

**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft =  
Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della  
Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 99 (1917)

**Vereinsnachrichten:** Sektion für Mathematik

**Autor:** [s.n.]

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# I. Sektion für Mathematik

Zugleich Versammlung der schweizerischen mathematischen Gesellschaft

Dienstag, den 11. September 1917.

*Einführende:* Prof. Dr. F. RUDIO (Zürich),  
Prof. Dr. R. FUETER (Zürich).

*Präsident:* Prof. Dr. M. GROSSMANN (Zürich).

*Sekretär:* Prof. Dr. L. CRELIER (Biel).

**1.** A. EMCH (Urbana U. S. A.). — *Über ebene Kurven, welche die  $n^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln in der komplexen Ebene zu reellen Brennpunkten haben.*

**2.** G. PÓLYA (Zürich). — *Über arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen.*

I. Wenn das Integral einer rationalen Funktion nicht rational ausfällt, so kann seine Potenzreihe nicht lauter ganzzahlige Koeffizienten besitzen.

II. Wenn die Potenzreihe einer rationalen Funktion rationale Koeffizienten besitzt, so gehen in den Nennern dieser Koeffizienten nur endlich viele Primzahlen auf (trivialer Fall eines Eisensteinschen Satzes). Wann sind auch die Zähler nur aus endlich vielen Primfaktoren zusammengesetzt?

Die Antwort lässt sich durch Kombination der einfachsten Sätze der Idealtheorie mit Konvergenzbetrachtungen erbringen und lautet so: alle fraglichen Reihen lassen sich aus der geometrischen Reihe durch wiederholte Anwendung folgender 5 Operationen ableiten:

1. Addition eines Polynoms zu der Reihe,
2. Multiplikation der Reihe mit  $ax^r$ ,
3. Variablenvertauschung  $x \mapsto ax$ ,
4. Variablenvertauschung  $x \mapsto x^m$ ,
5. Addition „exponentenfremder“ Reihen.

3. Ferd. GONSETH (Zürich). — *Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux.*

Le théorème dont il s'agit est une extension du th. connu de Graves: Si l'on tend un fil passé autour d'une ellipse par une pointe, celle-ci peut décrire une ellipse confocale à la première. L'analogie s'énonce:

Théorème. On mène de  $P$  le cône tangent à un ellipsoïde; l'intégrale de la courbure moyenne sur la surface formée du cône jusqu'aux points de contact et de la portion d'ellipsoïde qui fait suite est constante si  $P$  reste sur un ellipsoïde confocal au premier. La méthode de démonstration est exposée pour le th. de Graves. L'intégrale  $\int \int dp d\varphi$  étendue à un ensemble de droites  $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = o$  est (Crofton) la mesure de l'ensemble. Les sécantes d'une courbe convexe fermée ont une mesure égale au périmètre de la courbe. — Les mêmes droites étant  $ux + vy + 1 = o$  la mesure est aussi égale à la surface non euclidienne de l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes.

$$(1) x = u; y = v.$$

dans un plan où la conique absolue est  $x^2 + y^2 = o$ .

Deux ellipses confocales  $E_1$  et  $E_2$  sont transformées par les formules (1) en deux ellipses  $E'_1$  et  $E'_2$ . Le théorème de Graves sera exact si l'aire non euclidienne de la portion de plan située à l'extérieur de la courbe fermée, formée par  $E'_2$  et une tangente à  $E'_1$ , est constante lorsque cette tangente varie. On mènera une tangente voisine, et il suffira de démontrer l'égalité (sens non-euclidien) de deux triangles infiniment petits. Dans l'espace on définira semblablement la mesure d'un ensemble de plans

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = o$$

ou bien  $ux + vy + wz + 1 = o$

qui sera égale au volume non euclidien de l'ensemble des points de coord. rect.  $x = u; y = v; z = w$ ; dans un espace dont la quadrique absolue est  $x^2 + y^2 + z^2 = o$ .

