T-t')(T-t'')}.$$

Il suffit alors de démontrer ces formules respectivement pour le cercle inscrit et le cercle circonscrit à un triangle, ce qui est élémentaire.

Une conique est aussi déterminée par son centre O et un triangle polaire ABC; si c'est une ellipse, son aire E_p est donnée par :

$$E_p^2 = 2\,\pi^2 rxyz = \pi^2 \cdot \frac{tt' t''}{2\,T}.$$

Si le centre O est à l'intérieur du triangle polaire, la conique est imaginaire; la formule donne alors l'aire de l'ellipse d'axes $2m$ et $2n$, si $2im$ et $2in$ sont les axes de la conique imaginaire.

On a toujours :

$$E_p^2 = E_i\, E_c.$$

5. Heinz Hopf (Zürich). — *Über gewisse Zusammenhänge zwischen Gruppentheorie und Topologie.*

Man weiss, dass die erste Bettische Gruppe B^1 eines Komplexes durch dessen Fundamentalgruppe G bestimmt ist: sie ist die Faktorgruppe G/C_G, wobei C_G die Kommutatorgruppe von G ist. In der Untersuchung, über die hier berichtet wird, handelt es sich um den Einfluss der Fundamentalgruppe G auf die zweite Bettische Gruppe B^2.

Satz I: Jeder Gruppe G ist durch einen bestimmten algebraischen Prozess eine Abelsche Gruppe G_1^* zugeordnet; wenn G die Fundamentalgruppe eines Komplexes K und wenn S^2 die Untergruppe von B^2 ist, die aus denjenigen Homologieklassen besteht, welche stetige Bilder von Kugelflächen enthalten, so ist

$$B^2/S^2 \cong G_1^* .$$

Korollar: B^2 besitzt G_1^* als homomorphes Bild; in diesem Sinne ist also die zweite Bettische Gruppe « nicht kleiner » als die Gruppe G_1^*, die durch die Fundamentalgruppe bestimmt ist.

Zusatz: Zu jeder Gruppe G (mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen) gibt es einen Komplex K, dessen Fundamentalgruppe G und für den $S^2 = O$ ist; daher ist G_1^* die « genaue untere Schranke » derjenigen Gruppen B^2, die als zweite Bettische Gruppen mit der Fundamentalgruppe G verträglich sind.

Um G_1^* algebraisch zu charakterisieren, benutzen wir die folgende Bildung von Gruppen: ist F irgendeine Gruppe, R eine Untergruppe von F, so ist $C_F(R)$ die Untergruppe von F, die von allen Elementen $x \cdot r \cdot x^{-1} \cdot r^{-1}$ mit $x \in F$, $r \in R$ erzeugt wird; z. B. ist $C_F(F) = C_F$ die Kommutatorgruppe, $C_F(C_F) = C_F^2$ die « zweite Kommutatorgruppe » von F.

Satz II: G sei homomorphes Bild der freien Gruppe F, und dabei sei der Normalteiler R von F das Urbild des Eins-Elementes von G; dann ist

$$G_1^* \cong (C_F \cap R) / C_F(R).$$

Es ist ein gruppentheoretischer Satz, dass die auf der rechten Seite dieser Isomorphie stehende Gruppe nicht von den Gruppen F und R, sondern nur von der Faktorgruppe F/R, also von G, abhängt.

Beispiel: Ist G die freie Abelsche Gruppe vom Range p, so ist G_1^* die freie Abelsche Gruppe vom Range $\frac{p(p-1)}{2}$. Dies kann man sowohl geometrisch auf Grund des Satzes I, als auch algebraisch auf Grund des Satzes II erkennen.

Die Gruppen $C_F(R)$ spielen in der neueren Gruppentheorie — besonders in Arbeiten von Hall, Magnus, Witt — eine wichtige Rolle; auf den Zusammenhang zwischen dieser gruppentheoretischen Bildung mit topologischen Begriffen sollte hier besonders hingewiesen werden.

