

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della
Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 108 (1927)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Freitag und Samstag, 2. und 3. September 1927

Präsident: Prof. FERD. GONSETH (Bern)

Aktuar: Prof. S. BAYS (Fribourg)

1. A. WEINSTEIN (Rome). — *Sur l'extension d'un principe analytique avec des applications à l'hydrodynamique.*

L'auteur n'a pas envoyé de résumé de sa communication.

2. L.-GUSTAVE DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Sur un théorème d'Hurwitz.*

L'auteur s'est proposé de déterminer, dans le corps $\{Hm\}$ des quaternions hamiltoniens à coordonnées rationnelles, tous les groupes additifs et multiplicatifs possibles. Il a traité ce problème par deux méthodes, l'une basée sur la théorie des substitutions, l'autre sur les propriétés des modules de nombres. L'auteur indique la base du domaine holoïde le plus général formé à l'aide de quatre quaternions du corps $\{Hm\}$ linéairement indépendants. Comme première application, il démontre que pour arriver au domaine hurwitzien dont la base est

$$i_1, i_2, i_3, \frac{1 + i_1 + i_2 + i_3}{2},$$

savoir à l'ensemble des quaternions hamiltoniens

$$\frac{m_0}{2} + \left(\frac{m_0}{2} + m_1\right) i_1 + \left(\frac{m_0}{2} + m_2\right) i_2 + \left(\frac{m_0}{2} + m_3\right) i_3$$

obtenus quand m_0, m_1, m_2 et m_3 parcourent indépendamment l'un de l'autre toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, il suffit de postuler dans le module, outre les nombres complexes entiers de Gauss, encore *une* unité relative, p. ex. i_2 ; c'est la condition nécessaire et suffisante.

Comme deuxième application, l'auteur indique deux théorèmes relatifs aux groupes contenus dans le corps $\{Hm\}$. Il généralise le théorème d'Hurwitz en remplaçant le dénominateur 2 par un nombre quelconque. La généralisation la plus simple aboutit au domaine ayant comme base

$$1, i_1, ai_2, \frac{a + ai_1 + bi_2 + i_3}{2a},$$

à condition que a et b soient solutions de l'équation de Fermat

$$b^2 - 2na^2 = -1,$$

où n est un nombre entier. Par exemple

$$\left(\frac{m_3}{2} + m_0\right) + \left(\frac{m_3}{2} + m_1\right)i_1 + \left(\frac{41}{58}m_3 + 29m_2\right)i_2 + \frac{m_3}{58}i_3,$$

les quatre m_r ayant la signification susmentionnée.

Une note sur les recherches de l'auteur dans ce domaine a paru dans les *Comptes Rendus* des séances de l'Académie des sciences de Paris, t. 184, p. 59, séance du 10 janvier 1927.

3. A. HEYER (St. Gallen). — *Ueber geometrische Oerter an konfokalen Kegelschnitten.*

In allen Aufgaben bedeutet A einen Hauptscheitel, B einen Nebenscheitel, F einen Fokus, c die lineare Exzentrizität. Zentrum = Ursprung des Systems.

I. Gegeben sei eine Schar konfokaler Kegelschnitte. In F sei das Lot zur Hauptachse errichtet, in den Schnittpunkten desselben mit den Kurven seien die Tangenten angelegt und von F die Lote auf die Tangenten gefällt. Gesucht ist der geometrische Ort für die Fusspunkte.

$$y = \pm (c - x) \sqrt{\frac{x}{2c - x}} \text{ (Gerade Strophoide)}$$

II. Gegeben sei eine Schar konfokaler Ellipsen. In jeder ziehe man von B aus die Fokusehne. Dann ziehe man von B aus die Parallele zur Hauptachse, vom andern Endpunkt aus die Parallele zur Nebenachse und bestimme den Schnittpunkt dieser Geraden. Man erhält

$$y = \pm c \sqrt{\frac{2(x - c)}{2c - x}} \text{ („Schützenbogen“ nach Newman)}$$

$$\text{Asymptote: } x = 2c$$

$$\text{Inflexionspunkt: } x = \frac{5c}{4} \quad y = c \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{In } F \text{ ist } c = -c$$

III. In einer Schar konfokaler Ellipsen ziehe man in jeder von B aus eine Fokusehne und bestimme deren Pol in bezug auf den konzentrischen Kreis mit $r = a$. Gesucht ist der geometrische Ort des Pols.

$$x^2 + y^2 = \frac{xy^2}{c} \text{ (Kurve von Longchamps)}$$

$$\text{Asymptote: } x = c$$

$$\text{Tiefster Punkt: } x = y = 2c$$

$$\text{Inflexionspunkt: } x = 4c$$

IV. Gegeben ist eine Schar konfokaler Ellipsen. In jeder zieht man von einem Nebenscheitel eine Fokussehne und von einem Endpunkt des zugehörigen Parameters den Durchmesser. Man bestimme den geometrischen Ort des Schnittpunktes dieser Geraden.

$$y = \pm \frac{(c - x)^2}{\sqrt{c(2x - c)}}$$

$$\text{Asymptote: } x = \frac{c}{2}$$

$$\text{Im Fokus } s = \frac{c}{2}$$

V. Gegeben eine Schar konfokaler Ellipsen. Man verbinde A mit B und fälle vom Zentrum das Lot auf AB . Gesucht ist der geometrische Ort des Fusspunktes dieser Lote.