En particulier, les plans coupant une surface convexe fermée ont pour mesure l'intégrale de la largeur, c'est-à-dire (d'après une formule de Minkowski), l'intégrale de la courbure moyenne sur cette surface. La démonstration se calque, dès ici, sur la précédente.

4. L. KOLLROS (Zürich). — *Propriétés métriques des courbes algébriques.*

Toute propriété métrique peut être considérée comme projective si l'on fait intervenir les éléments absous. On peut donc transformer les propriétés métriques par une collinéation ou une réciprocité. Ainsi le théorème de Carnot sur les courbes algébriques planes coupées par un triangle, devient — par une réciprocité dans laquelle les points cycliques correspondent à 2 côtés du triangle — le théorème suivant de Laguerre: Si par un point, on même les  $n$  tangentes à une courbe algébrique plane de classe  $n$  et si l'on joint ce point aux  $n$  foyers réels de la courbe, les 2 faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation.<sup>1</sup>

D'autre part, à un théorème où un système de droites variables a une orientation constante, on peut, par un raisonnement simple, faire correspondre un théorème où un système de points variables a un centre de gravité fixe, de telle sorte qu'à un foyer de la première figure corresponde une asymptote de la seconde.

Exemples 1. Au théorème de Laguerre cité plus haut, correspond le suivant: Le centre de gravité des points de rencontre d'une droite avec une courbe du  $n^{\text{me}}$  ordre est le même que celui des points d'intersection de la droite avec les asymptotes de la courbe.

2. Les systèmes de tangentes menées d'un même point à deux courbes de même classe ont même orientation si le point est foyer d'une des courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières. (Humbert.)

3. L'orientation du système des  $m n$ -tangentes communes à deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une courbe qui lui est homofocale. (Laguerre.)

Les centres de gravité des 2 systèmes de points de rencontre de deux courbes algébriques de même ordre par une asymptote d'une courbe du faisceau ponctuel déterminé par les deux premières coïncident.

Le Centre de gravité des points de rencontre de 2 courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une autre qui a les mêmes asymptotes.

<sup>1</sup> Deux systèmes de  $n$  droites ont même orientation lorsque la somme des angles que font les  $n$  droites avec un axe fixe est la même pour les 2 systèmes (à un multiple de  $\pi$  près).

5. O. SPIESS (Basel). — *Ein Satz über rationale Funktionen.*

Lie hat die Vermutung ausgesprochen, dass jede analytische Funktion  $f(x)$  durch Iteration einer Infinitesimalsubstitution  $x+g(x) dt$  erzeugt werden könne und also Bestandteil einer kontinuierlichen Transformationsgruppe sei. Es ist indess bisher nicht gelungen, diesen Satz zu beweisen, selbst nicht für die viel engere Klasse der algebraischen Funktionen. Hier soll nun die Lie'sche Vermutung wenigstens für die rationalen Funktionen als richtig erwiesen werden.

Das Problem lässt sich zurückführen auf die Aufgabe, zu einem gegebenen  $f(x)$  eine Funktion  $\Phi$  zu bestimmen, die der Gleichung genügt

$$(1) \quad \Phi[f(x)] = \varrho \cdot \Phi(x)$$

Die erzeugende Infinitesimalsubstitution ist dann nämlich bestimmt durch  $g(x) = \Phi : \Phi'$ . Nun haben Koenigs, Grévy und Leau seit langem gezeigt, dass in der Umgebung gewisser Fixpunkte von  $f(x)$  Lösungen von (1) existieren. Ist speziell  $f(x)$  rational, so versagen diese Methoden nur dann, wenn für jeden Fixpunkt  $a_k$

$$(2) \quad \varepsilon_k = f'(a_k) = e^{2\pi i \cdot h_k} \quad (h_k = \text{irrational}) \text{ ist.}$$

Bloss falls  $f(x)$  linear ist, existiert auch dann eine Lösung, nämlich  $\Phi = x$ . Die Lie'sche Behauptung ist also für rationale Funktionen erwiesen, wenn gezeigt wird:

Satz: Eine rationale Funktion, deren sämtliche Fixpunkte die Eigenschaft (2) haben, ist notwendig linear.

