1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Freitag, 30. August 1929

Präsident: Prof. Dr S. Bays (Fribourg)
Aktuar: Prof. Dr. W. Saxer (Zürich)

1. S. Bays (Fribourg). — *Sur un théorème de Viggo Brun et l'intervalle entre deux nombres premiers consécutifs.*

On sait que la série des inverses de tous les nombres premiers diverge. Viggo Brun a prouvé en 1919 le théorème important: La série des inverses des nombres premiers *jumeaux* (distants de 2):
$1/3 + 1/5 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/19 + 1/31 + \ldots$
converge.[1]

Il se trouve que la démonstration de Brun, exposée par Landau, est entièrement indépendante du nombre 2, intervalle entre les nombres premiers jumeaux. En reprenant cette démonstration pas à pas, elle marche sans plus de difficultés avec l'intervalle $2\,n$ qu'avec 2.

Eu égard en particulier à l'affirmation suivante de A. de Polignac (Nouvelles Ann. Mathem. 1849): *Chaque nombre pair intervient comme intervalle entre les nombres premiers consécutifs et une infinité de fois,* l'intérêt de la démonstration de Brun est le même pour l'intervalle $2\,n$ que pour l'intervalle 2. Autrement dit: les suites de couples de nombres premiers consécutifs distants de 4, ou de 6, ou de 8, etc., ont le même intérêt que celle des nombres premiers distants de 2.

J'ai étudié momentanément jusqu'à 20.000 l'intervalle entre les nombres premiers consécutifs. Appelons, $\varrho_{2n}(x)$ la fonction qui donne, dans la suite des nombres premiers consécutifs jusqu'à x, le nombre des intervalles égaux à $2\,n$. Bien qu'il soit difficile d'affirmer, en particulier dans cette question des nombres premiers, je reprends d'abord sans aucune crainte d'erreur, l'affirmation de Polignac: *Chaque* $\varrho_{2n}(x)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, *est positive et croît indéfiniment avec* x.

On sait d'ailleurs déjà, et la preuve en est presque immédiate, que l'intervalle entre deux nombres premiers consécutifs peut devenir arbitrairement grand.

Ensuite les deux fonctions $\varrho_2(x)$ et $\varrho_4(x)$ paraissent coïncider dans leurs valeurs d'une façon vraiment exceptionnelle; si elles peuvent

[1] Voir Landau: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, 1927, p. 71—78.

se représenter approximativement par une expression analytique, élémentaire ou non, comme $\pi(x)$ l'est par $\dfrac{x}{\log x}$ ou $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\log x}$, ce doit être la même expression pour les deux fonctions. Par contre $\varrho_6(x)$ est certainement une fonction plus grande. D'autre part, il y a une chute marquée de la fonction à chaque multiple de 6; par contre, excepté dans le cas $n = 1$, elle garde des valeurs sensiblement égales pour les indices $6n$, $6n-2$ et $6n-4$; l'expression analytique approximative, si elle existe, pourrait donc peut-être être la même pour $\varrho_{6n}(x)$, $\varrho_{6n-2}(x)$ et $\varrho_{6n-4}(x)$, excepté pour $n = 1$.

Concernant l'arrangement des intervalles successifs entre les nombres premiers consécutifs, j'ai un premier théorème facile à établir: les intervalles de la forme $6n$, soit 6, 12, 18..., peuvent chacun se répéter immédiatement; ceux des formes $6n-2$ et $6n-4$, jamais.

2. E. Schubarth (Basel). — *Topologische Differentialinvarianten von Flächengeweben.*

$\Phi(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 0$ definiert in einem Gebiet, wo $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau_i} \neq 0$, ein Flächengewebe, d. i. ein System von vier Flächenscharen $\tau_i =$ konst., von denen je drei ein Koordinatennetz bilden. Es sollen die topologischen Differentialinvarianten eines Gewebes bestimmt werden. Dazu sind zu betrachten

I. die „topologischen" Transformationen $\overline{T} : \tau_i = \tau_i(\overline{\tau}_i)$ (die Funktionen τ_i umkehrbar eindeutig, umkehrbar stetig und differenzierbar soweit nötig),

II. die „Umnormierungen" $T^* : \Phi^* = \lambda\, \Phi$, wo $\lambda(\tau_1, .., \tau_4) \neq 0$ im Gewebegebiet.

Mit den Bezeichnungen $\Phi_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau_i}$, $\Phi_{ik} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau_i\, \partial \tau_k}$, $\varepsilon_{ik} = \dfrac{\Phi_{ik}}{\Phi_i \Phi_k}$;

$\Gamma_i = \dfrac{1}{\Phi_i} \dfrac{\partial}{\partial \tau_i}$, $\Lambda_{ik} = \Gamma_i - \Gamma_k$, i, k, l, m verschieden $= 1, 2, 3, 4$,

findet man als Hauptergebnisse:

1) 3 relative Invarianten 2. Ordnung: $\nu_{12,\,34}$, $\nu_{23,\,14}$, $\nu_{31,\,24}$, wo $\nu_{ik,\,lm} = \varepsilon_{il} - \varepsilon_{im} - \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{km}$ gesetzt ist, mit

(1) $$\nu_{12,\,34} + \nu_{23,\,14} + \nu_{31,\,24} = 0.$$

Das Verschwinden *einer* Invarianten $\nu_{ik,\,lm}$ ist mit der Existenz einer Diagonalflächenschar *(ik, lm)* äquivalent [d. h. die Schnittkurven $C_{ik} \left\{ \tau_i = \text{konst.},\ \tau_k = \text{konst.} \right\}$ lassen sich zu Flächen zusammenfassen, die zugleich aus Kurven C_{lm} aufgebaut sind], das Verschwinden *aller* kennzeichnet die Achtflachgewebe [so heisst das topologische Bild eines Gewebes aus vier Scharen paralleler Ebenen]. Damit ist ein analytischer

Beweis gegeben für den Satz von Blaschke: Die Achtflachgewebe sind dadurch gekennzeichnet, dass die Schnittkurven der Gewebeflächen sich auf Kurvennetze in drei Diagonalflächenscharen verteilen. Wegen (1) genügt bereits die Existenz zweier Diagonalflächenscharen zur Kennzeichnung der Achtflachgewebe.

2) 4 relative Invarianten 3. Ordnung: $\varrho^4 = \Lambda_{12}\,\varepsilon_{12} + \Lambda_{23}\,\varepsilon_{23} + \Lambda_{31}\,\varepsilon_{31}$ und die, die sich daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben, mit

$$\varrho^1 - \varrho^2 + \varrho^3 - \varrho^4 = 0. \tag{2}$$

$\varrho^i = 0$ kennzeichnet die Schnittkurvengewebe in den Flächen $\tau_i =$ konst. als Sechseckgewebe [so heisst das topologische Bild eines Gewebes aus drei Scharen paralleler Geraden].

Aus $\nu_{ik,\,lm} = 0$ folgt $\varrho^i = \varrho^k$, aus $\nu_{12,\,34} = \nu_{23,\,14} = \nu_{31,\,24} = 0$ folgt $\varrho^1 = \varrho^2 = \varrho^3 = \varrho^4 = 0$. Allgemein sind durch das Verschwinden der relativen Invarianten (im gesamten Gewebegebiet) die wesentlich verschiedenen Möglichkeiten zu kennzeichnen, die Gewebefunktion durch passende Normierung in eine Summe von Funktionen von weniger als 4 Variablen zu zerlegen, insbesondere ist $\nu_{ik,\,lm} = 0$ äquivalent mit der Normierungsmöglichkeit $\Phi^* = F\,(\tau_i, \tau_k) + G\,(\tau_l, \tau_m)$.

Aus den Relationen zwischen den relativen Invarianten folgen geometrische Sätze, hauptsächlich

aus (1): Ein Gewebe mit zwei Diagonalflächenscharen enthält auch eine dritte;

aus (2): Sind die Schnittkurvengewebe in drei Scharen von Gewebeflächen Sechseckgewebe, so auch in der vierten.

Falls nicht alle $\nu_{ik,\,lm}$ verschwinden, findet man

3) Absolute Invarianten 2. Ordnung: eine, 3. Ordnung: sechs, 4. Ordnung: elf; sie bilden ein vollständiges System von absoluten Invarianten bis zur 4. Ordnung. Mittels der absolut invarianten Operatoren $\dfrac{1}{\nu_{ik,\,lm}}\,\Lambda_{rs}$ $(r, s = 1, 2, 3, 4;\ r \neq s)$ erhält man aus vorgelegten absoluten Invarianten solche von höherer Ordnung.

Eine ausführliche Darstellung der Theorie erscheint in den Abhandlungen aus dem math. Seminar der Universität Hamburg. Vgl. auch Blaschke und Dubourdieu, Abh. Hamburg 6 (1928), S. 198, Dubourdieu, C. R., Paris 188 (1929), p. 842.

3. H. Brandt (Aachen). — *Primidealzerlegung in einer Dedekindschen Algebra.*

In einer Dedekindschen Algebra kann ein ganzes Ideal im allgemeinen auf sehr verschiedene Weisen als Produkt von Primidealen dargestellt werden. Es soll die Aufgabe gelöst werden, die Anzahlen für diese Zerlegungen zu bestimmen.

Ist $\mathfrak{p}$ in einer maximalen Ordnung $\mathfrak{o}$ einer einfachen Dedekindschen Algebra gleichseitiges irreduzibles Ideal (zweiseitiges Primideal) und s

eine beliebige natürliche Zahl, so wollen wir uns auf Ideale $\mathfrak{a}$ beschränken, welche in $\mathfrak{p}^s$ aufgehen.

