Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 113 (1932)

Artikel: La vérité mathématique et la réalité

Autor: Gonseth, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-90383

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La vérité mathématique et la réalité

Par

F. Gonseth, Zurich

Un sujet tel que celui de cette conférence ne peut guère être abordé que par un biais. C'est pourquoi je m'en vais commencer par vous citer deux opinions où la vérité mathématique et la réalité sont plus ou moins mises en opposition.

La première est de Gauss, elle se trouve dans une lettre à Bessel, et se résume brièvement ainsi:

Mieux vaut une seule de ces vérités éternelles que les résultats de mille expériences.

La seconde est d'Einstein et se trouve dans le petit ouvrage intitulé: Geometrie und Erfahrung. Je ne cite pas textuellement, mais je crois serrer le sens d'assez près. Einstein sépare dans les axiomes de la géométrie le côté purement formel ou purement logique du contenu intuitif. Seules les relations de pure logique — dit-il — sont du ressort des mathématiques, tandis que le contenu des axiomes doit être annexé à la physique. Quant à la vérité des constructions mathématiques, elle ne conditionne pas la réalité physique, et réciproquement.

Il faut le constater: Ces deux grands esprits ne se rencontrent pas. Le premier semble placer les résultats abstraits, auxquels le mathématicien parvient par le seul exercice de son esprit, au plus haut degré de l'échelle des valeurs scientifiques.

Et si l'on admet qu'il existe des vérités éternelles, expressions de nécessités supérieures, transcendentes à notre intelligence; si l'on admet que, par exemple, l'équation

$$2 + 3 = 3 + 2$$

est une vérité de cet ordre; si l'on conçoit un monde idéal où la vérité est la dernière loi, ne faut-il pas admettre aussi que Gauss ait raison?

Le second de nos grands hommes semble faire assez maigre cas de cette vérité éternelle. Ayant dépouillé la géométrie, et par extension nécessaire l'ensemble des mathématiques, de toute signification dans l'ordre du réel, il les laisse vivre d'une vie exsangue, comme les ombres élyséennes. En particulier, la vérité mathématique ne pouvant pas fournir la garantie d'une réalité dans le monde physique, *aucune réalité ne pouvant plus être démontrée par la logique pure,* l'idée de vérité se dégrade et se trouve rejetée hors du cercle des préoccupations essentielles.

Et si l'on admet qu'il existe une réalité tellement concrète que l'on puisse distinguer sans équivoque ce qu'est le contenu de réalité des axiomes ou, en général, de la formulation d'un fait quelconque, Einstein semble avoir raison à son tour.

Veuillez remarquer que les deux savants dont nous avons opposé les opinions ne peuvent en aucune façon être regardés comme les défenseurs d'un point de vue exclusif. On sait bien les travaux de géodésie que Gauss entreprit à côté de ses recherches de mathématiques pures; on sait que ses méditations sur la possibilité d'une géométrie non-euclidienne le conduisirent à vérifier expérimentalement le théorème de géométrie concernant la somme des angles d'un triangle. Et, d'autre part, il serait véritablement absurde de vouloir prétendre que le créateur de la théorie de la relativité n'apprécie pas à sa valeur la méthode mathématique.

En dépit de ces circonstances, il n'y a pas à s'y méprendre sur l'évidente divergence des opinions: le mathématicien tient son regard attaché sur son idéal de vérité, tandis que le physicien met la réalité physique au premier plan — la vérité des formules qu'il emploie lui étant, au fond, secondaire.

Quelque intérêt qu'il puisse y avoir à confronter les opinions de deux savants aussi considérables que Gauss et Einstein, nous ne les avons cités ici que comme représentants de deux mentalités différentes. Derrière Gauss on peut apercevoir la grande majorité des mathématiciens d'autrefois et d'aujourd'hui. La presque totalité des mathématiciens actuels souscriraient encore sans hésiter à une affirmation telle que celle-ci: « Les vérités mathématiques sont des vérités absolues, que jamais rien ne viendra ébranler. » Les mathématiciens ne doutent pas qu'ils aient ancré leur science sur le terrain de la vérité pure, et peu nombreux sont ceux qui n'aperçoivent pas dans ce fait une certaine prééminence de leur science.

Les autres sciences ne semblent pas contester cette position d'exception.

Tandis qu'elles voient leurs résultats constamment remis en question, leurs vues en apparence les mieux assises souvent menacées et parfois renversées, elles semblent à peine s'étonner de la sécurité dont jouissent les mathématiques. Mais — conséquence inévitable — la spéculation mathématique leur paraît, *dans son essence,* étrangère à leurs préoccupations habituelles. Elles accepteront de se servir du calcul comme d'un instrument dont il ne faut pas contester l'efficacité. Mais le trait essentiel, la recherche de la vérité abstraite, elles l'ignorent presque totalement.

Bien, que par ses applications, la science mathématique pousse des rameaux dans les directions les plus diverses, son idéal de vérité la met cependant à part — *en marge* — du reste des sciences. L'orgueil plus ou moins légitime qui reste sensible à travers la citation de Gauss anime encore la mathématique actuelle. Et le reste des sciences partage plus ou moins le détachement d'Einstein, en ce qui concerne la recherche des « vérités éternelles ».

Mesdames et Messieurs, la discussion de notre sujet s'ouvre ainsi sur une querelle. Mon intention est d'esquisser, en traits naturellement assez sommaires, vu le temps relativement court dont nous disposons, d'esquisser comment on peut chercher une conciliation sur une position intermédiaire, plus rapprochée à vrai dire d'Einstein que de Gauss. Mais qu'il me soit permis tout d'abord de dire quelques mots sur la valeur d'une tentative de ce genre. Je ne crois pas que, en ce qui concerne l'opportunité de considérations aussi générales aussi peu délimitées, je puisse compter sur un acquiescement unanime. Peut-être quelqu'un d'entre vous serait-il tenté de me faire observer: « La phrase de Gauss que vous avez citée n'est qu'un à côté dans l'œuvre du grand mathématicien et n'ajoute rien à ses mérites. Et peu importe qu'Einstein ait tort ou raison, en ce qui concerne le contenu et la forme des axiomes. C'est là une opinion qui ne touche à rien d'essentiel. L'intérêt de son œuvre est ailleurs. La question des rapports entre les notions de vérité et de réalité est une question de philosophes. Elle n'intéresse la science que de loin.» A cette objection, on peut répondre simplement qu'il est impossible de se soustraire à la nécessité de « philosopher ». Qu'on le veuille ou non, on est toujours le prisonnier d'une certaine philosophie. Examinons par exemple la notion

de vérité. C'est là une de ces notions primitives qu'il est vain de vouloir définir. Mais il n'est pas inutile de se rappeler comment s'est constitué le sens que nous lui attribuons. Il est né de la spéculation mathématique et s'est ensuite exprimé, développé, explicité dans la Théorie des Idées de Platon. Il s'est transmis à peu près inaltéré dans la tradition mathématique. Du reste, les autres sciences ont aussi conservé cet héritage: Le savant qui dit encore aujourd'hui: « Le but ultime de la science est la recherche de la Vérité » fait de la philosophie platonicienne, comme M. Jourdain faisait de la prose. On peut donc prétendre que l'idéal de vérité des mathématiciens appartient au cycle de la philosophie platonicienne.