Beweis: Die Fixpunkte  $a_1 \dots a_n$  von  $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$  (die wir alle im Endlichen annehmen dürfen), sind Wurzeln der Gleichung  $\Psi \equiv xs - r = 0$ . Es folgt sofort

$$\varepsilon_k = f'(a_k) = 1 - \frac{\Psi'(a_k)}{s'(a_k)} \quad [\text{wegen (2)}]$$

Die Zahlen  $\omega_k = \frac{1}{1-\varepsilon_k} = \frac{s(a_k)}{\Psi'(a_k)}$  sind ebenso wie die  $\varepsilon_k \neq 0, 1, \infty$ , und

also gilt nach Lagrange  $\frac{s}{\Psi} = \sum_1^n \frac{\omega_k}{x-a_k}$

daraus ergibt sich:  $\sum_1^n \omega_k = \left[ \frac{xs}{\Psi} \right]_{x=\infty} = 1$  oder

$$(3) \quad \frac{\omega_1 + \dots + \omega_n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Nun liegen nach (2) die Punkte  $\varepsilon_k$  auf dem Einheitskreis um  $O$ , und also die Punkte  $\omega_k$  auf der zur reellen Axe senkrechten Geraden durch den Punkt  $x = \frac{1}{2}$ . Da aber nach (3) der Schwerpunkt der  $\omega_k$  in  $x = \frac{1}{n}$  liegt, muss  $n = 2$  sein, und somit  $f(x)$  linear. *q. e. d.*

**6. A. HURWITZ (Zürich). — *Verallgemeinerung des Pohlkeschen Satzes* (aus einem Brief an Herrn Kollros).**

Sind 2 Tetraeder gegeben, so kann man sie immer — indem man eines derselben ähnlich verändert — in eine solche Lage bringen, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Spitzen untereinander parallel sind.

Sind nämlich  $A B C D$  und  $A' B' C' D'$  die gegebenen Tetraeder, so betrachte man die Affinität  $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$ . Vermöge derselben geht die Kugel  $K$ , welche  $A B C D$  umschrieben ist, in ein Ellipsoid  $K'$  über, welches  $A' B' C' D'$  umschrieben ist. Jetzt bestimme man einen Kreisschnitt  $c'$  des Ellipsoides  $K'$ . Dem Kreise  $c'$  entspricht in der Affinität ein Kreis  $c$  auf der Kugel  $K$ . Das Tetraeder  $A B C D$  mit der Kugel  $K$  und dem daraufliegenden Kreis  $c$  dilatiere man in solchem Maßstabe, dass der Kreis  $c$  in einen dem Kreise  $c'$  gleichen Kreis  $c_1$  übergeht.

Nun bringe man das zu  $A B C D$  ähnliche Tetraeder  $A_1 B_1 C_1 D_1$  in eine solche Lage, dass der Kreis  $c_1$  mit dem Kreis  $c'$  Punkt für Punkt zur Deckung kommt. Dann sind die beiden affinen Räume in perspektive Lage gebracht und die 4 Geraden  $A_1 A'$ ,  $B_1 B'$ ,  $C_1 C'$ ,  $D_1 D'$  sind untereinander parallel.

Entsprechend den zwei Scharen von Kreisschnitten des Ellipsoids  $K'$  gibt es zwei wesentlich verschiedene Lösungen des Problems.

Wenn die 4 Punkte  $A B C D$  in derselben Ebene liegen und  $A' B' C' D'$  von drei durch eine Ecke gehenden Würfelkanten gebildet ist, so findet man den Pohlkeschen Satz als Spezialfall.

**7. C. CARATHÉODORY (Göttingen). — *Über die geometrische Behandlung der Extrema von Doppelintegralen.***

Neben den Randwertproblemen, denen die Variationsrechnung ihr Dasein verdankt und dem von Lagrange erfundenen Variations-

kalkül, dessen Bedeutung für alle möglichen Anwendungsgebiete immer grösser wird, spielt seit fast hundert Jahren die aus der Optik und der Mechanik hervorgegangene Hamilton-Jacobische Theorie eine gleich wichtige Rolle.

