1. Section de Mathématiques.

Séance de la Société mathématique suisse.

Mardi, 31 août 1920.

Président: Prof. L. CRELIER (Berne).

Secrétaire: Prof. F. GONSETH (Berne).

1. CH. WILLIGENS (Berne). — *Sur l'interprétation du temps universel dans la théorie de la relativité.*

Si dans la transformation de Lorentz

$$x = \beta\ (x' + au'),\quad u = \beta\ (ax' + u'),\quad y = y',\quad z = z'$$

$$u = c_0 \tau \quad u' = c_0 \tau' \quad a c_0 = v \quad \beta^2 = \frac{1}{1-a^2}$$

on pose

$$u = c_0 t' + \gamma \qquad u' = c_0 t - \gamma$$

on trouve, tout calcul fait

1. $$u = c_0 \tau = \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{a\beta} x$$

2. $$u' = c_0 \tau' = c_0 t - \frac{\beta - 1}{a\beta} x$$

Pour avoir une interprétation du paramètre t, utilisons les interprétations de la transformation de Lorentz données par Sommerfeld.

La première, obtenue en remplaçant a par ai et c_0 par $-ic_0$ représente une rotation des axes ox ou d'un angle φ tel que $a = tg\varphi$ en posant $b^2 = \dfrac{1}{1 + a^2}$ et $\dfrac{b-1}{ab} = m$ l'équation 1. prend la forme

3. $$c_0 \tau = mx + \overline{c_0} t \frac{1 + m^2}{1 - m^2}$$

la droite 3. admet une enveloppe

$$\begin{cases} x = -\overline{c_0} t \dfrac{4m}{(1 - m^2)^2} \\ c_0 \tau = \overline{c_0} t \dfrac{1 - 4m^2 - m^4}{(1 - m^2)^2} \end{cases}$$

On voit que les courbes sont homothétiques entre elles et t est rapport d'homothétie. La droite 3. est parallèle à la bissectrice de ox et ox'.

Dans la seconde représentation, les axes ox'-ou' sont des diamètres conjugués de deux hyperboles équilatères conjuguées, la longueur du demi diamètre étant toujours prise comme unité. La droite 1. peut s'écrire

4. $$\cot \tau = \mu x + \cot \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$

qui enveloppe la courbe

$$\begin{cases} x = \cot \dfrac{4\mu}{(1+\mu^2)^2} \\ \cot \tau = \cot \dfrac{1+4\mu^2-\mu^4}{(1+\mu^2)^2} \end{cases}$$

La droite 4. découpe sur *ou* et *ou'* des segments égaux. La courbe qu'elle enveloppe est une hypocycloïde à trois rebroussements.

2. G. Polya (Zurich). — *Sur les fonctions entières.*

Soit $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ une fonction entière, $M(r)$ le maximum de $|g(z)|$ dans le cercle $|z| \leqq r$, $N(r)$ le nombre de zéros de $g(z)$ dans le même cercle, $n(r)$ l'indice du plus grand des termes $a_0|, |a_1|r, |a_2|r^2, \ldots$ $\Lambda = \overline{\lim_{r=\infty}} \dfrac{lg\, lg\, M(r)}{lg\, r}$ l'ordre apparent de $g(z)$.

I. D'un théorème général sur les suites infinies découlent les inégalités suivantes:

$$(1) \qquad \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{lg\, M(r)} \leqq \Lambda \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{lg\, M(r)}$$

$$(2) \qquad \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r)}{lg\, M(r)} \leqq \Lambda.$$

Il existe une fonction $\varphi(\Lambda)$, s'annullant pour $\Lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$, positive, quand Λ n'est pas entier, et telle que

$$(3) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r)}{lg\, M(r)} \geqq \varphi(\Lambda)$$

On a

$$\varphi(\Lambda) = \frac{\sin \pi \Lambda}{\pi} \qquad \text{pour } 0 \leqq \Lambda \leqq 1$$

$$\frac{1}{\varphi(\Lambda)} = \frac{\Lambda\, 2^{1-\Lambda}}{(2-\Lambda)(\Lambda-1)} + \int_0^1 \frac{\chi^{\Lambda-1} d\chi}{(1+\chi)^{\Lambda}}$$

pour $1 < \Lambda < 2$.