De même l'idée de chose avec laquelle la science a opéré jusqu'à aujourd'hui appartient au cycle aristotélicien. Une chose possède par elle-même, selon cette idée, certaines propriétés distinctives par lesquelles elle peut être saisie et classifiée.

Je ne veux pas dire que, du fait seul que ces notions ont pris leur sens dans un cycle d'idées périmé, elles aient perdu leur efficacité. Au contraire, tant qu'on ne s'éloigne pas trop des conditions initiales où elles ont pris naissance, elles conservent un sens suffisamment bien délimité pour qu'on puisse s'en servir avec profit. Mais ce serait une grave erreur que de porter cette signification dans un domaine très éloigné de ces conditions initiales, en imaginant que cette signification est elle-même donnée de façon parfaite et ne varietur. C'est ainsi que dans la physique de l'atome, spécialement dans la Théorie des quanta, la notion ordinaire d'objet ne paraît plus adéquate aux nouvelles réalités qu'il faut y concevoir.

C'est de la même façon qu'on est, le sachant ou à son insu, euclidien pour la notion d'espace, cartésien pour celle de raison, newtonien pour celle de temps, etc., etc. En un mot, on ne fait pas de science indépendamment de toute philosophie. L'esprit de celui qui se refuse aux discussions dites philosophiques dans le présent est habillé des lambeaux des philosophies anciennes.

Cest pourquoi je n'hésite pas à prétendre que la science ne peut se soustraire au devoir d'examiner les notions fondamentales dont elle se sert, de les mettre en accord les unes avec les autres, de rechercher quels sont leurs rapports réciproques. . . . Tout ce travail de réflexion et de mise au point, c'est là ce que l'on pourrait spécialement appeler la philosophie de la science. Que les bases

d'une philosophie de ce genre aient été déjà jetées, je n'en veux prendre pour preuve que les travaux de HELMHOLTZ sur les origines empiriques de la géométrie et de l'arithmétique.

C'est maintenant dans le cadre de cette philosophie que vient se placer la tentative de conciliation dont j'ai déjà parlé. La thèse que je formule est maintenant la suivante: Il est possible d'esquisser un ensemble de vues, que l'on peut si l'on veut nommer une philosophie, au sein de laquelle les notions fondamentales telles que celles de vérité, de réalité, de concret et d'abstrait, de chose, d'espace, de temps, etc., prennent un sens adéquat aux besoins actuels de la science, et dans laquelle en particulier l'opposition par laquelle nous avons abordé notre sujet, disparaît.

* * *

Pour atteindre mes fins, il faut tout d'abord que je m'attaque à ce qu'on peut appeler le boulevard de la notion de vérité absolue, je veux dire l'infaillible sécurité de la spéculation mathématique. Je prétends que si l'on y regarde de plus près et sans parti pris, cette infaillibilité apparaît plus ou moins chancelante. Comme les autres sciences, les mathématiques peuvent être le théâtre d'un de ces bouleversements qui ruinent toute une théorie. Pour le faire voir, fixons tout d'abord les traits essentiels d'une révolution de ce genre. Choisissons l'exemple de la relativité dite restreinte, qui est encore dans toutes les mémoires: cet exemple est devenu si classique qu'il va nous suffir de quelques mots.

On se souvient qu'avant la découverte d'EINSTEIN, une certaine partie de la physique était le siège de contradictions intolérables. Il était impossible de faire accorder la cinématique ordinaire et la théorie de l'électromagnétisme. Pour que les contradictions disparussent, il suffit de substituer au schéma théorique de la cinématique ordinaire un autre schéma pouvant rendre les mêmes services; une autre cinématique; la cinématique, précisément, qui fait l'objet de la théorie de la relativité dite restreinte. Ces deux cinématiques, la cinématique ordinaire et celle d'EINSTEIN étant d'ailleurs dans le même rapport que deux géométries, l'une euclidienne et l'autre non euclidienne.

Voilà donc le schéma de cet événement scientifique si considérable. Nous allons voir maintenant que les mathématiques — toutes proportions gardées — offrent à un œil un peu averti, un

spectacle absolument pareil. Le siège de la révolution que nous allons décrire se trouve même dans le domaine qu'on considérait un peu comme le Saint des saints, dans la logique. Je ne pourrai malheureusement aller au but aussi directement qu'il y a un instant, à propos du passage d'une cinématique à l'autre. Je ne pourrai me dispenser de remonter aux fondements, et de commencer, si singulier que cela paraisse, par une digression sur la notion de l'objet, sur la notion tout ordinaire de chose matérielle, possédant forme et couleur et occupant une certaine portion d'espace. C'est là une notion des plus simples et dont le sens est des moins problématiques. Je vous prie cependant de ne point vous arrêter à cette indubitable simplicité. L'observation des tout petits enfants a mis hors de doute qu'ils ne possèdent pas dès leur naissance la connaissance de ce que c'est qu'un objet. Ils ne savent pas dès leur première enfance rassembler et coordonner les impressions sensorielles qui devraient appartenir à *un seul et même objet.* Ces impressions qui varient lorsque l'objet et l'enfant se déplacent l'un par rapport à l'autre, ou lorsque l'objet affecte des sens différents, restent comme éparpillés dans la conscience, et ne sont pas encore associés. L'objet n'est pas encore reconnu comme identique à lui-même sous ses différents aspects, il n'est pas encore individualisé, il n'est pas encore perçu comme tel.

