

Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della
Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 103 (1922)

Vereinsnachrichten: Sektion für Mathematik

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, den 26. August 1922

Präsident: PROF. DR. G. DUMAS (Lausanne)

Sekretär: PROF. DR. A. SPEISER (Zürich)

1. MARCEL GROSSMANN (Zürich). — *Elliptische Geometrie im Antipolarsystem.*

Ordnet man jedem Punkt der Ebene seine Antipolare für einen gegebenen Grundkreis zu, so entsteht ein Polarsystem mit imaginärer Ordnungskurve. Betrachtet man diese als absoluten Kegelschnitt für eine projektive Metrik, so erhält man ein projektiv richtiges Bild für die elliptische (nicht-euklidische) Geometrie. So ist z. B. jedes Polar-dreieck in diesem Polarsystem ein Dreieck mit drei rechten Winkeln der elliptischen Geometrie.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für jede Konstruktions-aufgabe der elliptischen Geometrie ein projektives Bild.

Beispielsweise sei herausgegriffen die Konstruktion eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und gegebenem Peripheriepunkt. Man bestimmt die Antipolare des Mittelpunktes. Auf dieser Geraden bestimmt das absolute Polarsystem eine elliptische Polinversion. Der gesuchte Kreis ist jener Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt diese absolute Polare hat, dessen Involution auf ihr als die absolute bekannt ist, und von dem ein weiterer Punkt der Peripherie gegeben ist. Damit ist der Kegelschnitt bekanntlich bestimmt und kann nach Punkten und Tangenten konstruiert werden.

Das Berührungsbüschel der konzentrischen Kreise enthält auch ein Exemplar, das „Kreis“ der euklidischen Geometrie ist, nämlich den Kreis um den gegebenen Mittelpunkt, der Diametalkreis zum Grundkreis ist, denn dieser bestimmt auf der absoluten Polaren des Mittelpunktes die nämliche Involution. Alle übrigen Kreise der elliptischen Geometrie können somit aus diesem durch zentrale Kollineation abgeleitet werden.

2. A. SPEISER (Zürich). — *Über Kongruenzgruppen.*

Nach dem Theorem von C. Jordan gibt es nur eine endliche Anzahl einfacher Gruppen, die sich als Substitutionsgruppen von n -tem Grade darstellen lassen, deren Koeffizienten reelle oder komplexe Zahlen sind. Nimmt man aber Reste von Primzahlen oder Primidealen (Galois'sche Felder) für die Koeffizienten an, so ergibt sich eine unend-

liche Menge von einfachen Gruppen. Aus der Theorie der Gruppen-determinante folgt jedoch der Satz, dass jede Kongruenzgruppe mod p oder mod einem Primidealteiler von p, deren Ordnung zu p prim ist, sich auch als Substitutionsgruppe mit Zahlenkoeffizienten und von demselben Grade darstellen lässt.

3. R. FUETER (Zürich). — *Die independente Theorie der elliptischen Modulfunktionen.*

Hurwitz hat in seiner Dissertation zum ersten Male die elliptischen Modulfunktionen unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen definiert und ergründet. Er hat seine Entwicklungen später (Math. Annalen 58) noch vereinfacht. Aber es bleibt immer noch etwas Erzwungenes in seiner Darstellung. Mit Hilfe des Fourierschen Theorems:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(\xi) e^{2\pi i n \xi} d\xi = \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

gelingt eine in jeder Weise befriedigende Begründung. Diese Darstellung wird in einem Lehrbuch eingehend gegeben werden.

4. A. EMCH (Urbana). — *Einige geometrische Anwendungen der symmetrischen Substitutionsgruppen.*

Erscheint im „Enseignement mathématique“.

5. CH. WILLIGENS (Interlaken). — *Application du calcul des probabilités à l'adaptation des salaires au coût de la vie.*

Soit J la moyenne arithmétique des dépenses d'un certain nombre de ménages, pour un état donné des prix, J' la moyenne arithmétique des dépenses après changement des prix. Soit enfin une fonction $V(x)$ tel que la probabilité d'un ménage d'avoir une dépense comprise entre x et $x + dx$ soit $V(x) dx$. La moyenne arithmétique des dépenses x sera

$$1) \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x) dx.$$

Supposons que la nouvelle dépense après le changement de prix soit une fonction $\varphi(x)$ de l'ancienne. J' devant être moyenne arithmétique des dépenses on devra avoir

$$2) \quad J' = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) V(x) dx$$

qui donne une relation entre les coefficients de $\varphi(x)$, fonction qui est du reste arbitraire.