$$(y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 y^2$$

$$r = c \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^4 \varphi - 1}}$$

$$\text{Asymptoten: } x = \pm y$$

$$\text{Inflexionspunkt: } x = \frac{c}{3} \sqrt{2} \quad y = \frac{2}{3} c$$

$$\text{Im Zentrum: } s = -\frac{c}{2}$$

4. J. KIRMSE (Schmölln-Thüringen). — *Die Idealtheorie der Liouvilleschen Integritätsbereiche der Quaternionenzahlen.*

Die Arbeit ist ein ins Einzelne entwickelter Teil einer allgemeinen Theorie der endlichen Rationalitätsbereiche in Quaternionen und gibt die vollständige Theorie der Integritätsbereiche und Diskriminanten Δ , der Ideale und deren Multiplikation und Primproduktdarstellung. Sie ist gegründet auf die zahlen- und idealtheoretischen Begriffsschöpfungen und Beweismethoden von Gauss, Kummer, Dirichlet, Dedekind, Minkowski, Hurwitz, Landau. Berührt, aber nicht verwandt werden Methoden und Sätze von E. Noether, L. G. du Pasquier, A. Speiser, H. Brandt, Dickson, Wedderburn, von denen zur Zeit der Entstehung nur die Arbeiten der erstgenannten beiden Autoren dem Verfasser bekannt gewesen sind.

Es ist dargestellt die Theorie der Rationalitätsbereiche mit den Liouvilleschen Formen $\xi_0^2 + s_1 \xi_1^2 + s_2 \xi_2^2 + s_3 \xi_3^2$; $s_1 s_2 = s^2 s_3$ als Relativnormenformen, welche bis auf Isomorphismen zugleich alle quaternionären quadratischen Formen mit Komposition in sich schliessen. Es werden zunächst alle umfassendsten Integritätsbereiche über dem Bereich aller durchaus ganzen Quaternionen dargestellt und abgezählt, zu welchen Ergebnissen die Theorie der algebraischen quadratischen Zahl-

körper verhilft. Alsdann werden die Diskriminanten bestimmt und für die weitere Untersuchung handliche Isomorphiegesetze gefunden.

Die Theorie der Ideale gründet sich auf die wesentliche Wahrheit, dass es rechts- und linksseitige Ideale gibt und dass die Ideale eines Integritätsbereiches in ganz bestimmter Weise von anderen umfasst werden und wieder andere umfassen. Primideale werden nur von sich selbst und vom Einheitsideal umfasst oder geteilt. Grundbegriff ist die Relativnorm $n(\mathfrak{A})$ eines Ideals \mathfrak{A} als Produkt des Zahlenumfanges in den Zahleninhalt desselben, der grössten positiven Rationalzahl, welche alle Quaternionen des Ideals teilt, in die kleinste positive Rationalzahl des Ideals. Ein Ideal vom Zahlenumfang 1 heisst primitiv. Die Primideale sind primitive Ideale, deren Relativnormen natürliche Primzahlen sind. Die Primär Ideale haben Primzahlpotenzen als Relativnormen. Die Abzählung der primitiven und die Anzahlbestimmung aller Ideale gegebener Relativnorm α gelingen durch eine Verallgemeinerung des Hurwitzschen Zuordnungssatzes. Die Anzahlen sind $\vartheta(\alpha)$ und $\Theta(\alpha)$, und es ist

$\vartheta(\pi^\nu) = 1$; $0(\nu = 1; \nu \nmid 1)$; $\Theta(\pi^\nu) = 1$ für eigentliche Diskriminantenteiler;

$\vartheta(\pi^\nu) = \pi^{\nu-1}(\pi + 1)$; $\Theta(\pi^\nu) = \sum \delta$; $\delta =$ alle positiven Teiler von π^ν

für Primzahlen π , welche die reduzierte Diskriminante $2^{-4} \Delta$ nicht teilen. Die Abzählfunktionen zusammengesetzter Relativnormen α sind die Produkte der Funktionswerte der maximalen Primpotenzen in α . Zweiseitig sind die Zahlenideale (α) , welche durch eine natürliche Zahl erzeugt werden, ferner die Ideale, deren Relativnormen allein durch eigentliche Diskriminantenteiler geteilt werden und die Produkte dieser beiden Arten. Einseitig sind alle anderen Ideale.

Jedes Ideal \mathfrak{A} ist eindeutig darstellbar als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von Primär Idealen. Diese Darstellung ist absolut eindeutig für Primitivideale, für imprimitive allein in Rücksicht der Bildungsvorschrift der Komponenten

$$(\mathfrak{A}, \pi_i^{\nu_i})_\sigma; n(\mathfrak{A}) = \pi_1^{\nu_1} \pi_2^{\nu_2} \dots \pi_s^{\nu_s} \cdot * \\ (\text{Emmy Noether} * \text{Andreas Speiser}).$$

Zwei verschiedene primitive Ideale derselben Relativnorm haben nur imprimitive Quaternionen gemeinsam. Diese Bemerkung gibt zur Bildung der ursprünglichen Idealsterne vom Kerne α Anlass, deren jeder ein $\vartheta(\alpha) =$ strahliges Gebilde darstellt, dessen Strahlen je vom Mass α^2 Strahleinheiten sind und welche sich gesetzmässig aufzweigen. Es gibt sovieler Aufzweigungs- und Strahlordnungen im Stern als Möglichkeiten, den Kern als Primzahlprodukt darzustellen, das sind

$$\eta(\alpha) = \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s)!}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_s!}.$$

Jeder Faktor π_i der Darstellung bestimmt eine Aufzweigung jedes Strahles in $\pi_i + 1$ oder π_i neue Strahlweiten, je nachdem die Primzahl π_i ein neuer Faktor ist oder Wiederholung eines früheren. Jedes Galoisfeld der Theorie von Herrn A. Speiser trägt einen links- und einen rechtsseitigen ursprünglichen Idealstern, welcher je alle kongruenzlösenden Reste des Feldes in sich vereint.