Au contraire, il faut un assez long développement physique et mental pour que les impressions tactiles viennent rejoindre les impressions visuelles, et s'y superposer; pour que la mémoire des yeux s'accorde avec celle des lèvres et des doigts. L'enfant n'entre que petit à petit en possession du mécanisme mental qui va lui permettre de réaliser la permanence et l'identité de l'objet sous la multiplicité des sensations, de concevoir l'unité du lieu sous la diversité des images.

Il y a donc, dans le développement de l'enfant, un stade où celui-ci ne possède pas encore la faculté de nouer en faisceaux les sensations qui l'assaillent. Il n'a pas encore à sa disposition le système de normes; sa mémoire n'a pas encore dégagé et fixé les points de repères qui le rendront capable de comprendre le langage des signaux que ses sens captent. Ces repères et ces normes forment la substance de ce que nous voulons appeler une *forme intuitive. Les sensations ne deviennent objet que par projection sur cette forme, que par leurs rapports au cadre des normes et des repères.*

Ces observations mettent clairement en lumière que ce que nous nommons un objet n'est qu'un découpage plus ou moins schématique de la réalité. L'objet n'est pas directement donné, comme une réalité immédiate, dans une intuition qui en prendrait possession d'un seul coup et jusque dans son essence. L'objet n'est au contraire qu'un schéma, fourni par un mécanisme mental assez compliqué; il n'est qu'une image imparfaite, on est tenté de dire provisoire et superficielle, image non pas d'une réalité en soi, mais une résultante des associations et des coordinations dont cette réalité nous a fourni l'occasion.

Veuillez maintenant établir une comparaison entre la façon dont se forme en nous la représentation d'un objet et la façon dont le physicien, par exemple, fixe l'aspect de l'une ou de l'autre de *ses* réalités. Il a besoin tout d'abord d'un certain nombre d'observations qui viendront remplacer les impressions sensorielles immédiates. Ces observations ne deviennent ensuite réalité que sur la base d'un certain schéma théorique, comme celui de la cinématique ordinaire ou comme celui de la cinématique d'Einstein, ou aussi, pour ne pas chercher si loin, comme celui de la géométrie ordinaire. *Ce schéma théorique correspond à ce que nous avons nommé la forme intuitive.* L'acte d'interprétation qui, sur la base des observations d'une part, du schéma théorique d'autre part, construit une réalité, *correspond à l'acte mental* qui construit l'objet par la projection des sensations sur l'ensemble des repères intuitifs. Ainsi donc, dans la perception du plus simple des objets, on peut déjà distinguer les traits essentiels de toute investigation scientifique de la réalité, et en particulier cette *activité interprétatrice* qui confère un caractère nettement schématique à toute notre connaissance du monde extérieur.

Poussons notre comparaison un pas plus loin. Le schéma théorique nécessaire à l'interprétation des résultats d'observation met en relation les différentes grandeurs physiques telles que la distance, la masse, la vitesse, le potentiel, etc., et ces relations sont les *lois* du domaine envisagé. Si notre comparaison est fondée, la forme intuitive, où la création mentale «*objet*» prend naissance, doit contenir aussi les lois de l'objet, en même temps que les autres notions qui y interviennent. Existe-t-il vraiment des lois de ce genre? Sans doute. La plus simple est peut-être la suivante: *Un objet ne peut être à la fois présent et absent.* Par une légère

progression dans l'abstrait, en intégrant pour ainsi dire l'absence sur toute la gamme des localisations, on passe de l'absence au non-être, et de même on passe de la présence à « l'être tout court », en laissant tomber dans l'oubli tout ce qui est qualité sensible.

Les premières lois de l'objet s'énoncent alors ainsi :

a) Pour tout objet on a seulement les deux possibilités suivantes : Il est ou il n'est pas. On peut apercevoir dans cet énoncé la forme la plus primitive du principe logique du tiers exclu.

Une seconde loi de l'objet serait ensuite la suivante :

b) Les deux possibilités précédentes s'excluent. C'est la forme primitive du principe logique de contradiction.

On pourrait y ajouter le principe d'identité :

c) Tout objet reste le même (avant ou après un déplacement).

Les notions qui viendraient ensuite sont celles qui s'expriment par les conjonctions *et* et *ou,* qui mettent en relation tout d'abord deux objets quelconques. L'une des nouvelles lois qu'on obtiendrait immédiatement serait équivalente, par exemple, à la règle de logique que voici :

Nier *a* ou *b* c'est affirmer non-*a* et non-*b*

et ainsi de suite. Je n'ai nullement l'intention de reprendre toutes les formules de la logique et de montrer que chacune d'elles correspond à une loi de l'objet. Ce que j'en ai dit me paraît suffisant pour faire voir que l'on peut envisager la logique d'un point de vue où la notion de vérité absolue n'intervient en aucune façon. La logique prend au contraire la forme d'un chapitre de la physique du premier chapitre pourrait-on dire, de celui qui formule les lois — empiriques naturellement — de l'objet quelconque. Je résume cette digression dans la formule que voici : *La logique sous sa forme la plus primitive, peut être envisagée comme une physique de l'objet quelconque.*

J'insisterai encore sur le fait que les lois de l'objet nous paraissent de la plus haute évidence ou de la plus grande banalité, parce qu'elles sont inscrites dans la forme intuitive où la notion d'objet est fondée. Mais il est clair que cette évidence est maintenant d'ordre physiologique, et n'a plus rien à faire avec l'idéal d'une vérité absolue. La sécurité avec laquelle les lois de la logique peuvent être employées n'est que l'expression de l'efficacité, de l'adéquation de la physique de l'objet à la réalité qu'elle vise.

Maintenant que nous avons découvert ce qui pourraient être les origines empiriques de la logique, je ne vous exposerai pas comment celle-ci se constitue en un schéma abstrait ou théorique, dont le champ d'application s'éloigne de plus en plus de son objet primitif. Le trait essentiel de cette extension consiste à *porter* les lois de l'objet dans la sphère des *objets mentaux,* des objets de pensée.

Cette extension est d'ailleurs toute naturelle, et dans la physique aussi, ou dans toute autre science, il arrive souvent qu'une théorie, inventée pour servir d'explication à certains phénomènes soit portée au delà de son champ d'application primitif. L'exemple que j'ai rappelé de la cinématique ordinaire qui ne voulait pas cadrer avec l'électromagnétisme en est une illustration.