Les inégalités données ne sauraient être resserrées d'avantage, le signe $=$ étant valable pour certaines fonctions particulières. P. ex. les inégalités (2) et (3) se changent en égalités pour $\sigma(z)$ resp. pour $\xi(\sqrt{z})$; $\sigma(z)$ désigne la fonction de *Weierstrass,* un carré étant pris comme parallélogramme des périodes, $\xi(z)$ désigne la fonction de *Riemann.*

II. Si $\left|\dfrac{a_1}{a_0}\right|^2 + \left|\dfrac{a_2}{a_1}\right|^2 + \left|\dfrac{a_3}{a_2}\right|^2 + \ldots$ converge, le genre de $g(z)$ est 0 ou 1. La démonstration se base sur un théorème d'algèbre de M. *J. Schur.* Une autre démonstration, se basant sur des considérations moins particulières, serait désirable parce qu'elle devrait probablement s'écarter des méthodes usuelles.

3. LEON LICHTENSTEIN (Berlin). — *Ueber die mathematischen Probleme der Figur der Himmelskörper.*

Die Figur der Himmelskörper hat seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung zahlreiche führende Mathematiker beschäftigt, im XVIII. Jahrhundert Maclaurin, d'Alembert, Clairaut, Legendre und namentlich Laplace, der diesem Gegenstand den zweiten Band seiner Mécanique Céleste widmete. Im XIX. Jahrhundert brachten zunächst Untersuchungen von Dirichlet, Jacobi, Liouville und Riemann über Flüssigkeitsellipsoide, später namentlich Arbeiten von Poincaré (1885) und Liapounoff (1884) einen weiteren Fortschritt.

In einer bekannten Arbeit in den Acta mathematica (1885) spricht Poincaré den folgenden Satz aus. Sei T eine zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehörige Gleichgewichtsfigur einer rotierenden homogenen Flüssigkeit. Im allgemeinen gehört zu jedem von ω wenig verschiedenen Werte $\omega + \Delta\omega$ der Winkelgeschwindigkeit eine neue Gleichgewichtsfigur T_1 in der Umgebung von T. In besonderen Fällen kann indessen zu $\omega + \Delta\omega$ ($\Delta\omega > o$ oder $\Delta\omega < o$) mehr als eine oder auch gar keine Figur gehören, „in T tritt eine Verzweigung der Gleichgewichtsfiguren ein." Der von Poincaré für seine grundlegenden Sätze gegebene Beweis hat nur einen heuristischen Wert. In dem besonderen Falle der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide ist der vollständige Beweis von Liapounoff in einer Reihe grundlegender Abhandlungen, die in den Jahren 1903 bis 1916 erschienen sind, geliefert worden. Die Arbeiten von Liapounoff enthalten daneben noch die vollständige Erledigung des Stabilitätsproblems in der üblichen Fassung, sowie zahlreiche Einzelbetrachtungen, — alles für die Flüssigkeitsellipsoide.

In zwei vor kurzem erschienenen Arbeiten [Mathematische Zeitschrift Bd. 1 (1918) und Bd. 7 (1920)] habe ich unter anderem die Poincaréschen Sätze für beliebige Gleichgewichtsfiguren bewiesen. Die Beweismethode stellt zum Teil eine Verallgemeinerung und Vereinfachung der Liapounoffschen dar, sie führt aber darüber hinaus neue wesentliche methodische Gedanken namentlich potentialtheoretischer Art ein. Die nunmehr verfügbaren Hilfsmittel gestatten eine Anzahl klassischer Probleme einer exakten Lösung zuzuführen. Als das wichtigste Resultat ist die strenge Begründung der Laplaceschen Theorie der Saturnringe zu bezeichnen. Laplace hat als erster die möglichen Gleichgewichtsfiguren eines um einen Zentralkörper rotierenden, homogenen, flüssigen Ringes untersucht und gefunden, dass sein Querschnitt in einer ersten Näherung elliptisch ist. Später hat Frau S. Kowalewski die Annäherung einen Schritt weiter getrieben. Die Existenz ringförmiger Gleichgewichtsfiguren ist durch diese Arbeiten ebensowenig wie durch spätere Arbeiten von Poincaré wirklich bewiesen worden. Als ein weiteres Resultat sei die Begründung der Laplaceschen Theorie der Figur des Erdmondes genannt. Auch dürfte jetzt unter anderem die Behandlung nicht notwendig homogener, insbesondere gasförmiger Ringe in verhältnismässig einfacher Weise möglich sein.

4. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel) — *Sur les idéaux de nombres hypercomplexes.*

En cherchant à étendre à tous les systèmes de nombres complexes les propriétés des nombres entiers, comme Gauss l'avait fait avec un plein succès pour les nombres complexes ordinaires, les géomètres découvrirent que certains systèmes ne se prêtent pas à cette généralisation. Par exemple, la décomposition d'un nombre complexe entier en facteurs premiers, décomposition toujours possible, n'est pas toujours univoque. Il en résulte qu'un produit peut être divisible par un nombre entier sans qu'aucun des facteurs ne le soit, et quantité d'autres irrégularités. La théorie des idéaux, comme on le sait, fait tomber ces anomalies par un heureux changement de méthode. En faisant intervenir les idéaux de nombres, c. à d. certains ensembles de nombres entiers, à propriétés caractéristiques bien déterminées, au lieu d'opérer sur les nombres considérés isolément, Dedekind réussit à rétablir la simplicité arithnomique qui se manifeste dans l'arithmétique ordinaire. — Le domaine où la théorie des idéaux est applicable avec succès embrasse tous les corps de nombres algébriques dont on s'est occupé jusqu'ici : d'une part les systèmes où se maintient l'ancienne théorie des nombres, qui ne fait pas intervenir le concept d'idéal, d'autre part une infinité de systèmes où cette ancienne arithmétique n'est pas valable. Aussi croyait-on la théorie des idéaux d'une efficacité absolue, lorsqu'il s'agissait d'obtenir une arithnomie régulière. Or, il existe des systèmes de nombres complexes à multiplication associative, distributive et commutative, et contenant les nombres réels comme sous-groupe, où même la théorie des idéaux ne conduit pas à une arithmétique simple comparable à la classique. — Soit, dans l'un de ces systèmes, a un idéal non principal. Il peut arriver que la série de ses puissances successives :

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ldots\ldots,\ a^n,\ \ldots\ldots\ldots\ ad\ infin.$$

ne contienne aucun idéal principal. L'un des fondements de la théorie de Dedekind est ainsi détruit. Le conférencier décrit le système le plus simple possible de nombres complexes où cela se produit et termine sa communication en signalant quelques problèmes nouveaux qui surgissent de ce fait dans le domaine des nombres complexes généraux.

5. G. Tiercy (Genève). — *Une nouvelle propriété des courbes orbiformes.*

1. On appelle *orbiformes* des courbes fermées convexes, de largeur constante. Leur équation polaire tangentielle s'écrit :

$$p(\omega) = a[1 + f(\omega)], \text{ avec } f(\omega + \pi) = -f(\omega).$$

Considérons un point M de contact se mouvant sur une orbiforme, de telle manière que l'angle polaire tangentiel augmente proportionnellement au temps :

$$\omega = \delta t + \omega_0\,;$$

la projection P du point M sur un axe est animée d'un mouvement oscillatoire, auquel nous donnerons le nom de *mouvement harmonique d'orbiforme.*

2. Considérons plusieurs mouvements harmoniques d'orbiformes, d'amplitudes a_i différentes, d'époques tangentielles ε_i différentes, mais de même période tangentielle:

$$p_i = a_i \left[1 + f_i\left(\omega_i\right)\right], \quad \omega_i = \omega + \varepsilon_i.$$