En première approximation on peut prendre

$$3) \quad V(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-J)^2} \quad \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sum (x-J)^2}{M}}$$

M étant le nombre de ménages ayant fourni la base pour le calcul direct de J . Dans ce cas où $V(x)$ est pris sous la forme 3) on devra aussi avoir la condition

4)
$$J' = \varphi(J).$$

6. J. CHUARD (Lausanne). — *Le problème des quatre couleurs en Analysis situs.*

Kein Autoreferat eingegangen.

7. ROLIN WAVRE (Genève). — *Un problème d'itération.*

Etant donné une substitution rationnelle ou entière à n variables complexes et un point double attractif α de la substitution, il est possible de définir un domaine complètement invariant D contenant ce point double. Les solutions de l'équation de Schröder holomorphes au voisinage du point α admettent la partie de D d'un seul tenant avec α comme domaine de Weierstrass. En supposant les multiplicateurs de la substitution tous distincts, il est possible de représenter les solutions dans tout le domaine D par une série uniformément convergente dans tout domaine fermé et borné contenu dans D . Ces résultats avaient été obtenus, avec d'autres beaucoup plus précis, par M. Fatou dans le cas d'une seule variable.

8. F. GONSETH (Berne). — *Sur la représentation de Laguerre des imaginaires de l'espace.*

1. Par la combinaison de la représentation de Laguerre du point imaginaire de l'espace et d'une seconde représentation (que Study nomme dans le plan „das zweite Bildpaar“) on arrive à traiter avec simplicité les problèmes descriptifs de l'espace où entrent des éléments imaginaires. Par exemple, la *congruence linéaire ellipique* s'obtient comme suit: De chaque point M du plan médian de deux droites dirigées on abaisse la perpendiculaire sur ces droites. La normale en M sur le plan de ces deux perpendiculaires décrit la congruence.

2. La symétrie de Schwarz-Laguerre par rapport à une courbe plane analytique peut être étendue dans l'espace de la façon suivante:

Soit Φ une surface analytique, réelle ou imaginaire et P un point réel. Le cône isotope de P coupe Φ en une courbe γ , et la développable isotope circonscrite à γ contient en outre du point P une courbe réelle c . La correspondance de contact $P \rightarrow c$ peut être à certains points de vue (conservation de certains angles) envisagée comme une extension de la symétrie susmentionnée.

Si en particulier Φ est une sphère imaginaire, c est un cercle, qui pour une sphère réelle se réduit au conjugué de P .

9. ERNST ANLIKER (Bern). — *Kinematische Erzeugung der Astroïden.*

Wir betrachten das bewegliche System, in welchem die Ellipse von den Halbachsen $2a$ und a so auf einer regulären Rosenkurve rollt, dass die kleine Ellipsenachse stets durch den Knoten der Rosenkurve geht.

Dann erhalten wir unter anderem folgende Kurven: Jede Gerade parallel zur kleinen Ellipsenachse umhüllt während der betrachteten Bewegung einen Kreis. Jede andere Gerade, die mit der kleinen Achse den Winkel w einschliesst erzeugt eine Astroïde, deren Lage und Dimensionen abhängig sind von w . Z. B. umhüllt jede Gerade durch den Ellipsenmittelpunkt eine reguläre Astroïde; jede Gerade durch einen Endpunkt der kleinen Achse ein halbes Malta-Kreuz usw.

Jeder Punkt auf der kleinen Ellipsenachse oder ihrer Verlängerung beschreibt die Fusspunktsskurve derjenigen Astroïden-*evolvente*, die von der Senkrechten in diesem Punkt auf die kleine Achse eingehüllt wird. Das Ellipsenzentrum z. B. erzeugt ein reguläres Vierblatt. Die Endpunkte der kleinen Achse beschreiben Müngersche Doppel-eilinien usw. Alle andern Punkte erzeugen schiefe Konchoïden oder Orthokonchoïden der Rollbahn des Ellipsenzentrums. Im besondern liefern die Mittelpunkte der grossen Halbachsen je eine *Cornoid*e.

10. PAUL THALMANN (Bern). — Über eine neue Darstellung der Funktionen komplexer Veränderlichen.

Die gewöhnliche konforme Abbildung hat die Nachteile, dass ein reeller Punkt einer Kurve durch zwei verschiedene Punkte dargestellt wird, nämlich durch einen Punkt auf der x -Achse und einen solchen auf der y -Achse. Ferner ist das Bildpaar nicht unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Laguerre hat dann ein Bildpaar eingeführt, das diese Nachteile nicht mehr besitzt. Ich will nun zeigen, dass in ganz natürlicher Weise ein anderes Bildpaar gewählt werden kann. (Siehe Jahrbuch der philosoph. Fakultät der Universität Bern, Bd. III, 1923. Paul Thalmann: Über eine neue graphische Darstellung der komplexen Zahlen. Dissertation.)