Dans la comparaison que nous sommes en train de faire, les analogies deviennent de plus en plus nombreuses et de plus en plus pressantes. Mais — penserez-vous peut-être — il y a un point où cette comparaison boîtera nécessairement. Pour en rester justement à la cinématique ordinaire, l'extension qu'on en faisait au delà de sa sphère d'efficacité, qui ne dépasse pas une certaine décimale dans l'approximation, cette extension s'est heurtée à des contradictions insurmontables et il a fallu y renoncer. Tandis que la logique, pourvu qu'on en respecte les règles, ne pourra jamais se heurter à la contradiction. Eh bien, les faits ne respectent pas plus le schéma théorique de la logique que toute autre théorie. Depuis longtemps on sait que si l'on met une certaine obstination, une certaine raideur à appliquer les lois de notre soi-disant infaillible logique, il y a certaines contradictions qu'il est impossible d'éviter. Ces antinomies ne sont, pour la plupart, pas nouvelles. Avec raison on ne les a guère considérées comme un vrai péril pour les mathématiques. Ce sont au contraire — selon l'expression de Poincaré — des pièges dans lesquels on ne tombe que si on le veut bien. Et pourtant, en raison même de leur bénignité, il est profondément irritant de ne pouvoir les écarter sans compromettre aussi maints résultats auxquels on ne voudrait pas renoncer.

Voici la forme ingénieuse qu'on peut donner à l'un d'eux: Il y a dans une bibliothèque des catalogues, et parmi ceux-ci des catalogues qui se mentionnent eux-mêmes et d'autres qui ne se mentionnent pas. Il semble bien que les deux propriétés « de se mentionner » et « de ne pas se mentionner » doivent être des contra-

dictoires au sens de la logique ordinaire. Et pourtant, si l'on imagine « le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas », les choses ne vont pas sans difficultés. Si l'on admet que ce nouveau catalogue se mentionne on peut immédiatement en déduire qu'il ne se mentionne pas et inversément. Les deux hypothèses, dont *l'une* semble devoir être exacte, conduisent toutes deux à une contradiction.

Evidemment, rien ne nous oblige à imaginer ce catalogue paradoxal. Mais là n'est pas la question. Le fait qui compte, c'est que la logique ne contient aucune règle qui nous défende de le faire, et qui puisse nous empêcher de raisonner comme nous l'avons fait.

Les classes d'objets qui interviennent dans la logique classique doivent être supposées finies. Sur ce point, le domaine des mathématiques, même élémentaires, déborde le domaine de la logique, puisque la plupart des classes d'objets que le mathématicien considère sont infinies, comme la classe ou l'ensemble des nombres entiers ou celle des nombres premiers, ou encore l'ensemble des points d'une droite ou d'un plan, etc. La théorie des ensembles infinis, qu'on peut considérer comme une extension de la logique ordinaire aux classes infinies, fait apparaître d'autres paradoxes, qu'il ne nous sera pas nécessaire de préciser. Ce sont spécialement ces derniers qui ont fortement occupé les mathématiciens et qui ont été l'occasion d'une discussion extrêmement vive, et encore en cours, sur les fondements des mathématiques et de la logique.

Eh bien, si l'on recherche les origines de ces paradoxes, on découvre qu'ils tiennent aux causes que voici:

La logique actuelle permet d'imaginer des relations non seulement entre des objets différents, mais elle admet aussi qu'un objet puisse entrer en relation avec lui-même. Exemple: un catalogue qui se mentionne lui-même. D'autre part elle ne formule aucune restriction concernant les incompatibilités qui peuvent exister entre les diverses relations possibles. Or, il se présente que c'est là trop de libertés à la fois. La logique éviterait certainement les paradoxes tel que celui que je vous ai cité si elle pouvait renoncer, soit au libre choix des incompatibilités, soit à faire intervenir des relations partant d'un objet et y revenant.

Enfin, si l'on examine les antinomies auxquelles conduit la théorie des ensembles, on découvre une cause de trouble encore plus profonde. Un ensemble se définit — selon Cantor — comme

étant une collection infinie d'objets possédant une propriété caractéristique, sur la foi de laquelle chacun de ces objets est attribué à l'ensemble comme élément.

D'après cette définition les éléments d'un ensemble sont donc des objets au sens que j'ai déjà nommé aristotélicien, sens selon lequel les objets sont à considérer comme possédant a priori et de par eux-mêmes certaines propriétés par lesquelles ils peuvent être saisis et classifiés. Il se revèle que cette façon de concevoir l'élément de l'ensemble ouvre la voie aux contradictions.

Nous voici arrivés en un point où nous pouvons reprendre notre comparaison. De même que l'hypothèse du temps absolu ou newtonien, tel qu'il intervient dans la cinématique ordinaire, était la cause du désaccord avec l'électromagnétisme, l'hypothèse de l'objet aristotélicien est la cause du désaccord avec le reste de la spéculation mathématique.

Pour que la comparaison soit enfin concluante, il doit suffir — nous semble-t-il — de montrer que la substitution d'une nouvelle notion de l'objet est susceptible de ramener l'équilibre.

Cet objet est ce que j'appelle un *objet purement logique.* Il est aux objets matériels dans la même relation d'abstraction que la droite l'est à ses réalisations physiques, telles que la trajectoire d'un rayon lumineux ou l'arête d'une règle à dessiner.

Ces objets logiques n'ont aucune propriété a priori. Ils n'ont pas d'autres fonctions que d'entrer en relations logiques avec d'autres objets du même genre, et ils n'ont pas d'autres propriétés que celles que ces relations leur confèrent, etc.

Je ne pense naturellement pas à vous exposer dans le détail les traits de la théorie de ce nouvel objet logique.[1] Qu'il me suffise de dire

a) qu'en acceptant pour les objets logiques les règles de la physique de l'objet quelconque en ce qui concerne l'être et le non-être;

b) qu'en bannissant les relations qui ne s'établissent pas entre des objets différents;

c) et en édictant, quant aux collections d'objets logiques infinies certaines règles extrêmement simples et qui ne font qu'exprimer la liberté que nous avons d'imaginer toujours de nou-

[1] F. Gonseth: Commentarii matematici helvetici. Vol. 5, 1933. Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations, pp. 108—132.

veaux objets et de les mettre, ou non, en relations les uns avec les autres,

les paradoxes sont tout naturellement rejetés hors de la logique et hors des mathématiques.

Ainsi, trait pour trait, nous avons retrouvé dans le domaine qui semblait le plus à l'abri, le schéma d'une de ces révolutions qui semblaient devoir épargner les mathématiques. La conclusion qui me semble s'imposer est la suivante:

Si, sans se laisser arrêter par la simplicité des notions fondamentales, on porte la discussion jusque dans la sphère de l'intuition, on peut mettre à découvert les origines empiriques de tout l'édifice mathématique, sans en excepter la logique.