Composons les normales p_i; soient $\overline{OS}$ la résultante, $\overline{OR}$ sa projection sur l'axe des x, et $\overline{ON}$ sa projection sur l'axe des Y. Puis, donnons à ω un accroissement π; et composons les nouveaux rayons vecteurs tangentiels $p_i\left(\omega_i + \pi\right)$; soient $\overline{OS'}$ la résultante, $\overline{OR'}$ et $\overline{ON'}$ ses projections sur les axes de coordonnées. En posant:

$$\Sigma\, a_i \cos \varepsilon_i = A \cos \varepsilon, \quad \Sigma\, a_i \operatorname{Sin} \varepsilon_i = A \operatorname{Sin} \varepsilon,$$

on obtient:

$$\overline{R'R} = 2\, A \cos\left(\omega + \varepsilon\right), \quad \overline{N'N} = 2\, A \operatorname{Sin}\left(\omega + \varepsilon\right).$$

On trouve donc la propriété que voici: le segment de droite $\overline{SS'}$ est de longueur constante égale à $2\,A$; et l'angle qui l'oriente présente une différence constante $(\varepsilon - \varepsilon_i)$ avec chacune des phases ω_i — D'ailleurs, le rayon vecteur tangentiel $\overline{OS}$ ne détermine pas une orbiforme.

3. On trouve facilement que la distance de l'origine à la droite $\overline{SS'}$ vaut:

$$P\left(\omega\right) = \Sigma\, a_i \left[1 + f_i\right] \operatorname{Sin}\left(\varepsilon - \varepsilon_i\right);$$

or, il vient:

$$P\left(\omega\right) + P\left(\omega + \pi\right) = o.$$

La courbe enveloppe de la droite $\overline{SS'}$, est donc une courbe d'envergure nulle, c'est-à-dire n'admettant qu'une seule et unique tangente parallèle à une direction donnée. Par conséquent, les courbes convexes parallèles à la courbe $P\left(\omega\right)$, et les développantes convexes de cette même courbe, seront de nouvelles orbiformes.

4. Dans les cas où tous les ε_i sont égaux, les rayons p_i sont portés par la même droite; alors:

$$P\left(\omega\right) = o,$$

et la résultante $\overline{OS}$ des rayons p_i définit directement une nouvelle orbiforme, de largeur $2\,A = 2\,\Sigma\, a_i$.

Si P est le point animé du mouvement harmonique d'orbiforme final, et si P_i sont les points animés des mouvements harmoniques donnés, on a en outre:

$$\overline{OP} = \Sigma\, \overline{OP_i}.$$

On remarquera que l'énoncé de ce théorème est identique à celui de la loi de Fresnel, donnant la composition de plusieurs mouvements harmoniques simples de même période.

6. Emch (Urbana U. S. A.). — ***Über Incidenzen von Geraden und ebenen algebraischen Kurven im Raume und die von ihnen erzeugten Flächen.***

Lüroth[1] hat Probleme dieser Art für den einfachsten Fall von Kegelschnitten untersucht. Mit Hilfe einer systematischen Anwendung einer eleganten Form von Incidenzformeln, gelingt es Emch, nicht nur

[1] Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Geraden im Raume schneiden. Crelles Journal, 68. Band, S. 185—192 (1868).

alle Resultate Lüroths, sondern die allgemeinsten für Kurven n^{ter} Ordnung, durch eine relativ einfache analytische Methode zu erhalten.

Einige der hauptsächlichsten Resultate sind hier mitgeteilt:

1. Das System von Ebenen, von welchen jede $\frac{n(n+3)}{2}+1$ unabhängige Geraden im Raume in Punkten schneiden, welche auf einer Kurve n^{ter} Ordnung liegen, bilden eine Fläche von der Klasse $\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$.

2. Die ebenen Kurven n^{ter} Ordnung, deren Ebenen durch eine feste Linie gehen, und $\frac{n(n+3)}{2}$ unabhängige Geraden im Raume schneiden, erzeugen eine Fläche von der Ordnung $\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$.

3. Die ebenen Kurven n^{ter} Ordnung, welche jede von $\frac{n(n+3)}{2}+2$ unabhängige Geraden im Raume einfach schneiden, bilden eine abwickelbare Fläche von der Klasse $\frac{n^2(2n^4+12n^3+17n^2-3n+8)}{18}$.