Eine ausführliche Darstellung erscheint in den Commentarii Mathematici Helvetici.

6. Pierre Humbert †. — *Polyèdre sans singularités topologiques homéomorphe au plan projectif dans l'espace à 3 dimensions.* (Vorgetragen von H. Hopf, Zürich.)

Durch Abänderungen an einem Polyeder, das Herr K. Merz (Chur), ausgehend von dem Heptaeder, erhalten hatte, wird ein Polyeder im dreidimensionalen euklidischen Raum konstruiert, das in folgendem Sinne ein Modell der projektiven Ebene ist: Es ist eindeutiges und stetiges Bild der projektiven Ebene, und jeder Punkt der projektiven Ebene besitzt eine Umgebung, in der die Abbildung *einein*deutig ist. Dieses Modell besitzt dieselbe Symmetrie wie die bekannte Boysche Fläche und kann als polyedrale Approximation dieser Fläche angesehen werden, zu welcher damit ein neuer und anschaulicher Zugang gewonnen ist. Die genaue Beschreibung dieses Modells soll zusammen mit der angedeuteten Konstruktion von Herrn Merz in den Comment. Math. Helvetici erscheinen.

7. de Rham (Lausanne). — *Sur une décomposition des chaînes d'un complexe.*

Voir compte rendu dans « l'Enseignement mathématique ».

8. B. Eckmann (Zürich). — *Vektorfelder auf Sphären.*

Unter einem Vektorfeld (oder Richtungsfeld) auf einer Sphäre soll im folgenden ein stetiges Feld von tangentialen Einheitsvektoren dieser Sphäre verstanden werden. Nach einem bekannten Satz von Poincaré-Brouwer gibt es auf Sphären gerader Dimension keine derartigen Vektorfelder (wohl aber gibt es solche auf Sphären ungerader Dimension). Ein *k-Feld auf einer Sphäre* ist ein System von k Vektorfeldern, derart dass in jedem Punkt der Sphäre die k dort angebrachten Vektoren linear unabhängig sind, oder, was auf dasselbe herauskommt, ein Orthogonalsystem bilden. Wenn es auf einer Sphäre der Dimension n ein n-Feld gibt, so heisst sie *parallelisierbar*[1] — die Sphären der Dimensionen 1, 3, 7 sind es, wie man weiss[1]; ob noch andere Sphären parallelisierbar sind, ist unbekannt. Die Methoden von Stiefel[1], die im Falle der reellen projektiven Räume zu weitgehenden Resultaten über k-Felder geführt haben, versagen bei den Sphären. Man kann aber zeigen:

Auf einer Sphäre der Dimension $4s+1$ gibt es kein 2-Feld. Solche Sphären sind also nicht parallelisierbar.

Der Beweis dieses Satzes, der demnächst in einer ausführlichen Arbeit erscheinen wird, benützt die von Hurewicz eingeführten « Homotopiegruppen » und Resultate aus der Theorie der « Faserungen »[2],

---

[1] E. Stiefel, Comm. Math. Helv. 8 (1935), 3—51; ferner Comm. Math. Helv. 13 (1941), 201—218.

[2] B. Eckmann, Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Comm. Math. Helv. (im Druck).

ferner Eigenschaften der Fundamentalgruppe der orthogonalen Gruppen. Der Satz wird in diesem Beweis auf den folgenden zurückgeführt:

r sei ungerade, und $f_1, f_2, \ldots, f_r$ seien r komplexe Funktionen der komplexen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_r$, die für alle von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedenen Werte dieser Variabeln stetig sind. *Wenn identisch in den u_j gilt*

$$\sum_{j=1}^{r} u_j f_j (u_1, \ldots, u_r) \equiv 0,$$

dann haben die f_j mindestens eine (von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedene) gemeinsame Nullstelle.