Et maintenant, si nous revenons aux deux opinions contradictoires que nous avons citées au début, ni l'une, ni l'autre ne pourra plus nous satisfaire.

Pour celle de Gauss tout d'abord, la chose est immédiatement claire. La logique étant d'origine empirique, ses règles étant calquées sur celles de la physique de l'objet quelconque, les vérités éternelles dont parle Gauss ne sont plus essentiellement différentes des vérités d'expérience.

D'autre part, il est également impossible de donner complètement raison à Einstein, car si la logique elle-même a des origines empiriques, si la logique elle-même possède un contenu appréciable de réalité, comment faire le partage entre ce qui est, dans les assertions mathématiques, pure logique et contenu de réalité? C'est là une constatation que viendrait confirmer une analyse plus ample et plus approfondie, qui embrasserait, en même temps que la logique, aussi les fondements de l'arithmétique et de la géométrie: Il n'est pas possible de vider les axiomes de leur contenu intuitif ou de leur contenu de réalité. Il n'existe pas de logique qui puisse traiter les jugements et les assertions, les axiomes et les théorèmes comme des schémas absolument vides de sens.

Au fond, l'idée d'une logique de ce genre est la sœur cadette de la notion de vérité absolue. Elles appartiennent toutes deux au même cycle d'idées. Elles sont toutes deux insuffisantes, mais de façon en quelque sorte complémentaire: L'une imagine que l'on peut complètement dégager l'abstrait de l'empirique, et l'autre qu'on peut complètement débarrasser l'empirique de l'abstrait.

En résumé les deux notions de vérité purement abstraite et de réalité purement concrète sont toutes les deux trop schématiques, trop exclusives. Elles correspondent certainement, dans leur opposition idéale, à une certaine opposition de fait. L'abstrait s'oppose certainement au concret, le rationnel à l'empirique, le théorique à l'expérimental. Tant qu'on pouvait imaginer que les deux termes de cette opposition pouvaient être isolés l'un de l'autre et réalisés chacun pour soi, la situation semblait parfaitement nette, et paraissait ne pas recéler d'embûche. C'était donc là une vue trop sommaire. Mais par quoi la remplacer? Il est clair que la pensée ne peut renoncer à des notions aussi fondamentales. Celles-ci ne peuvent rester vides de sens. Et si elles ne sont pas réalisées sous des formes nouvelles, elles le resteront sous les formes anciennes. Il y a donc une impérieuse nécessité à retrouver une nouvelle formule d'accord, à recréer un nouveau modus vivendi. Mais où faut-t-il aller chercher un point d'appui?

Avant de passer à la seconde partie de mon exposé, qui s'efforcera de répondre à cette dernière question, permettez-moi d'intercaler ici une remarque. Le chemin que nous avons suivi pour faire voir que plusieurs des notions fondamentales sur lesquelles l'esprit s'appuie, et plus généralement ce qu'on pourrait appeler l'idéologie métascientifique, ne correspondent plus aux besoins actuels, ce chemin est certainement le chemin du mathématicien. Aussi n'ai-je peut-être pas suffisamment appuyé sur le fait que la question que nous traitons, malgré le jour un peu mathématique dont nous l'avons éclairée, est d'une portée tout à fait générale. Cette idéologie entoure et pénètre la pensée plus spécifiquement scientifique; souvent elle l'informe et l'oriente, et il serait bien malaisé de décider quand l'une finit et quand l'autre commence. Je n'en veux pour preuve que les deux citations qui ont ouvert notre débat. Il y a un point où la pensée la plus concrètement scientifique vient se heurter à ces questions générales.

D'autre part, nous avons surtout parlé jusqu'ici de vérité et de réalité, mais qu'il soit bien clair que ce sont au fond les rapports de toute théorie à son domaine expérimental dont il s'agit. Nous nous sommes arrêtés sur l'affirmation que l'on ne peut complètement isoler l'une de l'autre les notions de vérité abstraite et de réalité concrète, mais nous aurions pu dire tout aussi bien que le théorique et l'expérimental ne peuvent pas être réalisés isolé-

ment, non seulement dans la pratique de la recherche scientifique, mais dans leur essence même. Et la question qui reste ouverte, c'est d'arriver à se représenter comment ils se constituent simultanément et quelle est la structure qu'ils impriment, à eux deux, à notre connaissance. Il est à peine nécessaire d'observer que ce sont là des questions qui se posent à partir de toute autre science. En particulier, les derniers développements de la physique les ont déjà rejointes par d'autres voies.

Revenons maintenant à notre sujet et résumons la situation. Les faits semblent montrer que, malgré l'incomparable solidité de l'édifice mathématique, la spéculation mathématique n'est pas essentiellement différente de toute autre spéculation théorique, et que la vérité absolue ne l'habite pas. Même dans le domaine des mathématiques, l'idée d'une vérité absolue est une idée trop simple.

D'autre part, la signification du mot « réalité » est, elle aussi, problématique. Il n'y a pas de sensations toutes brutes, et qui nous apportent une réalité toute faite. Tout est d'abord enrobé dans l'espace et le temps qui constituent aussi la substance de ce que nous avons appelé des formes intuitives. La simple perception d'un objet est l'aboutissement d'une activité mentale essentiellement schématisante. Et toute tentative de pénétrer davantage dans la réalité de cet objet, à partir des données intuitives ou expérimentales, nécessite la création de nouveaux schémas. La mesure des distances, par exemple, est en fonction d'une construction géométrique sous-jacente qui oriente à la fois les manipulations et les calculs. Et, à mesure qu'on progresse dans la description de la réalité, cette description exige des concepts de plus en plus abstraits, pour aboutir par exemple aux notions d'entropie ou de probabilité d'existence. Le réel ne se laisse serrer de près qu'à l'aide de l'idéal et du schématique. Nous en revenons toujours au même point: l'abstrait et le concret, l'idéal et le réel, n'ont pas une existence parfaitement autonome: ils se définissent l'un par rapport à l'autre. Mais encore une fois, comment faut-il concevoir les modalités de leur genèse simultanée?