4. Es gibt

$$\frac{n^3(n^2+3n+2)(n^4+6n^3+4n^2-15n+4)}{27}$$

Kurven n^{ter} Ordnung, welche jede von $\frac{n(n+3)}{2}+3$ unabhängige Geraden im Raume schneiden.

5. und 6. Die Ebenen der ebenen Kurven n^{ter} Ordnung, von welchen jede eine feste ebene Kurve n^{ter} Ordnung, in n Punkten, und $\frac{n(n+1)}{2}+1$, respektive $\frac{n(n+1)}{2}+2$ unabhängige Geraden im Raume schneidet, bilden eine Fläche (resp. eine abwickelbare Fläche) von der Klasse:

$$\frac{n(2n^2+3n+7)}{6},\ \text{respektive}\ \frac{n^2(4n^4+12n^3+19n^2+24n+49)}{36}.$$

7. Es gibt:

$$\frac{n^3(8n^6+36n^5+66n^4+99n^3+123n^2+89n+343)}{216}$$

ebene Kurven n^{ter} Ordnung, welche eine feste ebene Kurve n^{ter} Ordnung in n Punkten und $\frac{n(n+1)}{2}+3$ unabhängige Geraden im Raume schneiden.

7. S. Bays (Fribourg) — *Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner.*

La question de déterminer le nombre des systèmes de triples de Steiner *différents* semble encore loin d'être résolue. White[1] (1915) a

[1] H. White. Transactions of the Amer. Mathem. Society vol. XXI (1) 1915. p. 13.

montré que pour N = 31 déjà le nombre des systèmes de triples différents dépasse 37×10^{12}. Cole[1] avec White et Cummings (1916) ont obtenu les systèmes de triples différents pour $N = 15$; leur nombre est 80. Pour une classe particulière de solutions du problème des triples de Steiner, les systèmes de triples *cycliques,* la question paraît déjà plus aisée. Pour $N = 6\,n + 1$, premier (ou de la forme p^a) j'ai une méthode permettant d'obtenir les systèmes cycliques de Steiner différents. Elle est basée principalement sur l'emploi des substitutions métacycliques (substitutions de la forme $|x, \alpha + \beta x|$, β premier avec N), et elle donne en même temps les groupes de substitutions qui appartiennent à ces systèmes. Jusqu'ici, à 2 exceptions près, ces groupes ne sont jamais que des diviseurs du groupe métacyclique. Dans un premier travail[2], j'avais obtenu les systèmes cycliques différents pour les 1res valeurs de N, jusqu'à $N = 31$; j'ai depuis appliqué la méthode au cas $N = 37$, et je voulais également donner dans cette note le résultat pour N = 43; je n'ai pu terminer ma recherche dans le temps voulu. Pour $N = 43$, le nombre S'' dépasse 128; ce nombre S'' est maintenant le nombre intéressant du problème; le nombre S des systèmes cycliques de Steiner différents n'est plus qu'une fonction simple des systèmes S''. Mes résultats sont contenus dans ce tableau.

N	n	S''	S'	S
7	1	1	1	1
13	2	1	1	1
19	3	2	4	4
31	5	8	64	80
37	6	32	455	820
25	4	2	15	12

S = nombre des systèmes cycliques de triples différents.

S' = n. des systèmes de *caractéristiques.*

S'' = n. des systèmes de *caractéristiques irréductibles l un à l'autre* par les substitutions d'un groupe cyclique $\{|x, \underline{ar}|\}$, où j'entends par l'élément $\underline{a}$, la valeur absolue du plus petit reste positif ou négatif de a (mod. N).

J'entrevois actuellement une simplification dans la recherche des systèmes S'' qui permettra d'effectuer encore la recherche pour le nombre premier suivant $N = 61$, sans demander trop de temps. Peut-être alors les données seront-elles suffisantes pour *supposer* la fonction S'' de N (N premier).