Die Einsicht in die Gestaltung der Idealsterne ist von so wesentlicher Bedeutung, dass die weitere Theorie völlig auf diese Erkenntnisse gestützt werden kann. Sie ermöglicht vorerst eine Bezeichnung aller primitiven σ -seitigen Ideale derselben Relativnorm durch je ein Indizessystem von solcher Art, dass der grösste gemeinsame Teiler je die gemeinsamen Anfänge der Indizessysteme als Indizessystem besitzt, indes das kleinste gemeinschaftliche Vielfache alsdann Produkt des grössten gemeinsamen Teilers in eine eindeutig bestimmte Rationalzahl ist.

Des weiteren ergibt sich die Möglichkeit, ein System von Koordinaten der rechtsseitigen Primideale zu wählen, welches zugleich Koordinatensystem der linksseitigen Primideale ist und durch Bildung der (primitiven) Produkte der Koordinaten alle (primitiven) Primär-ideale eindeutig mit Koordinaten ausstattet. Es gibt unendlich viele Koordinatensysteme der Primär-ideale, welche sich durch Einbeziehung des Primärdarstellungssatzes zu Koordinatensystemen aller Ideale des Integritätsbereiches erweitern. Jedes Koordinatensystem bestimmt eine eindeutige Multiplikation je der rechts- und linksseitigen Ideale untereinander und einen eineindeutigen Primprodukt-darstellungssatz der σ -seitigen Ideale. Dieser Eindeutigkeitssatz ist Invariante der Koordinatensysteme und bei Hinzufügung des Kommutativgesetzes mit dem Eindeutigkeitssatze der algebraischen Idealtheorie identisch.

Verzicht auf die Assoziativität der Idealmultiplikation und strengere Definition der Hauptideale ermöglichen die Einführung der Sternmultiplikation, welche als Produkt von Sternhauptidealen immer wieder solche erzeugt. Wesentlich für diese Theorie ist der Begriff des σ -seitigen Idealsternsystems der Charakteristik $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s\}$, welches Inbegriff aller unendlich vielen σ -seitigen Idealsterne von einem Kerne

$$\pi_1^{\nu_1} \pi_2^{\nu_2} \dots \pi_s^{\nu_s} \text{ ist; } \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s = 1, 2, \dots, \infty.$$

Der Inbegriff aller Idealsterne und Idealsternsysteme heisst der Idealsternhimmel des Integritätsbereiches.

Die Einführung der Z -Funktion und die transzendenten Methoden von Dirichlet, Kummer, Dedekind geben Anzahlsätze für die Darstellbarkeit natürlicher ganzer Zahlen durch Liouvilleformen.

Indes die Arbeiten der Herren A. Speiser und H. Brandt wesentlich die im Inkommutativen noch gültigen Beziehungen a priori darstellen, fügt der Verfasser die zur Abrundung der Theorie erforderlichen „Verbindungen im einzelnen“ hinzu.

5. M. GUT (Zürich). — *Über die Klassenzahl der quadratischen Körper.*

Der Vortragende referiert über seine unter dem gleichen Titel erschienene Arbeit in der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (72. Jahrg., 1927, S. 197). Auf Grund der Hecke'schen Funktionalgleichung ergibt sich ein vom klassischen etwas verschiedener Ausdruck für die Klassenzahl eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers. Vermöge eines Satzes aus der Theorie der divergenten Dirichlet-Reihen erhält man für quadratische Körper so insbesondere eine Bestimmung der Klassenzahl ohne Verwendung der Gauss'schen Summen. Der Vortragende fügt bei, dass er von Herrn Prof. Hecke nachträglich erfahren hat, dass E. Landau die beiden im Falle der quadratischen Körper berechneten divergenten Reihen schon früher einmal in anderer Weise abschätzte, vgl. Crelle'sches Journal, Band 125 (1903), S. 64 u. ff., besonders S. 132—137.

6. R. WAVRE (Genève). — *Sur la stratification et les mouvements internes des planètes.*

L'auteur n'a pas envoyé de résumé de sa communication.

7. G. PÓLYA (Zürich). — *Notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe.*

Es sei A eine in der z -Ebene gelegene abgeschlossene Punktmenge, ϱ der Radius des kleinsten Kreises vom Mittelpunkt $z=0$, der A enthält und ς der Radius des kleinsten Kreises von demselben Mittelpunkt, der den perfekten Kern von A enthält ($\varsigma=0$, wenn A abzählbar ist). $T_n(z) = z^n + \dots$ sei das Polynom n -ten Grades, das in A am wenigsten von 0 abweicht, und τ_n das Maximum von $|T_n(z)|$ in A ; es existiert bekanntlich (M. Fekete) der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\tau_n} = \tau$.

Es ist $\varrho \geq \varsigma \geq \tau$.