Mesdames et Messieurs, il nous faut tout d'abord nous rendre compte de ce que nous sommes en droit d'exiger. Et, pour avoir un point de comparaison, peut-être le plus simple est-il d'examiner comment l'une des vues que nous repoussons a bien pu prendre naissance. Ainsi, par exemple, l'idée platonicienne ou néo-platoni-

cienne, selon laquelle la réalité ne peut être, dans sa structure, que manifestation de la vérité — idée qui, d'ailleurs, pour plusieurs, n'appartient pas encore au passé. Comme j'ai eu déjà l'occasion d'en faire la remarque, la notion de vérité existant pour soi et indépendamment de toutes circonstances a sa source dans le succès de la déduction mathématique. La façon dont l'arithmétique et la géométrie se trouvent réalisées dans les choses devaient frapper avec force un esprit encore neuf. Le succès de la théorie rationnelle de la musique, sans parler des premières explications du système planétaire, devaient puissamment renforcer la croyance que l'étude des nombres et des figures pouvaient dévoiler les derniers mystères. Cette idée devait perdre ensuite de sa forme spécifiquement mathématique, et pénétrer plus ou moins profondément dans tous les compartiments de la pensée. Le point à retenir de ce processus est — me semble-t-il — le suivant: Les rapports à établir entre la vérité et la réalité furent aperçus nettement — du moins on le crut — en un endroit particulièrement adéquat. Une fois conçue, cette idée servit plus ou moins de schéma explicatif dans un domaine plus étendu.

L'histoire d'une théorie qu'on rejette peut être d'un précieux enseignement. Pour nous, la première chose à faire c'est également de rechercher le cas spécial et particulièrement favorable. J'espère que notre tentative ne perdra pas de son intérêt, lorsque je vous aurai dit qu'il n'est pas du tout nécessaire d'aller chercher ce terrain favorable dans les nouvelles théories, mais que la géométrie élémentaire y suffit parfaitement.

Pour base de notre discussion, nous allons choisir tout simplement la notion de droite telle qu'on l'introduit dans les premiers éléments. Chacun retrouvera dans ses souvenirs la façon dont cette notion lui a été suggérée. On propose à l'élève différents exemples, où on lui demande d'apercevoir la notion à définir: le faîte d'un toit, l'arête d'une règle à dessiner, ou, en dernière analyse, la trajectoire d'un rayon lumineux, la ligne de visée. On lui demande d'abstraire de ces différents exemples quelque chose qu'ils ont en commun, d'apercevoir en chacun d'eux une chose idéale, la droite géométrique. De même on lui demande d'imaginer un objet de plus en plus petit, plus petit encore que tout objet qu'il aurait déjà imaginé, pour conduire son esprit à la notion de lieu précis, de point géométrique. On lui demande encore d'apercevoir sur les exemples proposés, les premières propriétés de ces êtres abstraits,

les droites et les points. C'est là un acte de véritable création mentale qu'il faut se garder de diminuer. Supposons cet acte accompli, supposons les notions acquises. Nous dirons alors que les exemples dans lesquels on les a d'abord aperçues en sont des réalisations. Ainsi donc, la ligne de visée réalise dans le phénoménal la notion idéale de droite qui, elle, appartient au monde mental.

Remarquons bien que ce passage de la notion intuitive, de la ligne de visée, à la notion idéale, la droite, est quelque chose qui ne peut absolument pas être décrit. Une fois qu'on la conçu, on peut l'évoquer. Mais notre pouvoir d'explication ne va pas plus loin. Il y a là un fait d'une essence tout à fait sui generis.

Il n'est naturellement pas question de dire que la droite *est* dans la ligne de visée: on sait fort bien qu'il n'y a pas de trajectoire parfaitement droite. Et l'arête d'aucun corps ne peut fournir une réalisation en principe meilleure, puisque, si l'on descend à l'échelle atomique, la notion même d'arête s'évanouit dans l'indéterminé. Sans doute, ce sont les réalisations physiques qui nous ont suggéré les notions géométriques, mais on peut dire que c'est par le fait d'une connaissance imparfaite de la réalité, par un heureux malentendu, que nous avons accepté la suggestion. On rend en partie compte de ces circonstances en disant que la droite est une image schématique de la réalité. Dans un schéma, la réalité ne se trouve pas représentée dans tous ses détails, seuls certains traits sont conservés, et certains rapports évoqués. Un schéma n'est en aucune façon une représentation fidèle en un sens absolu: il n'est compréhensible que si on en possède la clef explicative. Ce qu'on exprimera en disant que l'adéquation du schéma à son objet est symbolique. Tous ces caractères se retrouvent dans le parallélisme existant entre la notion de droite et ses réalisations. C'est pourquoi nous appellerons « schématisation axiomatique » le processus mental dont elle est l'aboutissement. Axiomatique, parce que les premiers rapports qu'on aperçoit entre les éléments de ce schéma sont les axiomes de la géométrie.

On n'insistera jamais trop sur le fait que cette schématisation axiomatique s'accompagne d'une véritable transmutation des notions qui y participent. Nous dirons que, pour passer d'un sens à l'autre, il faut franchir un seuil d'axiomatisation. L'axiomatisation dédouble les notions qui lui sont soumises en un abstrait et un concret relatifs l'un à l'autre.

La notion idéale de droite géométrique n'a-t-elle rien gardé de ses origines intuitives? On peut faire ici une expérience de pensée aussi simple qu'instructive. On peut donner de la géométrie élémentaire (comme aussi des autres géométries) des modèles fort différents les uns des autres. L'un des plus simples s'obtient de la façon que voici: On appelle droite tout cercle passant par un point fixe choisi d'avance, et angle de deux droites l'angle des deux cercles que nous leur faisons ainsi correspondre, et ainsi de suite. On change les noms de toutes les notions de la géométrie, et il se présente que si l'on a su choisir ce déguisement, la géométrie ainsi masquée imite tous les gestes de la géométrie primitive. La géométrie entière peut être ainsi transposée, sans y changer un iota.