Es sei: $x^* = x + i\xi$; $y^* = y + i\eta$

Man konstruiert zuerst $A(xy)$; dann verschiebt man das Koordinatensystem nach A und konstruiert in diesem neuen System den Punkt $B(\xi, \eta)$. Wir wählen A und B als Bildpaar. B hat in bezug auf das ursprüngliche System die Koordinaten $u = x + \xi$, $v = y + \eta$. Wenn wir die Transformation $A \rightarrow B$ untersuchen, so erhalten wir das Resultat, dass jede belegte Fläche in $B(u, v)$ doppelt so gross ist als die im Punkte $A(xy)$. Ferner folgt, dass wenn C die Koordinaten (ξ, η) hat, die Transformation $A \rightarrow C$ flächentreu ist.

Speziell lässt sich nun zeigen, wie natürlich diese Wahl das Problem der Bestimmung der imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt lösen kann. Wir wählen z. B. als Kegelschnitt die Ellipse $b^2 x^{*2} + a^2 y^{*2} = a^2 b^2$. Es ist: $x + \xi = u$, $y + \eta = v$. Wir setzen die Werte für x^* und y^* ein und erhalten die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad b^2 u^2 + a^2 v^2 - 2b^2 u x - 2a^2 v y + a^2 b^2 = 0$$
$$(2) \quad b^2 u x + a^2 v y = b^2 x^2 + a^2 y^2$$

Wir wählen (x, y) als fest und (u, v) als variabel. (1) stellt eine Ellipse dar, die ähnlich ist mit der gegebenen $b^2 u^2 + a^2 v^2 = a^2 b^2$.

(2) stellt eine Gerade g dar, die parallel ist zur Polaren $P(xy)$ in bezug auf die gegebene Ellipse und durch $P(xy)$ geht. Man findet nun die Schnittpunkte von g mit der gegebenen Ellipse, indem man Gerade (2) zum Schnitt bringt mit der Ellipse (1). Die gefundenen Punkte sind die gesuchten imaginären Schnittpunkte. Bewegt sich P auf der Geraden Ursprung — P , so liegen die Schnittpunkte auf einer Hyperbel. Bewegt sich P in der ganzen Ebene um die Ellipse herum, so erhalten wir als Ort der Schnittpunkte von g mit der Ellipse ein ganzes System von Hyperbeln, welches wir als analytische Fortsetzung der Ellipse ansehen können.

Ähnliche Verhältnisse erhalten wir auch, wenn wir irgend einen andern Kegelschnitt wählen und seine imaginären Schnittpunkte mit einer Geraden bestimmen. Höchstwahrscheinlich lässt sich die ganze Theorie auch auf Kurven höherer Ordnung und auf den Raum ausdehnen.

11. WILLY SCHERRER (Zürich). — *Ein Satz über Gitter und Volumen.*

Es wird berichtet über einen Satz der Zahlen-Geometrie, dem man folgende Form geben kann: Ein über ein Einheitsgitter ausgeweitetes Gebiet G vom Volumen 1 enthält mindestens zwei Punkte, die durch einen Vektor des Gitters miteinander verbunden sind. Die Grundlage des Beweises ist folgender Hilfssatz: Unter einer Anzahl $Z > M^n$ in einem n -dimensionalen Gitter beliebig verteilten Gitterpunkten, wo M eine natürliche Zahl ist, gibt es mindestens zwei Punkte, die mit einander durch einen Vektor des M -fachen Gitters verbunden sind. Um dies einzusehen, ziehe man von irgend einem Gitterpunkte aus die Vektoren zu den Z -Gitterpunkten und betrachte ihre Reste modulo M . Die Abzählung ergibt mindestens zwei Vektoren, die gleiche Reste haben und daraus folgt die Behauptung. Nun teile man die Maßstäbe des ursprünglichen Einheitsgitters durch die natürliche Zahl N und errichte das dazugehörige Unterteilungsgitter. Von diesem Gitter mögen Z Punkte auf G fallen. Das Volumen von G kann dann definiert

werden durch $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z}{N^n} = 1$. Nun wende man den Hilfssatz auf die Z Punkte des Unterteilungsgitters an und nehme $M = \sqrt[n]{Z}$. Indem man dann wieder auf die ursprünglichen Einheitsmaßstäbe Bezug nimmt und den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ macht, ergibt sich die an die Spitze gestellte Behauptung.

Der Satz liefert eine einfache Grundlage für verschiedene Sätze der Zahlengeometrie, so für den Minkowskischen Satz über konvexe Körper mit Mittelpunkt, für die Tschebyschew-Minkowskische Ungleichung inhomogener, zerlegbarer, quadratischer Ausdrücke und schliesslich ergibt er in anschaulicher geometrischer Einkleidung gewisse Resultate betreffend Systeme linearer diophantischer Gleichungen.

12. G. JUVET (Neuchâtel). — *Equations aux dérivées partielles.*

Kein Autoreferat eingegangen.