Es sei ϱ der Radius des Konvergenzkreises der Reihe

$$(1) \quad \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots = f(z)$$

und $f(z)$ sei regulär und eindeutig in der Komplementärmenge der Punktmenge A . Man setze

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \dots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \dots & a_{n+k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} \dots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix} = A_n^{(k)}.$$

Wenn n so mit k wächst, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k} = \kappa$, ist

$$(2) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| A_n^{(k)} \right|^{\frac{1}{(n+k-1)k}} \leq \varsigma^{1-\kappa} \tau^{\kappa}.$$

In dem Sonderfall $n = 0$ (also $\kappa = 1$) geht die Ungleichung (2) für viele speziellen Funktionen $f(z)$ (und vielleicht für alle) in eine Gleichung über bei richtiger Zuordnung von A zu $f(z)$. Ein Korollar von (2): Wenn eine ganzzahlige Potenzreihe eine eindeutige, aber nichtrationale Funktion $f(z)$ darstellt, ist die Gesamtheit der singulären Punkte von $f(z)$ nicht abzählbar.

Ein Nebenresultat der Untersuchung: Wenn die Punktmengen A und A^* abgeschlossen sind, A^* in A enthalten und $A - A^*$ abzählbar ist, und τ^* zu A^* so zugeordnet ist wie τ zu A , so ist $\tau^* = \tau$.

8. F. GONSETH (Berne) et G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur la relativité à cinq dimensions et la théorie des quanta.*

Voir: C. R. Acad. Sc., Paris, t. 185, p. 341, 412, 448 et 535, août-septembre 1927.

9. A. SPEISER (Zürich). — *Über Gruppen und Gruppoide.*

Mit Hilfe des Matrizenkalküls lässt sich die Gesamtheit der Ideale in einem Integritätsbereich einer Algebra aufstellen und die Art, wie sie in einander enthalten sind, überblicken. Brandt hat gezeigt, dass die Gesamtheit aller Ideale einer rationalen Algebra ein Gruppoid bildet. Nimmt man das von Krull und Artin eingeführte inverse Ideal hinzu, so kann man die Teilbarkeit der Ideale, die sich auf den Begriff des Enthaltenseins zweier Ideale gründet, und die Multiplikation der Ideale, die auf das Gruppoid und damit auf die Basismultiplikation gegründet ist, miteinander verbinden. Das Ideal $\{a\}$, das links zum Integritätsbereich $\{1\}$, rechts zu (1) gehört, sei im Sinne der ersten Definition durch $[b]$ teilbar, das links zu $[1]$, rechts zu (1) gehört. Dann bilde man durch Basismultiplikation $\{a\} \times (b^{-1}) = \{b\}$. Dieses Ideal gehört links zu $\{1\}$ und rechts zu $[1]$ und es gilt $\{b\} \times [b] = \{a\}$, womit im Sinne des Gruppoids ein Faktor aus $[a]$ abgespalten ist. Eine Fortsetzung dieses Verfahrens zeigt, dass man damit die Zerlegung der Ideale in Primideale im Gruppoid vollständig auf das Problem im Sinne der ersten Definition zurückführen kann. Falls $\{a\}$ und $[b]$ ganze Rechtsideale in (1) sind, so ist auch $\{b\}$ ein solches in $[1]$, denn alle Zahlen von $\{a\}$ sind in $[b]$ enthalten, daher ist auch $\{a\}(b^{-1})$ ein Teilsystem von $[b](b^{-1}) = [1]$.

Man erhält alle Ideale einer Algebra, indem man die Rechtsideale eines bestimmten Integritätsbereiches rechts mit allen inversen zusammensetzt, gerade wie man alle Strecken eines Raumes erhält, indem man von einem Punkt aus alle Vektoren abträgt und ihre Endpunkte verbindet. Denn es sei $\{a\}$ irgendein Ideal, ferner (1) ein Integritätsbereich. Dann bilde man $[1] \times (1) = [b]$. Letzteres ist ein Rechtsideal in (1) . Es wird nun $\{a\}[b] = \{c\}$ ein Rechtsideal in (1) und $\{a\} = \{c\}(b^{-1})$, also Produkt eines Rechtsideales in (1) und eines inversen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Falls die Ideale $[a]$ und $\{b\}$ zueinander prim sind, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\langle a b \rangle = \langle b \rangle$ das Produkt im Sinne der ersten Definition. Um dasselbe nach der zweiten zu machen, setze man $\langle a b \rangle (b^{-1}) = \langle a \rangle$, und man erhält $\langle a b \rangle = \langle a \rangle \{b\}$. Man kann offenbar die beiden Ideale $[a]$ und $\langle a \rangle$ als „stellvertretende Ideale“ bezeichnen, das Gemeinsame derselben ist analog zum Vektor, der das Gemeinsame zweier Strecken mit derselben Richtung und Grösse bezeichnet. Die Restklassen genommen nach dem kleinsten zweiseitigen Ideal, das $[a]$ als Teiler besitzt, sind für $[a]$ und $\langle a \rangle$ dieselben.

10. H. BRANDT (Aachen). — *Zur allgemeinen Idealtheorie.*

Der Vortragende entwickelt zunächst nach dem Vorbilde von Dedekind¹ eine allgemeine Theorie der Moduln für eine beliebige assoziative, eine Haupteinheit enthaltende Algebra \mathfrak{A} ². Unter einem Modul a ist dabei ein System von Zahlen aus \mathfrak{A} verstanden, das mit α, β, \dots stets auch alle linearen Kombinationen $\alpha a + \beta b + \dots$ enthält, wobei α, β, \dots irgendwelche Zahlen aus einem Koeffizientensystem \mathfrak{Z} bezeichnen, das aus dem Zentrum \mathfrak{Z} von \mathfrak{A} so ausgewählt ist, dass es die Haupteinheit enthält und in bezug auf Addition, Subtraktion und Multiplikation geschlossen ist (also Ringeigenschaft besitzt).