Y a-t-il des raisons de préférer l'un de ces modèles à tout autre? En quoi diffèrent-ils et qu'ont-ils en commun? Il est peut-être plus facile de découvrir tout d'abord ce qu'ils ont en commun. Dans ce but, il faut rechercher ce qu'on pourrait apercevoir d'identique dans les uns et les autres. La chose ne comporte pas de difficultés extraordinaires. Voici comment on procédera:

On va envisager les notions fondamentales, la droite, le point, etc., sous un aspect encore plus dépouillé. On va dire: Je ne veux retenir de la droite que le fait d'être un certain objet d'une certaine catégorie, dont je ne veux connaître d'avance aucune propriété. Et de même pour les points. Lorsque une droite A devra contenir un point a, je dirai maintenant que A et a sont dans une certaine relation, qui n'aura plus aucune signification intuitive, donc une relation de seule logique. Les axiomes indiqueront d'eux-mêmes comment ces relations sont à traiter et comment il faut les combiner. La géométrie tout entière est alors un édifice de relations logiques, où interviennent la relation J qui correspond à l'incidence d'un point et d'une droite, la relation P qui correspond au parallélisme de deux droites, et ainsi de suite. Sous ce nouvel aspect, deux modèles différents de notre géométrie ne peuvent naturellement plus être distingués l'un de l'autre. Ce qu'ils ont en commun, c'est donc la structure logique.

Mais je ne sais si vous avez observé une ressemblance assez frappante entre ce que je viens de dire, du passage aux relations logiques, et ce que je disais tout à l'heure du passage aux notions de la géométrie. Je demandais qu'on veuille bien apercevoir une même notion idéale, la droite, dans des images intuitives différentes,

et maintenant je demande qu'on aperçoive une même relation logique dans des relations géométriques différentes. Je demande qu'on veuille bien faire abstraction de certaines différences que nous savons distinguer pour imaginer une identité idéale, d'un genre plus abstrait encore.

Vous devinez maintenant où j'en veux venir: l'introduction des relations logiques n'est pas autre chose qu'une nouvelle schématisation axiomatique. Pour passer du géométrique au logique, il faut franchir un nouveau seuil d'axiomatisation. Tout à l'heure, le géométrique était un abstrait par rapport à l'intuitif. Maintenant c'est un concret par rapport au logique. Abstraction il y a un instant, c'est maintenant une réalisation d'un abstrait plus subtil.

En franchissant ce nouveau seuil d'axiomatisation, les notions géométriques ont perdu une partie de ce que l'on pourrait appeler leur substance, tout ce qui est forme, tout ce qui rappelle le monde des sens ou des phénomènes. En un mot, ce sont justement les caractères qu'on s'accorde à nommer spécifiquement géométriques, qui ne trouvent pas accès dans le domaine de la logique.

C'est en revanche dans ce que l'axiomatisation a fait disparaître qu'il faut chercher ce qui fait l'individualité de l'un ou de l'autre de nos modèles. Par conséquent, si l'on veut savoir où se fonde l'idée du géométrique, ce n'est pas du côté de la logique qu'il faut regarder, où il n'y en a plus trace; c'est dans l'autre direction, vers l'intuitif. Le géométrique a sa sphère d'existence comprise entre la première axiomatisation, qui lui faisait un visage abstrait face au côté intuitif de notre connaissance, jusqu'à la seconde qui en faisait un concret face au côté purement logique. C'est dans ce double rôle que s'épuise la signification du mot géométrie. En résumé, les notions géométriques sont des images idéales appuyées sur le réel objectif, des représentations schématiques dont le sens n'est intelligible qu'en tenant compte des réalités qu'elles visent. Il n'y a pas de droite sans la connaissance préliminaire de certaines réalisations plus ou moins grossières; l'idée de droite ne peut être complètement isolée de ces images intuitives. La distinction entre abstrait et concret n'est donc pas un fait existant de par lui-même. Cette opposition est le fait d'une méthode de notre esprit, lorsqu'il recherche la connaissance, méthode qu'on aurait tout lieu de nommer méthode axiomatique.

Il me faut encore ajouter un trait au tableau que je suis en train de dresser. Je vous ai montré les notions de la logique succédant à celles de la géométrie dans le processus axiomatique qui va vers l'abstrait. Il va sans dire que la géométrie n'est pas le seul champ de réalisation possible pour les relations de la logique, mais ceci est un détail sans importance pour ce que nous avons en vue. Le trait que je voudrais ajouter se rapporte aux notions intuitives qui précèdent les notions de la géométrie: les notions d'arête d'un corps, de ligne de visée, etc. Ces notions appartiennent à ce qu'on pourrait appeler la sphère de l'objet, au même titre que celles, par exemple, de maison ou de cheval. Est-il possible de distinguer, dans la façon dont elles se constituent, un processus qui rappelle notre axiomatisation? La réponse est déjà contenue dans ce que j'ai eu l'occasion de dire de la notion de l'objet chez les petits enfants: elle est nettement affirmative. Toutes les explications que j'ai données à ce moment-là concourraient à faire voir que la notion même de l'objet est abstraite d'un concret, concret représenté par les sensations diverses dans lesquelles il s'agit d'apercevoir une permanence idéale, celle de l'objet.

Il en va de même des concepts tels que ceux de maison, de plante ou de cheval, par exemple. Le concept de maison, que nous ne choisissons entre tous que pour fixer les idées, ne se définit certainement pas au sens aristotélicien, en énumérant sans en oublier une, toutes les propriétés distinctives que la maison doit posséder: qu'elle a des murs et un toit, des fenêtres, et une porte au moins, etc. L'une ou l'autre de ces propriétés peut manquer, sans que la chose décrite cesse d'être une maison véritable. A la rigueur, on pourrait imaginer une maison sans fenêtre et une maison sans porte, dans laquelle on entrerait par la fenêtre, et ainsi de suite. Non, l'énumération des qualités soi-disant distinctives n'est pas la voie par laquelle le concept en question s'est formé. Au contraire, on peut admettre que, de la connaissance de telle et telle maison, l'esprit a dégagé, a abstrait un certain *type,* aux contours plus ou moins fixes, à la signification plus ou moins rigide. Un objet est reconnu comme étant une maison, s'il est suffisamment conforme à ce type, l'appréciation de la conformité pouvant d'ailleurs varier selon les circonstances. Le type est, dans la sphère de l'objet, la notion idéale, abstraite, et les individus qui ont concouru à la formation de ce type, ou qui lui sont par la suite re-

connus conformes, en sont les réalisations. De ce point de vue, la notion de type paraît prendre dans les sciences énumératives ou descriptives, la même position de principe, la même vertu explicative que les notions géométriques dans les sciences dites exactes.