8. F. Gonseth (Berne). — *Sur une application de l'équation de Fredholm.*

Il s'agit de déterminer une solution de l'équation différentielle:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + l(x)\,y = m(x)$$

avec différentes conditions limites.

La méthode est exposée pour l'équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + a\frac{d^2 y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = d, \tag{1}$$

[1] F. N. Cole, L. D. Cummings et H. S. White. Proceedings of the National Academy of Sciences vol III 1916, p. 197.

[2] Note des Comptes-Rendus t. 165, p. 543, 22 octobre 1917.

lorsque la fonction inconnue y prend pour $x = x_1$, x_2 et x_3, les valeurs données d'avance y_1, y_2 et y_3.

Posant: (2) $y = \int_{x_1}^{x_3} A(x,s)\, f(s)\, ds + V(x)$, où $A(x,s)$, en général continue, a pour $x = s$ une discontinuité égale à $\alpha(x)$, $\frac{\delta A}{\delta x}$ et $\frac{\delta^2 A}{\delta x^2}$ présentant au même endroit les discontinuités $\beta(x)$ et $\gamma(x)$.

De plus $\frac{\delta^3 A}{\delta x^3}$ sera identiquement nulle.

Dans ces conditions $A(x_1 s)$ sera de la forme:

$$(3) \begin{cases} l_1 (x - s)^2 + m_1 (x - s) + n_1 & \text{pour } s \leqq x \\ l_2 (x - s)^2 + m_2 (x - s) + n_2 & \text{pour } s > x. \end{cases}$$

Les différences $l_2(s) - l_1(s)$ .. etc. sont déterminées par les conditions précédentes, et jouent seules un rôle. L'équation (2) dérivée 3 fois fournit:

$$y''' + \alpha(x) f''(x) + [\beta(x) + 2\alpha'(x)]\, f'(x) + [\gamma(x) + \beta'(x) + \gamma''(x)]\, f(x) = V'''(x).$$

L'identification de cette équation avec (1) détermine $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$. On peut remplacer $V(x)$ par l'expression

$$V(x) + C_1 (x - x_2)(x - x_3) + C_2 (x - x_3)(x - x_1) + C_3 (x - x_1)(x - x_2).$$

Les conditions limites déterminent les C, une fois $V(x)$ remplacée par cette nouvelle expression, dans (2). Cette dernière prend la forme

$$y = \int_{x_1}^{x_3} B(xs)\, f(s)\, ds + W(x).$$

Le point essentiel est que la fonction f ne joue aucun rôle dans $B(xs)$ et $W(x)$; de sorte que l'équation de Fredholm

$$y(x) = \int_{x_1}^{x_3} B(xs)\, y(s)\, ds + W(x) \quad \text{résout le problème.}$$

9. C. Cailler (Genève). — *Sur un théorème relatif à la série hypergéométrique et sur la série de Kummer.*

M. C. Cailler donne diverses généralisations de la formule obtenue par lui il y a quelques années.

$$\int_0^1 z^{\gamma - 1} (1 - z)^{\gamma' - 1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\, F(\alpha', \beta', \gamma', y(1 - z)), dz =$$

$$= \frac{(\gamma - 1)!\, (\gamma' - 1)!}{(\gamma + \gamma' - 1)!} (1 - y)^{\alpha - \beta'} F(\alpha, \beta, \gamma + \gamma', x + y - xy)$$

laquelle a lieu sous réserve des conditions:

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma'.$$

Parmi ces extensions, citons les suivantes:

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\, F(\alpha', \beta', \gamma', 1-z)\, dz =$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!\,(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'-1)!}{(\gamma+\gamma'-\alpha'-1)!\,(\gamma+\gamma'-\beta'-1)!} F(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta', \alpha, \gamma+\gamma'-\alpha', x)$$

qui a lieu moyennant la relation

$$\beta+\beta'=\gamma+\gamma',$$

et

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \gamma;\, xz)\, F(\alpha', \gamma';\, y(1-z))\, dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} e^x\, F(\alpha', \gamma+\gamma';\, y-x).$$

Dans cette dernière formule, F est la fonction de Kummer:

$$F(\alpha, \gamma;\, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

10. Ch. Cailler (Genève). — *Sur un théorème de Cinématique.* Mr. C. Cailler rappelle d'abord les définitions classiques pour la vitesse d'un point, d'un plan et d'une droite. Cette dernière est une quantité complexe formée à l'aide d'une unité ε, telle que $\varepsilon^2=o$

Une droite *appartient* à une axe a lorsqu'elle rencontre l'axe sous un angle droit; un point et un plan appartiennent à une même axe, si le point est sur cette axe, et si le plan le contient.