Um die Rechenoperationen für die Moduln zu definieren, seien a und b irgend zwei Moduln und α die Zahlen aus a , β die Zahlen aus b . Addition und Subtraktion können dann wie im kommutativen Fall erklärt werden: $a + b = (a, b) = t$ ist der grösste gemeinsame Teiler von a und b , d. h. die Gesamtheit der Zahlen $\alpha + \beta$, $a - b = [a, b] = v$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache, d. h. der Durchschnitt der Moduln a und b oder die Gesamtheit der sowohl unter den α wie den β enthaltenen Zahlen. Bei der Multiplikation und Division der Moduln ergeben sich naturgemäss einige Aenderungen, da das kommutative Multiplikationsgesetz nicht gefordert wird. Unter dem Produkt $a \times b = c$ verstehen wir die Gesamtheit der mit Koeffizienten aus \mathfrak{Z} gebildeten linearen Kombinationen der Produkte $\alpha \beta$, unter dem Quotienten $a / b = q_1$ (lies a durch b) die Gesamtheit der Zahlen α_1 , für welche der Modul $\alpha_1 b$ durch a teilbar wird und ebenso unter dem Quotienten $b \setminus a = q_2$ (lies b in a) die Gesamtheit der Zahlen α_2 , für welche der Modul $b \alpha_2$ durch a teilbar wird.

Für einen beliebigen Modul a werden die Quotienten $a / a = a^0$, $a \setminus a = a_0$ die Links- bzw. Rechtsordnung von a genannt. Diese Ordnungen können auch erklärt werden als die umfassendsten, den Gleichungen $a^0 \times a = a$, $a \times a_0 = a$ genügenden Moduln a^0, a_0 . Bildet man a_0 / a und $a \setminus a^0$, so ergibt sich derselbe Modul, der daher durch $a \setminus a / a = a^{-1}$ bezeichnet und reziproker Modul genannt werden kann.

¹ Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, 4. Auflage, S. 493.

² Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927.

Ein Modul α heisst umkehrbar, wenn der reziproke Modul α^{-1} den Gleichungen $\alpha^{-1} \times \alpha = \alpha_0$, $\alpha \times \alpha^{-1} = \alpha^0$ genügt.

Unter einer eigentlichen Multiplikation, bezeichnet durch $\alpha \mathfrak{b} = c$ (also ohne \times -zeichen) verstehen wir eine solche, bei der weder α noch \mathfrak{b} durch einen umfassenderen Modul ersetzt werden kann, ohne dass das Produkt sich ändert. Aehnlich kann man eine eigentliche Division definieren. Im Sinne der eigentlichen Multiplikation und Division sind die drei Gleichungen $\alpha \mathfrak{b} = c$, $c \diagdown \mathfrak{b} = \alpha$, $\alpha \diagup c = \mathfrak{b}$ gleichbedeutend. Für die sechs Ordnungen $\alpha^0, \alpha_0, \mathfrak{b}^0, \mathfrak{b}_0, c^0, c_0$ gelten die Bedingungen $\alpha_0 = \mathfrak{b}^0$, $\alpha^0 = c^0$, $\mathfrak{b}_0 = c_0$, die man leicht aus dem Begriff der eigentlichen Multiplikation ableitet.

Moduln, welche (direkt oder indirekt) durch eigentliche Multiplikation miteinander verbunden werden können, mögen als verwandt bezeichnet werden. Dann gilt der folgende allgemeine Satz: Die sämtlichen mit einer Ordnung verwandten umkehrbaren Moduln sind durch die eigentliche Multiplikation zu einem Gruppoid¹ verknüpft.

Wendet man die Modultheorie im besonderen auf eine rationale Dedekindsche Algebra an (d. h. eine solche ohne Radikal) und betrachtet nur die mit \mathfrak{z} als dem Ring der natürlichen Zahlen gebildeten n -gliedrigen Moduln, wobei n die Ordnung der Algebra bezeichnet, so ist namentlich der Fall von Interesse, dass überhaupt *alle* mit einer Ordnung verwandten Moduln umkehrbar sind.

Das ist dann und nur dann der Fall, wenn das Komplement der Ordnung umkehrbar ist. Dieser Satz war für den kommutativen Fall schon Dedekind bekannt.

Von einer beliebigen Ordnung kann man durch Erweiterung stets zu einer Ordnung gelangen, die ein umkehrbares Komplement besitzt. Eine maximale Ordnung muss daher stets dieser Bedingung genügen. Bezeichnet man die Moduln, welche zu maximalen Ordnungen gehören, als Ideale, so gilt daher der Satz: Die Ideale einer Dedekindschen Algebra sind durch die eigentliche Multiplikation zu einem Gruppoid miteinander verknüpft.

Weiter werden die Zerlegungsgesetze der ganzen Ideale besprochen. Ein ganzes Ideal ist dabei ein solches, das durch die eine (und somit auch durch die andere) der beiden zugehörigen Ordnungen teilbar ist. Hier gilt der fundamentale Satz: Wenn das Ideal α durch das Ideal \mathfrak{b} teilbar ist, so gibt es ganze Ideale $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$, so dass $\alpha = \mathfrak{r} \mathfrak{b} \mathfrak{s}$, und wenn umgekehrt diese Gleichung gilt, so ist α durch \mathfrak{b} teilbar. Daher decken sich wie im kommutativen Falle die Begriffe Teiler und Faktor.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Begriff des Distanzideals, das für zwei Einheiten e_1, e_2 durch die Formel $(e_2 \times e_1)^{-1} = \mathfrak{d}$ gewonnen wird. Dies Ideal \mathfrak{d} ist ganz und gemeinsamer Linksfaktor, gemeinsamer Rechtsfaktor und grösster gemeinsamer Teiler aller ganzen Ideale, die

¹ H. Brandt, Ueber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Annalen 96 (1926) S. 360.

links zu e_1 und rechts zu e_2 gehören, kann also gewissermassen als der kürzeste Weg, der von e_1 nach e_2 führt, angesehen werden.