Der Versuch, diese Theorie auf Doppelintegrale zu erweitern, ist vor einigen Jahren gemacht worden<sup>1</sup>; hier will ich skizzieren, wie man das Wesentliche der Hamilton-Jacobischen Resultate mit ganz einfachen Mitteln erhalten kann, wenn man für die gesuchte Lösung keine Randwerte von vornherein vorschreibt und daher die spezifischen Schwierigkeiten des Randwertproblems vermeidet.

Es sei

$$(1) \quad J = \iint f(x, y, z; z_x, z_y) dx dy$$

das zu untersuchende Doppelintegral. Wir betrachten eine zweiparametrische Schar

$$(2) \quad \begin{aligned} S(x, y, z) &= \lambda \\ T(x, y, z) &= \mu \end{aligned}$$

von beliebigen Kurven, die den Raum durchsetzen und die man als ein Bündel von unendlich dünnen Röhren auffassen kann. Auf jeder beliebigen Fläche  $z = z(x, y)$  schneidet eine dieser Röhren ein Flächenelement aus, für welches man den Wert des Integrals (1) folgendermassen berechnen kann.

Man setze

$$\begin{aligned} \bar{S}(x, y) &= S(x, y, z(x, y)) \\ \bar{T}(x, y) &= T(x, y, z(x, y)) \end{aligned}$$

und bilde die Funktionaldeterminante

$$(3) \quad \begin{aligned} A(x, y, z; z_x, z_y) &= \frac{d(\bar{S}, \bar{T})}{d(x, y)} \\ &= \begin{vmatrix} S_x + S_z \cdot z_x & S_y + S_z \cdot z_y \\ T_x + T_z \cdot z_x & T_y + T_z \cdot z_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist nach (1), (2) und (3)

$$J = \iint \frac{f}{A} d\lambda d\mu$$

und der gesuchte Wert von  $J$  für das ausgeschnittene Flächenelement

$$(4) \quad \frac{f}{A} d\lambda d\mu.$$

---

<sup>1</sup> G. Prange. Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale.  
Inaug.-Diss., Göttingen 1915.

Dieser Wert, der von  $z_x$  und  $z_y$ , d. h. von der Stellung der Tangentialebene der gegebenen Fläche  $z = z(x, y)$  abhängt, ist am kleinsten, wenn die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta \cdot f_{z_x} - f \cdot \Delta_{z_x} = 0 \\ \Delta \cdot f_{z_y} - f \cdot \Delta_{z_y} = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind und wenn ausserdem das Minimum von  $f: \Delta$  als Funktion von  $z_x, z_y$  für die durch (5) errechneten Werte dieser letzten Grössen gesichert ist (Legendre'sche bzw. Weierstrass'sche Bedingung).

Den Minimalwert des Ausdrucks (4) nennen wir den Querschnitt der betrachteten Röhre in ihrem Schnittpunkte mit der Fläche  $z = z(x, y)$ .

Nun verlangen wir von der Kurvenschar (2), dass sie lauter Röhren konstanten Querschnitts enthalte. Dies liefert die Gleichung

$$\frac{f}{\Delta} = \psi(\lambda, \mu),$$

wo  $\psi(\lambda, \mu)$  zunächst eine willkürliche Funktion bedeutet. Bemerkt man aber, dass man stets durch eine geeignete Transformation der Parameter  $\lambda, \mu$  die Funktion  $\psi(\lambda, \mu) \equiv 1$  setzen kann, so erhält man schliesslich das Gleichungssystem

$$(6) \quad \begin{cases} f = \Delta \\ f_{z_x} = \Delta_{z_x} \\ f_{z_y} = \Delta_{z_y} \end{cases}$$

aus dem man die ganze Variationsrechnung für Doppelintegrale mit geringer Mühe entwickeln kann.