Ces définitions étant admises, imaginons qu'un point p, un plan π et une droite ϑ fassent partie d'un solide a auquel ils appartiennent étant fixe. Nous avons alors le théorème suivant, en 4 parties, dont seule la 1re est classique:

1° La projection sur a de la vitesse d'un point p appartenant à a est la même quel que soit ce point. Soit g'' cette projection constante.

2° La projection sur a de la vitesse angulaire d'un plan est la même quel que soit ce plan. Soit g' cette projection constante.

3° La projection sur a de la vitesse linéaire d'une droite appartenant à a est la même, quelle que soit la droite. Soit g cette projection constante.

4° $$g=g'+\varepsilon g''.$$

11. M. Plancherel (Fribourg) et Edw. Strässle (Stans). — *Sur l'intégrale de Poisson pour la sphère.*

L'intégrale de Poisson

$$U(r, \vartheta, \Phi) = \frac{1}{4\pi} \int_S u(\vartheta', \Phi') \frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}\, d\sigma'$$

définit, lorsque $u(\vartheta, \Phi)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur la surface sphérique S de rayon 1, une fonction harmonique à l'intérieur de S et l'on sait que $U(r, \vartheta, \Phi) \rightarrow u(\vartheta, \Phi)$ presque partout lorsque $r \rightarrow 1$, en particulier aux points de continuité de u.

Il ne semble pas que l'étude de la limite pour $r \rightarrow 1$ des dérivées $D_{p,q}\, U(r, \vartheta, \Phi) = \dfrac{d^{p+q}\, U}{d\,\vartheta^p\, d\,\Phi^q}$ ait été faite. La méthode employée par M. de la Vallée Poussin dans le cas du cercle ne peut être utilisée sur la sphère. On peut, il est vrai, étudier ces dérivées par une méthode directe; malheureusement les calculs deviennent immédiatement très longs et la méthode ne semble applicable avec succès que pour les petites valeurs de $p + q$. Cette méthode a cependant l'avantage de conduire à des résultats très généraux dans lesquels interviennent les dérivées généralisées de u.

Une méthode plus simple repose sur la remarque suivante: Si dans un domaine Σ de S, u est une fonction analytique du point (ϑ, Φ) $U(r, \vartheta, \Phi)$ est prolongeable analytiquement à travers Σ. De cette remarque à conclure que dans le cas particulier où u est analytique on a, dans Σ, $D_{p,q}\, U(r, \vartheta, \Phi) \rightarrow D_{p,q}\, u(\vartheta, \Phi)$ lorsque $r \rightarrow 1$, il n'y a qu'un pas.

Si u possède au point (ϑ, Φ) une différentielle totale d'ordre $n = p + q$, on décomposera à l'aide de la formule de Taylor u en deux parties: $u = u_n + r_n$ telles que u_n soit analytique et qu'au point (ϑ, Φ) $d_\nu\, u_n = d_\nu\, u$ $(\nu \leq n)$. U se décomposera d'une manière corrélative en deux parties: $U = U_n + R_n$. On aura au point (ϑ, Φ) $D_{p,q}\, U_n \rightarrow D_{p,q}\, u_n = D_{p,q}\, u$. Or, on peut montrer, à l'aide des propriétés du facteur de discontinuité $\dfrac{1 - r^2}{1 - 2\, r \cos \omega + r^2}$ que $D_{p,q}\, R_n \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 1$. On obtient ainsi le théorème.