Mit Hilfe dieser Begriffe und Sätze lässt sich in Verbindung mit den Untersuchungen des Herrn Speiser (vgl. Dickson¹, letztes Kapitel) die Zerlegung der ganzen Ideale in Primfaktoren vollständig erledigen.

11. P. FINSLER (Zürich). — *Quadratische Formen und algebraische Gebilde.*

Die Frage, unter welchen Bedingungen in einer linearen Schar von quadratischen Formen eine definite Form enthalten ist, steht in Zusammenhang mit einer Klasse von algebraischen Gebilden.

Die einfachsten algebraischen Gebilde, die zum n -dimensionalen Raum gehören, d. h. in keinem kleineren linearen Raum enthalten sind, und die aus irreduzibeln Teilen der Dimension p_i und der Ordnung q_i bestehen, genügen der Bedingung $\sum (p_i + q_i) = n + 1$. Sie gehören zusammen mit gewissen andern reduzibeln Gebilden zu den „Freigebilden“, die so zu definieren sind:

Ein algebraisches Gebilde G heisst Freigeilde, wenn der Schnitt von G mit einem beliebigen linearen Raum stets entweder aus unendlich vielen oder nur aus linear unabhängigen Punkten besteht.

Der Einteilung nach der Ordnung entspricht dann die folgende:

Ein Gebilde heisst vom Zwang ζ , wenn die Anzahl der einzeln liegenden Schnittpunkte mit einem linearen Raum um ζ grösser sein kann, als die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen.

Es gelten einfache Sätze über die Freigeilde, die auch bei jeder speziellen Lage erfüllt sind. So ist z. B. der Schnitt mit einem linearen Raum stets wieder ein Freigeilde.

Ferner gilt der Satz: Ist im Reellen ganz auf der einen Seite einer Hyperfläche zweiter Ordnung ein Freigeilde gegeben, so lässt sich durch dasselbe stets eine andere Hyperfläche zweiter Ordnung legen, welche die erste nicht trifft. Dieser Satz gilt nur für die Freigeilde.

Es folgt: In einer linearen Schar von quadratischen Formen $Q + \sum \lambda_i Q_i$ ist dann und nur dann stets eine definite Form enthalten, wenn $\sum \lambda_i Q_i = 0$ die Schar aller Hyperflächen zweiter Ordnung darstellt, die ein ganz in Gebiet $Q > 0$ oder $Q < 0$ gelegenes Freigeilde enthalten.

Es ergibt sich folgende Anwendung auf die Variationsrechnung:

Die von J. Hadamard (Bull. Soc. Math. de France 30 [1902]) angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein Minimum bei n -fachen Integralen mit m unbekannten Funktionen sind für $m = 2$ oder $n = 2$ im wesentlichen identisch, jedoch nicht mehr für $m > 2$, $n > 2$.

12. RUD. FUETER (Zürich). — *Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern.*

Die von mir im zweiten Teile meines Buches: „Vorlesungen über die Theorie der singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der

¹ Dickson, loc. cit.

elliptischen Funktionen“ aufgestellte Theorie ist hinreichend, um diejenigen Reziprozitätsgesetze aufzustellen, die dem Eisenstein'schen Reziprozitätsgesetze im Falle der absolut-Abelschen Körper entsprechen. Es zeigt sich, dass die Funktion $\mathfrak{T}(z)$ eine weitgehende Analogie zu der Exponentialfunktion aufweist. Ist z. B. π eine primäre Primzahl von $k(\sqrt{m})$, m quadratfrei und negativ, d. h.:

$$\pi \equiv 1 \pmod{4},$$

was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, so haben die Zahlen

$$\mathfrak{T}\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{4\pi}\right) \text{ folgende Eigenschaften:}$$

a) Sie sind Einheiten.

b) $\mathfrak{T}\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{4\pi}\right) - 1$ ist, abgesehen von einem genau angebbaren geraden Teiler, nur durch Primidealteiler von π teilbar.

c) Ihr Relativgrad zum Klassenkörper von k ist $n(\pi) - 1$.

d) Der Oberkörper ist relativzyklisch zum Klassenkörper von k .

Nun gilt die Formel:

$$\prod_{(x)} (\sqrt{\mathfrak{T}(x\lambda)} - \sqrt{\mathfrak{T}(\bar{x}\lambda)}) = \pm n_\pi(1) \sqrt{\pi}, \quad \lambda = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{4\pi},$$

$$\bar{x} \equiv -x \pmod{\pi}, \quad \bar{x} \equiv x \equiv 1 \pmod{4},$$

wo $n_\pi(1)$ eine Zahl des Klassenkörpers ist und x ein solches System

von $\frac{1}{2}(n(\pi) - 1)$ inkongruenten Zahlen $\pmod{\pi}$ durchläuft, dass auch die x^2 inkongruent sind. Hieraus und aus dem Zerlegungssatz der Primideale im Oberkörper folgt sofort, wie im Falle des gewöhnlichen quadratischen Reziprozitätsgesetzes:

$$\left\{ \frac{x}{\pi} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{x} \right\},$$

wo $\{ \}$ das quadratische Restsymbol in k ist, und π und x beide primäre Primzahlen sind. Dieses Gesetz lässt sich noch bedeutend verallgemeinern.