### 8. D. HILBERT (Göttingen). — Axiomatisches Denken.

Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir, dass dieselben einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt mit Hilfe eines gewissen Fachwerkes von Begriffen in der Weise, dass dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe heisst die Theorie des Wissensgebietes. Weiter erkennen wir, dass

der Konstruktion des Fachwerkes einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zu Grunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen. Diese grundlegenden Sätze können von einem ersten Standpunkt aus als die Axiome der einzelnen Wissensgebiete angesehen werden. Das Bestreben, diese Axiome ihrerseits zu erklären, führt meist zu einem neuen System von Axiomen, d. h. zu einer tiefer liegenden Axiomsschicht. Das Verfahren der axiomatischen Methode kommt also einer Tieferlegung der Fundamente der einzelnen Wissensgebiete gleich.

Soll nun die Theorie eines Wissensgebietes durch das sie darstellende Fachwerk der Begriffe dem Zweck, nämlich der Orientierung und Ordnung dienen, so muss es vornehmlich zwei Anforderungen genügen: erstens soll es einen Überblick über die Abhängigkeit, bzw. Unabhängigkeit und zweitens eine Gewähr für die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Theorie bieten. Von besonderer Wichtigkeit ist es, die Widerspruchsfreiheit zu prüfen, weil das Vorhandensein eines Widerspruchs offenbar den Bestand der ganzen Theorie gefährdet. Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit gelingt im allgemeinen in den geometrischen und physikalischen Theorien durch Zurückführen auf das Problem der Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome. Im Falle der Axiome der Arithmetik ist dieser Weg der Zurückführung auf ein anderes spezielleres Wissensgebiet offenbar nicht gangbar, weil es außer der Logik überhaupt keine Disziplin mehr gibt, auf die alsdann eine Berufung möglich wäre. Es scheint somit nötig, die Logik selbst zu axiomatisieren und zu zeigen, dass die Arithmetik nur ein Teil der Logik ist. Dieser Weg ist seit langem vorbereitet und am erfolgreichsten durch den scharfsinnigen mathematischen Logiker Russell eingeschlagen worden. Die Axiomatisierung der Logik ist ein grosszügiges Unternehmen, das mit einer Reihe prinzipieller spezifisch mathematischer Fragen zusammenhängt. Sie bildet das wichtigste und schwierigste Problem der logisch mathematischen Erkenntnistheorie.

#### 9. A. SPEISER (Zürich). — *Gleichungen 5. Grades.*

Die alternierende Gruppe von 5 Variablen ist bekanntlich isomorph mit den 60 Drehungen des Icosaeders. Sie gestattet daher eine Darstellung durch ternäre lineare Substitutionen:

$$S = \begin{pmatrix} s \\ i_r \end{pmatrix} \quad r \} = 1, 2, 3 \quad S = E, A, B \dots$$

sowie durch lineare gebrochene Substitutionen:

$$x' = \frac{s_1 x + s_2}{s_3 x + s_4}$$

Ist  $\omega$  eine erzeugende Zahl eines Körpers mit dieser Gruppe und sind  $\omega = \omega_E, \omega_A, \dots, \omega_S, \dots$  die konjugierten, so erfahren die drei Zahlen

$$A_1 = \sum_S s_{11} \omega_S, \quad A_2 = \sum_S s_{12} \omega_S, \quad A_3 = \sum_S s_{13} \omega_S$$

beim Übergang zu der konjugierten ternären Substitutionen und

$$\alpha = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 A_1 A_3}}{2 A_1}$$

erfährt dabei die gebrochenen linearen Substitutionen. Damit ist das Problem der Gleichung 5. Grades auf ein einparametriges zurückgeführt in der allgemeinsten Weise.