En tout point (ϑ, Φ) où u possède une différentielle totale d'ordre $n = p + q$, on a $D_{p,q}\, U(r, \vartheta, \Phi) \rightarrow D_{p,q}\, u(\vartheta, \Phi)$ lorsque $r \rightarrow 1$.

Laissant de côté un théorème analogue concernant la convergence uniforme de $D_{p,q}\, U$ *vers* $D_{p,q}\, u$ nous remarquerons, pour terminer, que si $u \sim \Sigma X_n (\vartheta, \Phi)$ est le développement formel de u en série de Laplace, on a $U(r, \vartheta, \Phi) = \Sigma\, r^n\, X_n (\vartheta, \Phi)$. Par conséquent, le procédé de sommation de Poisson est applicable au calcul des dérivées de tout ordre de u, là où elles existent.

La même méthode peut s'appliquer à l'étude des dérivées dans d'autres procédés de sommation, tel celui dans lequel le facteur de convergence r^n de Poisson est remplacé par $e^{-n^2 t}$ $(t \rightarrow o)$.

12. MICHEL PLANCHEREL (Fribourg). — *Une question d'Analyse.*

Lors de recherches sur l'inscription d'un carré dans une courbe plane fermée et d'un octaèdre régulier dans une surface fermée, j'ai été amené à résoudre dans un cas particulier le problème suivant:

Soit $y = f(x)$ une courbe continue et univoque dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, telle que dans cet intervalle $f(x) \geq O$ et que $f(a) = f(b)$

$= O$. Soient M_1, M_2 deux points mobiles sur cette courbe, assujettis à avoir à chaque instant t les mêmes ordonnées. A l'instant $t = O$, M_1 se trouve au point (a, O), M_2 au point (b, O). Peut-on coordonner les mouvements de ces 2 points de manière à ce qu'ils se rencontrent?

Le problème est équivalent à la détermination de deux fonctions $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ continues dans l'intervalle $O \leqq t \leqq 1$, telles que pour $O \leqq t \leqq 1$

$$a \leqq \Phi_1(t) \leqq b, \quad a \leqq \Phi_2(t) \leqq b,$$
$$f\big(\Phi_1(t)\big) = f\big(\Phi_2(t)\big)$$

et que, pour $t = o$

$$\Phi_1(O) = a, \quad \Phi_2(O) = b$$

et pour $t = 1$

$$\Phi_1(1) = b, \quad \Phi_2(1) = a.$$

Si $f(x)$ n'a qu'un nombre fini d'extrémas dans (a, b), la résolution du problème est immédiate. Il s'agirait de savoir si la seule hypothèse de la continuité de $f(x)$ est suffisante pour assurer la possibilité du problème; si non, quelles conditions supplémentaires devraient être ajoutées.

13. R. Wavre (Neuchâtel). — *Sur les développements d'une fonction analytique en série de polynômes.*

Soit
$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$$
une fonction analytique définie par son développement de Taylor au voisinage de $x = o$.

Un théorème de Mittag Leffler permet de donner de $f(x)$ un développement en série de polynômes représentant cette fonction dans tout le plan, à l'exception de lignes joignant ses points singuliers au point à l'infini.

Soit
$$M[f(x)] = \sum_{n=o}^{\infty} (c_{on}\, a_o + c_{1n}\, a_1\, x + \ldots + c_{nn}\, a_n\, x^n)$$
un pareil développement.

Monsieur Painlevé posait, dans sa note insérée dans les „Leçons sur les fonctions de variables réelles" de Mr E. Borel, la question suivante :

Existe-t-il un développement M tel que pour toute $f(x)$
$$M'[f(x)] = M[f'(x)].$$

La réponse est négative. En effet un pareil développement serait de la forme
$$\sum_{o=n}^{\infty} (c_{on}\, a_o + c_{o\,(n-1)}\, a_1\, x + \ldots + c_{oo}\, a_n\, x^n)$$
$$\text{avec} \quad \sum_{n=o}^{\infty} c_{on} = 1$$
et appliqué à la fonction $\dfrac{1}{1-x}$ il diverge pour $|x| > 1$