Entsprechend können die Betrachtungen im Falle des 1. ten Reziprozitätsgesetzes, 1 eine ungerade Primzahl, durchgeführt werden.

13. J. J. BURCKHARDT (Basel). — *Die Algebra des Dieders.*

Will man die Struktur einer Algebra untersuchen, so zerlegt man sie in eine direkte Summe, d. h. man zerlegt sie derart in die Summe einzelner Subalgebren, dass das Produkt zweier Grössen aus verschiedenen Komponenten stets Null ergibt. Auf diese Weise wurde die durch die Diedergruppe bestimmte rationale Algebra untersucht und dies für das Dieder mit drei Ecken näher ausgeführt. Diese Algebra zerfällt in die

direkte Summe dreier Komponenten, wovon zwei von der Ordnung 1 sind, also dem Körper der rationalen Zahlen äquivalent, und die dritte von der Ordnung 4 ist. Da jede Grösse aus dieser dritten Komponente einer quadratischen Gleichung genügen muss, gelingt es, die Norm zu definieren; sie ist hier die quadratische Form $\eta_1^2 - \eta_1 \eta_2 + \eta_2^2 - (\eta_3^2 - \eta_3 \eta_4 + \eta_4^2)$, wo η_1, \dots, η_4 rationale Zahlen bedeuten. Wenn wir die quadratische Form durch eine rationale Transformation auf die Stammform $\xi_1 \xi_3 - \xi_2 \xi_4$ transformieren, so liefert uns die dazu transponierte Transformation, auf die Basisgrössen der dritten Komponente ausgeübt, deren Transformation auf eine vollständige Matrixalgebra. Im allgemeinen Fall des Dieders mit ungerader Eckenanzahl m lassen sich auch vorerst zwei Komponenten der Ordnung 1 abspalten. Der übrigbleibende Teil zerfällt im Körper der Charaktere in $\frac{m-1}{2}$

Algebren der Ordnung 4, deren Summe sich wieder rational darstellen lässt. Auch hier genügt eine allgemeine Grösse daraus einer quadratischen Gleichung, welche die Norm definiert, die wiederum eine indefinite quadratische Form ist.

14. WOLFGANG KRULL (Freiburg i. Br.). — Über unendliche algebraische Zahlkörper.

Es handelt sich um die Übertragung des Satzes, dass jedes Ideal der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers eindeutig in Primidealfaktoren zerlegbar ist, auf unendliche algebraische Zahlkörper. Die Ergebnisse lauten:

1. Jedes Ideal der Hauptordnung eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers kann dargestellt werden als das kleinste-gemeinschaftliche-Vielfache von endlich oder unendlich vielen „einartigen“ Idealen, die jeweils nur durch ein einziges Primideal teilbar sind. Treten nur endlich viel Komponenten auf, so ist die genannte kleinste-gemeinschaftliche-Vielfachendarstellung eindeutig und kann durch die Produktdarstellung ersetzt werden.

2. Die Gesamtheit der durch ein festes Primideal \mathfrak{p} teilbaren einartigen Ideale besteht i. a. nicht nur — wie bei den endlichen Zahlkörpern — aus den Potenzen von \mathfrak{p} . Doch kann jedes durch \mathfrak{p} teilbare einartige Ideal durch eine reelle Zahl, seinen „Wert“, und die Angabe ob „endlich“ oder „unendlich“ vollkommen charakterisiert werden.

3. Besitzt jedes Ideal der Hauptordnung des Zahlkörpers K nur endlich viel Primidealteiler, so ermöglichen die unter 1. und 2. skizzierten Ergebnisse einen genauen Einblick in die Teilbarkeits- und Multiplikationsverhältnisse bei beliebigen Idealen aus K . In allgemeinsten Zahlkörpern hingegen muss man noch gewisse Gedankengänge aus der Topologie zu Hilfe nehmen, auf die indes in dem Vortrag nicht eingegangen wurde.

15. S. BAYS (Fribourg). — *Sur le nombre des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour $N = 6n + 1$ premier.*

Le problème de l'obtention des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour $N = 6n + 1$ premier, est actuellement ramené à celui de l'obtention des systèmes de caractéristiques différents, appartenant à chaque diviseur d de $3n$.¹

La recherche des systèmes de caractéristiques différents appartenant à n et aux diviseurs de n a été ramenée au problème suivant:²

Obtenir toutes les combinaisons constituées de x triples pris dans $n - 2$ colonnes cycliques de triples des éléments $0, 1, 2, \dots, n - 1$; (α) , et de y éléments pris dans la série (α) , avec la propriété: $3x + y = n$ et dans la même combinaison les éléments sont tous différents. Des combinaisons obtenues, ne retenir que celles qui ne sont pas déductibles l'une de l'autre par les substitutions du groupe $\{(0\ 1\ 2\ \dots\ n - 1)\}$.

La recherche des systèmes de caractéristiques différents appartenant au diviseur d quelconque de $3n$, est maintenant ramené au problème suivant:

Si d est n ou un diviseur de n , on a au plus $n - 2$ colonnes cycliques ($n - 2$ pour $d = n$) de triples des éléments $0, 1, 2, \dots, d - 1$; (β) ; les éléments (β) représentent chacun $\frac{n}{d}$ des éléments (α) .