#### 10. S. BAYS (Fribourg). — *Sur les systèmes de triples de 13 éléments.*

La preuve que pour 13 éléments le système cyclique de Netto, et le système donné par Kirkmann, Reiss, de Vries, sont les 2 seuls systèmes de triples de Steiner différents possibles, peut être faite, sans l'aide d'aucune notion particulière et d'une manière assez simple, en construisant directement les systèmes de triples de 13 éléments qui ne contiennent pas un triple fixé  $a b c$ . Un système de triples de Steiner qui ne contient pas le triple  $a b c$ , contient les 3 triples:  $b c a, c a \beta, a b \gamma$  ( $a, \beta, \gamma \neq a, b, c$  et entre eux) où  $a, \beta, \gamma$  peuvent être tous les arrangements de 10 éléments 3 à 3. Pour un arrangement  $a, \beta, \gamma$ , fixé, il n'y a que 2 possibilités, qui donnent, pour la construction du système, les seules dispositions suivantes qui s'écrivent aisément:

I<sup>e</sup> cas. Le triple  $a \beta \gamma$  est contenu dans le système.

$$\begin{array}{llllll} aaa' & a .. & a\beta' . & a\gamma' . & a .. & a'\beta'\gamma' \\ b\beta\beta' & b\alpha' . & b .. & b\gamma' . & \beta\alpha' . & \beta .. & \beta\gamma' . \\ c\gamma\gamma' & c\alpha' . & c\beta' . & c .. & \gamma\alpha' . & \gamma\beta' . & \gamma .. \end{array} \quad (40)$$

II<sup>e</sup> cas. Le triple  $a \beta \gamma$  n'est pas contenu dans le système

$$\begin{array}{llll} \beta\gamma\alpha' & \gamma\alpha\beta' & a\beta\gamma' \\ \begin{array}{l} 1. \quad aam \quad aa'n \quad a\beta'p \quad a\gamma'q \quad aa' . \quad a .. \quad a'\beta'\gamma' \\ 2. \quad b\beta . \quad ba' . \quad b\beta' . \quad b\gamma' . \quad \beta\beta' . \quad \beta .. \quad \beta\gamma' . \\ \quad c\gamma . \quad ca' . \quad c\beta' . \quad c\gamma' . \quad \gamma\gamma' . \quad \gamma .. \quad \gamma\beta' . \\ \quad aaa' \quad a \quad a\beta' \quad a\gamma' \quad a .. \quad a .. \quad a'\beta'\gamma' \\ \quad b\beta m \quad ba'n \quad b\beta'p \quad b\gamma'q \quad \beta\beta' . \quad \beta .. \quad a' .. \\ \quad c\gamma \quad ca' \quad c\beta' \quad c\gamma' \quad \gamma\gamma' . \quad \gamma .. \quad \gamma\beta' . \end{array} \end{array} \quad (8)$$

$a'\beta'\gamma'$  est contenu  
dans le système

<i>b)</i> $\alpha'\beta'\gamma'$ n'est pas contenu dans le système.	$\alpha\alpha'\quad a \dots \quad a\beta'\gamma' \quad a \dots$ 1. $b\beta \cdot \quad b\alpha'p \quad b\beta' \cdot \quad b\gamma' \cdot$ $c\gamma \cdot \quad c\alpha'q \quad c\beta' \cdot \quad c\gamma' \cdot$	$a \dots \quad a \dots \quad a'\beta'm$ $\beta\beta' \cdot \quad \beta \dots \quad a'\gamma'n$ $\gamma\gamma' \cdot \quad \gamma \dots$	(12)
	2. $aam \quad a\alpha'n \quad a\beta'p \quad a\gamma'q$ $b\beta \cdot \quad b \dots \quad b\beta'a' \quad b\gamma' \cdot$ $c\gamma \cdot \quad c \dots \quad c\beta' \cdot \quad c\gamma'a'$	$a\alpha' \cdot \quad a \dots \quad \beta'\gamma' \cdot$ $\beta\beta' \cdot \quad \beta \dots \quad a' \dots$ $\gamma\gamma' \cdot \quad \gamma \dots$	(24) pour $a\alpha'n$ (20) pour $b\alpha'n$ ou $c\alpha'n$ .