Aus diesem auf topologischem Wege gefundenen Ergebnis entnimmt man leicht neue algebraische Sätze (man setze für die f_j Formen oder Polynome in den u_j ein). Man kann die Aufgabe stellen, diese auch auf algebraischem Wege zu beweisen.

9. Willy Scherrer (Bern). — *Zur Theorie der Elementarteilchen.*

Veranlasst durch neue Ansätze zu einer skalaren relativistischen Wellenmechanik[1] diskutiert der Referent folgenden Ansatz zu einer Gravitationstheorie mit einer skalaren und durchwegs positiven Wirkungsdichte

$$T \equiv T(x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

und dem Linienelement

$$ds^2 = G_{ik}\, dx_i\, dx_k \,. \tag{2}$$

$$\int T R \sqrt{G}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \text{Extremum} \tag{3}$$

mit der Nebenbedingung

$$\int T \sqrt{G}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \text{konst.} \tag{4}$$

wo R den Riemannschen Krümmungsskalar darstellt.

Bezeichnet man mit Λ die wegen (4) sich ergebende kosmologische Konstante und benutzt man die Abkürzung

$$T_{ik} \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} - \Gamma_{ik}^{\lambda} \frac{\partial T}{\partial x_\lambda} \tag{5}$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} T R_{ik} &= T_{ik} - G_{ik} \Box T \\ R &= -\Lambda \end{aligned}} \tag{6}$$

[1] Vgl. Helvet. Phys. Acta XIV, *1*, 81, und XIV, 2.

zur Bestimmung der 11 Grössen G_{ik} und T.

Als Folgerung aus (6) ergibt sich die Gleichung

$$\Box T = \frac{\Lambda}{3} T \tag{7}$$

Sie darf nicht unmittelbar als Wellengleichung angesprochen werden, da nicht T^2, sondern T die Materiedichte darstellt.

Das zugehörige kosmologische Problem ist eindeutig bestimmt und liefert eine Welt, die sich aus einer Einsteinschen Zylinderwelt für $x_0 = -\infty$ in eine De-Sitter-Welt für $x_0 = +\infty$ entwickelt.

Einen allgemeinern Ansatz erhält man, wenn man in (3) R ersetzt durch

$$R + k \text{ (grad Lg } T)^2. \tag{8}$$

10. Louis Locher (Winterthur). — *Über projektive Linien- und Ebenenkoordinaten.*

Homogene projektive Koordinaten bildet man, indem die nichthomogenen K. als Quotienten mit derselben Hilfsvariablen im Nenner dargestellt werden. Zur Einführung stellt sich die didaktische Frage, ob diese homogenen K. nicht unmittelbar anschaulich gelesen werden können. Das geht sehr einfach und wird doch in der Lehrbuchliteratur unterlassen. Führt man das K.-System entsprechend ein, so lassen sich die K. $u, v, \ldots\ldots$ des Punktes $Uu + Vv + \ldots\ldots = O$ und des mit ihm incidierenden dualen Elementes $U, V, \ldots\ldots$ unmittelbar anschaulich fassen. Sind im metrischen Falle $u, v, w, \ldots.$ rechtwinklige Punktkoordinaten, so stellen $U, V, W, \ldots$ diejenigen dazu dualen K. dar, welche sich aus der pseudoeuklidischen Metrik ergeben. Die vorgetragene Bemerkung ist in meinem Buche « Projektive Geometrie » (Orell Füssli, 1940, S. 215 f.) angewendet.

11. A. Speiser (Zürich). — *Über geodätische Linien.*

Erscheint in den « Commentarii Mathematici Helvetici ».

12. R. Wavre (Genève). — *L'itération au moyen d'un opérateur hermitien.*

Voir compte rendu dans « l'Enseignement mathématique » et dans les « Commentarii Mathematici ».

Es haben noch gesprochen: S. Piccard, Neuchâtel; J. Malengreau, Clarens; H. Hadwiger, Bern; F. Fiala, Genève; Ch. Blanc, Lausanne; P. Bernays, Zürich; A. Pfluger, Fribourg.