Diese Ideale können sämtlich durch Analyse des Restsystems $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{p}^s$ gefunden werden, das nach Herrn Speiser aus der Gesamtheit der Matrizen eines gewissen Grades k besteht, deren Elemente von der Form $a_0 + a_1 \pi + \ldots + a_{s-1} \pi^{s-1}$ sind, wo π eine durch $\mathfrak{p}$ aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare Zahl bezeichnet und die a_i unabhängig voneinander ein gewisses Teilsystem von Zahlen aus einem beliebigen Restsystem von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{p}$ durchlaufen, das nach $\mathfrak{p}$, aber i. a. nicht mehr nach $\mathfrak{p}^2$ ein Galoisfeld bildet, dessen Ordnung durch p^g bezeichnet werden möge.

Dies Restsystem $\mathfrak{R}$ zeigt die bemerkenswerte Eigenschaft, dass seine ein- oder zweiseitigen Ideale sämtlich Hauptideale sind. Daher kann ein solches Ideal $\mathfrak{a}$ selbst durch eine Matrix A repräsentiert werden.

Für die Matrix A möge der Rang nach $\mathfrak{p}^i$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ durch r_i bezeichnet werden. Wird noch $r_0 = 0$, $r_{s+1} = k$ gesetzt, so sind die Differenzen $r_{i+1} - r_i = t_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots s)$ nicht negativ. Diese Zahlen r_i oder t_i erweisen sich als fundamental für alle Eigenschaften des Ideals $\mathfrak{a}$. Sie bestimmen die Anzahl der Restklassen (Norm), in welche die Ordnung $\mathfrak{o}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ zerfällt, ferner die Art der primären Komponenten, als deren kleinstes Multiplum $\mathfrak{a}$ dargestellt werden kann, endlich auch die Anzahl der Primidealzerlegungen sowie die Anzahl der verschiedenen Ideale mit denselben Rangzahlen.

Für diese letzte Anzahl findet man den Wert

$$N_{t_0 t_1 \ldots t_s} = \frac{P_k}{P_{t_0} P_{t_1} \ldots\ldots P_{t_s}} \, p^{gh}, \text{ wo zur Abkürzung}$$

$$h = \sum_{i+j<s} j t_i t_{i+j}, \quad P_t = \left(1 - \frac{1}{p^g}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{1}{p^{tg}}\right) \text{ für } t > 0 \text{ und } P_0 = 1$$

gesetzt ist. Daraus ergibt sich dann das Hilfsmittel für die Bestimmung der Anzahl der Primidealzerlegungen in einer Rekursionsformel

$$\frac{p^{gk} - 1}{p^g - 1} \cdot N_{t_0 t_1 \ldots t_s} = \sum c_{t'_0 t'_1 \ldots t'_s} N_{t'_0 t'_1 \ldots t'_s},$$

welche man erhält, wenn man den sämtlichen Idealen mit den Rangzahlen r_i auf allen möglichen Weisen noch einen Primfaktor hinzufügt und die Summe über alle Zahlensysteme t'_i zu erstrecken ist, welche sich nur dadurch von den t_i unterscheiden, dass ein positives $t_{\lambda-1}$ um 1 verkleinert und das folgende t_λ um 1 vergrössert wird, während der zugehörige Koeffizient den Wert

$$c_{t'_0 t'_1 \ldots\ldots t'_s} = p^{g(t_\lambda + \ldots t_s)} \frac{p^{g(t_\lambda + 1)} - 1}{p^g - 1}$$

hat und λ alle Werte 1, 2, . . . s annimmt, für welche $t_{\lambda-1}$ positiv ist (oder r_λ von $r_{\lambda-1}$ verschieden ist). Dabei ist s so gross angenommen, dass die letzten Rangzahlen sich nicht mehr ändern, so dass t_s verschwindet.

Wendet man diese Formel für hinreichend grosses s wiederholt an, so kann man schrittweise alle Ideale bestimmen, welche in 2, 3 oder mehr Primfaktoren zerfallen. Jedes Ideal erscheint mit einer gewissen Vielfachheit, welche gerade die gesuchte Zerlegungsanzahl ist.

Ist $k = 2$, so wird die Anzahl der Primidealzerlegungen für alle Ideale, welche in r Primfaktoren zerfallen, stets durch alle möglichen Abschnitte der Reihe

$$1 + \sum_t \binom{r}{t-1} \frac{r - 2t + 1}{t} p^{tg}$$

gegeben, welche so weit fortzusetzen ist, als die Glieder positiv bleiben.

Für grösseres k werden die Ausdrücke komplizierter. Wir geben hier nur die einfache Formel an für Ideale, welche kleinste Vielfache von r Primidealen sind. Man erhält für $r \leqq k$ die Formel

$$1 \cdot (1 + p^g)(1 + p^g + p^{2g}) \ldots\ldots (1 + p^g + p^{2g} + \ldots\ldots + p^{(r-1)g})$$

Derartige Ideale lassen sich auch auf verschiedene Weisen als Vielfache darstellen. Das Studium der hier auftretenden Anzahlen und Verteilungen führt auf kombinatorische Probleme von der Art, wie sie Steiner aufgestellt hat (Journal für r. und ang. Math. 45 [1853] S. 181).