Il faut obtenir toutes les combinaisons de x triples pris dans ces colonnes cycliques et de y éléments pris dans la série (α) avec la propriété: $\frac{3nx}{d} + y = n$ et dans la même combinaison les éléments (α) représentés ou entrant effectivement sont tous différents.

Si d est multiple par 3 de n ou d'un diviseur de n , on a au plus $n - 1$ colonnes cycliques de triples des éléments (β) . Il faut simplement obtenir toutes les combinaisons de $\frac{d}{3}$ triples pris dans ces colonnes, sans élément répété ou, autrement dit, contenant chacune les d éléments (β) .

Dans l'un et l'autre cas, il ne faut retenir que celles des combinaisons qui ne sont pas déductibles l'une de l'autre par les substitutions du groupe $\{(0\ 1\ 2\ \dots\ d - 1)\}$.

Avant ce résultat, j'avais pu pousser la recherche des systèmes de caractéristiques différents et donc celles des systèmes cycliques de triples de Steiner différents jusqu'à $N = 43$; je puis maintenant avec du temps, obtenir les systèmes de caractéristiques différents appartenant

¹ Voir mes second et troisième mémoires sur ce problème des systèmes cycliques de triples de Steiner: l'un est dans le Journ. de math. pures et appliquées, t. 2, 1923, fasc. 1, p. 73 à 98; l'autre est dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XVII, 1925, p. 3 à 41.

² Voir le troisième mémoire (celui des Annales de Toulouse) aux p. 29 à 41.

à chaque diviseur d (excepté $3n$ lui-même) jusqu'à $N = 97$, et surtout donner presque immédiatement ceux appartenant aux petits diviseurs de $3n$, au diviseur 3 en particulier, pour des $N = 6n + 1$ premiers plus grands, même aussi grands que l'on veut, pourvu que j'en aie une racine primitive.

16. S. BAYS (Fribourg). — *Sur un problème posé par Cayley en rapport avec le problème des systèmes de triples de Steiner.*

Le problème posé par Cayley, relativement au problème des systèmes de triples de Steiner, est le suivant. Nous l'énoncerons d'une façon plus explicite :

Un système de triples de Steiner de N éléments est tel que chaque couple des N éléments entre une fois et une seule fois dans un de ces triples. Un système de triples de Steiner contient donc $\frac{N(N-1)}{6}$ triples. Pourrait-on répartir les $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ triples de N éléments en $N-2$ systèmes de triples de Steiner ?

Cayley a fait remarquer que pour 7 éléments (les systèmes de triples de Steiner n'existent que pour les N des formes $6n + 1$ et $6n + 3$) cette répartition n'est pas possible ; sur les 30 formes différentes que prend l'unique système de triples de Steiner de 7 éléments par les $7!$ permutations de ces éléments, on peut en trouver deux différentes par tous leurs triples et pas davantage, alors qu'il en faudrait cinq pour contenir les 35 triples de 7 éléments. Il a donné une démonstration, fautive d'ailleurs (voir Actes de la S. H. S. N., Lugano, 1919, II^{me} partie, p. 74), incitant à croire que pour 15 éléments cette répartition n'est pas possible non plus. J'ai montré que pour 9 éléments (Enseignement mathématique, n° 1-2, 19^{me} année, 1917, p. 57—67) la question de Cayley a 2 solutions différentes (ne provenant pas l'une de l'autre par une permutation des éléments), et à l'encontre de Cayley qui paraît avoir pensé plutôt le contraire, j'ai des raisons de croire que cette répartition de l'ensemble des triples de N éléments en $N-2$ systèmes de triples de Steiner doit être possible au moins pour certains N des formes $6n + 1$ et $6n + 3$.

Pour les $N = 6n + 1$ premiers en-dessous de 100, je puis donner maintenant, pour chacun d'eux, un nombre de systèmes cycliques de triples de Steiner différents par tous leurs triples, supérieurs à $\frac{N-2}{2}$, exceptés, comme il vient d'être dit, pour $N = 7$. Ainsi pour

$N = 61$, j'obtiens avec la plus grande facilité, parce que les systèmes de caractéristiques appartenant aux petits diviseurs de $3n$, ou à des diviseurs que je dirais commodes, me suffisent pour cela, 44 systèmes cycliques de triples sans un triple commun, alors que la répartition de Cayley en demanderait 59. Pour $N = 73$, j'en obtiens 56 sur 71 qui seraient nécessaires.

Il faut remarquer d'ailleurs que je n'opère qu'avec une catégorie très restreinte de systèmes de triples, les systèmes de triples cycliques; si je parvenais à une solution de la question de Cayley par cette voie, elle serait une solution d'un type particulier aussi, puisque possédant le groupe cyclique $\{|\alpha, 1 + \alpha|\}$; c'est une raison de plus, me semble-t-il, de penser que, si nous avons à disposition tous les systèmes de triples de Steiner qui existent pour N éléments, la répartition de Cayley serait probablement possible.

H.-S. White a démontré (Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. XVI, n° 1, 1915) que pour $N=31$, il y a déjà plus de $37 \cdot 10^{12}$ systèmes de triples différents (il y a 80 systèmes cycliques de triples différents pour $N=31$); avec toutes les formes qu'ils peuvent prendre chacun par les permutations du groupe symétrique des 31 éléments, on a une idée du nombre excessivement grand déjà pour $N=31$, de systèmes de triples à disposition pour chercher une répartition de Cayley.