Jetons maintenant un rapide regard sur ce que nous venons de faire. Nous avons encadré l'axiomatisation qui donne naissance aux notions géométriques de deux axiomatisations, l'une qui la précède et qui donne naissance aux concepts des différents objets, l'autre qui lui succède et par laquelle les notions de la logique se constituent en objets de pensée autonomes. A trois étages différents de la pensée, nous avons reconnu que ce qui vient s'inscrire dans notre connaissance, ce n'est certainement pas une reproduction directement fidèle du monde extérieur; ce qui est inscrit dans notre esprit, c'est au contraire un étagement d'images schématiques, sommaires et provisoires. Dans les trois cas, la connaissance même de la réalité prenait la voie marquée par les mots: abstraction, schématisation et axiomatisation.

Nous avions dit: Il nous faut tout d'abord apercevoir sur un point favorable ce que nous pourrions mettre à la place de l'idée trop simple qui oppose les deux termes: vérité et réalité. C'est ce que nous venons de faire: à trois reprises. Et je ne pense pas qu'il soit encore nécessaire de souligner combien le processus de la schématisation axiomatique tel que je viens de l'exposer, dépasse le cadre étroit des opinions traditionnelles. La formulation d'un axiome n'est ni l'expression d'une vérité transcendante, ni une définition arbitraire: C'est, au contraire, une opération qui descend profondément dans la description du réel, et qui, en le saisissant, lui donne l'empreinte, à la fois idéale et provisoire, qui convient à la structure de notre esprit.

Et de même que le domaine de la géométrie resterait toujours fermé à celui qui se refuserait à en imaginer les notions fondamentales, à créer par son propre effort les images qu'on cherche à lui suggérer, de même je ne crois pas qu'une enquête sincère, sur ce que le mot de réalité peut signifier, puisse éviter l'effort qu'exige la nette conception de la méthode axiomatique que nous venons d'esquisser très sommairement.

Maintenant, d'ailleurs, le point essentiel est atteint. Le reste de notre tâche est marqué d'avance. Nous aurions à nous rendre compte si l'idée nouvellement acquise doit rester enfermée dans le

domaine qui lui a donné naissance, ou bien si elle convient aussi à d'autres domaines de la pensée. Or, rien ne s'oppose à ce que notre méthode fasse rapidement tache d'huile. Les autres parties des mathématiques tout d'abord peuvent facilement être placées sur la même base. On rejoint ainsi tout naturellement les vues de Helmholtz sur l'origine empirique de l'arithmétique, auxquelles j'ai déjà fait allusion. Et quant à la logique ordinaire, nous avons à peine à revenir sur ce que nous en avons déjà dit. *Voir* dans les règles de la logique une extension des lois de la physique de l'objet quelconque, c'est précisément faire le pas décisif pour l'engendrer selon notre méthode. Bien plus: le passage de la logique ordinaire à la logique modifiée qui permet d'éviter les antinomies, est rigoureusement et strictement une schématisation axiomatique à partir de la logique d'Aristote. La notion d'élément logique est l'abstrait dont le concret relatif est l'objet au sens d'Aristote.

On se dirige ensuite vers la physique, par une pente toute naturelle. Notre méthode a précisément donné aux mathématiques élémentaires l'aspect d'un chapitre de la physique; à la logique l'aspect d'une théorie de l'objet; à l'arithmétique celui d'une théorie des groupements et des permutations de plusieurs objets; à la géométrie celui d'une théorie de l'espace sensible ou de l'espace physique. Sur la base de notre méthode, la voie s'ouvre tout naturellement à la compréhension des géométries non-euclidiennes, théories elles aussi du même espace. Le fait que ces différentes géométries sont également vraies du point de vue mathématique, c'est-à-dire qu'elles sont également non-contradictoires, ne préjuge en aucune façon de leur plus ou moins grande efficacité pour la représentation de l'espace des phénomènes.

Et puisque nous venons de rencontrer à nouveau la vérité mathématique, qu'il me soit permis d'ajouter une brève remarque. Les notions du vrai et du faux se retrouvent dans la reconstruction axiomatique de la logique ordinaire. Mais ces notions ont perdu leur redoutable visage d'absolu: elles aussi, elles ont pris la forme de notions idéales et schématiques, abstraites des concordances et des discordances de la sphère intuitive. Elles continuent alors à vivre d'une vie un peu diminuée et ramenée à l'échelle humaine.

Pour en revenir à la physique, il n'y a qu'un pas à faire pour passer de la géométrie à la cinématique, que celle-ci soit classique ou einsteinnienne. Les cinématiques sont en effet des théories de

l'espace-temps, absolument comme les géométries sont des théories de l'espace tout court. On pourrait continuer de la sorte, mais on peut aussi immédiatement envisager les choses d'un point de vue plus général. Au même titre que la géométrie vis-à-vis de nos représentations intuitives, toute théorie rationnelle est au matériel d'observations qui la supporte, dans la relation axiomatique d'un abstrait au concret de ses réalisations. Des sciences dites exactes, on peut passer aux sciences plus spécialement descriptives et énumératives. L'introduction de la notion de type, dont j'ai déjà parlé, permet aussi de les apercevoir dans la position axiomatique.

Le cycle des incarnations de notre méthode n'est pas encore complet. Il y a un autre problème qui est tout proche de celui de la signification des notions mathématiques ou généralement des notions scientifiques: c'est le problème de l'efficacité du langage, le problème de l'adéquation des mots aux choses. Encore ici, les mots sont des abstraits selon la méthode de la schématisation axiomatique. Et ce n'est pas sans un certain saisissement que l'on voit alors la notion même de l'être tomber de son piédestal, dans la foule des notions imparfaites et sommaires.

Ainsi de proche en proche, on reconnaît dans tout ce qui est expression et objet de cette expression, pensée et objet de la pensée, connaissance et objet de la connaissance, le dualisme dont nous avons aperçu le modèle dans la géométrie élémentaire. Dans tous les domaines et à tous les étages, l'activité de notre esprit lorsqu'il tend à la connaissance, reste profondément identique à elle-même.

Et enfin, veuillez observer que mes explications elles aussi, n'échappent pas à cette règle. Je vous demande de ne pas vous laisser arrêter par les différences certaines qu'il y a entre la fonction du langage ordinaire, et celle du langage des symboles des mathématiciens, ou entre la formation de nos connaissances intuitives et l'érection de la théorie qui en est la plus éloignée. Je vous demande de faire abstraction de ces différences, et de concevoir une identité qui leur soit commune à tous. . . . Vous reconnaissez ici même l'image de la schématisation axiomatique.

Et je ne saurais formuler de conclusion plus frappante que celle-ci: *Même les explications que je vous ai données apportent leur témoignage en faveur des vues que j'ai formulées.*