Dans chacune de ces dispositions, les éléments  $\alpha', \beta', \gamma'$ , différents entre eux et des éléments  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ , peuvent être tous les arrangements des 7 éléments restants 3 à 3 ; pour chaque arrangement  $\alpha', \beta', \gamma'$ ;  $m, n, p, q$  peuvent être toutes les permutations des 4 derniers éléments. Pour un arrangement  $\alpha', \beta', \gamma'$  et une permutation  $m, n, p, q$ , fixés, chacune des dispositions se complète par les éléments  $m, n, p, q$  (et cela sans y mettre beaucoup de temps), du nombre de manière que j'ai indiqué à droite, c'est-à-dire donne ce nombre de systèmes. En tenant compte des dispositions où les 2 éléments  $\beta'$  et  $\gamma'$  ont à prendre le même rôle que  $\alpha'$ , nous obtenous donc :

$A_{10}^3 \cdot A_7^3 \cdot P_4 \cdot (40 + 8 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 3 [24 + 2 \cdot 20]) = 10! \cdot 300$ . systèmes de triples, ne contenant pas le triple  $abc$ , et par suite  $\frac{10! \cdot 300 \cdot 11}{10} = 10! \cdot 330$  systèmes de triples de 13 éléments, qui diffèrent entre eux au moins par l'un de leurs triples. Or les ordres des groupes qui transforment en eux-mêmes le système cyclique de Netto et celui de Kirkmann, sont 39 et 6 ;  $\frac{13!}{39} + \frac{13!}{6} = 10! \cdot 330$ .

Par conséquent le système de Netto et celui de Kirkmann sont les 2 seuls systèmes de triples de Steiner différents pour 13 éléments.

### 11. L. G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — Sur un point de la théorie des nombres hypercomplexes.

Envisageons le corps de nombres  $[R]$  formé par l'ensemble des nombres hypercomplexes  $x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  à coordonnées  $x_\lambda$  toutes rationnelles. Les complexes  $x_0 + x_1 j$ , où  $j$  est un symbole défini par  $j^2 = 1$ , fournissent l'exemple le plus simple montrant combien la définition „lipschitzienne“ du nombre hypercomplexe entier est peu appropriée pour servir de base à une arithmomie. Par exemple, le produit  $(3 + j)(5 - 3j) = 12 - 4j$  est divisible par 2 sans qu'aucun des facteurs ne le soit. On fait tomber cette irrégularité et d'autres encore, en adoptant la défini-

tion „hurwitzienne“ d'après laquelle est réputé entier tout complexe  $x$  appartenant au domaine holoïde maximal du corps  $[R]$ ; dans ce système particulier: tout complexe de la forme  $a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}j$ , où  $a, b$  désignent des nombres rationnels entiers quelconques. Alors chacun des 2 facteurs du produit cité est divisible par 2, puisque  $\frac{3}{2} + \frac{j}{2}$  et  $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j$  sont maintenant des complexes „entiers“.

Or, il existe des systèmes de nombres hypercomplexes sans domaine holoïde maximal, où par conséquent la définition „hurwitzienne“ est inapplicable. On peut les caractériser par la notion de nombre nilpotent, ou racine de zéro. On appelle ainsi tout nombre hypercomplexe  $x$  dont l'une des puissances est identiquement nulle,  $x^r = 0$ . Quand un corps de nombres  $[R]$  ne contient aucune racine de zéro, il possède un domaine holoïde maximal, et un seul. La définition appropriée du nombre hypercomplexe entier y est donc possible et univoque.

Si un corps de nombres  $[R]$  contient des racines de zéro, ou bien il ne possède aucun domaine holoïde maximal, ou bien il en possède une infinité. La définition appropriée du nombre hypercomplexe entier y est donc ou bien impossible, ou bien plurivoque.

## 12. H. BERLINER (Bern). — *Über ein Gesetz der infiniten Pluralität.*

Als Elemente der homogenen projektiven Koordinatenbestimmung können wir ebenso wie die Punkte auch die symmetrischen Dreieckskurven  $D_m$ , deren Parameterdarstellung  $\varrho x_\lambda = (a_\lambda t + b_\lambda)^m$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) sind (wo  $m$  eine ganze Zahl ist), ansehen. Denn durch eine  $D_m$  werden 3 Ecktransversalen  $A_\lambda D_m$  des Fundamentaldreiecks  $A_1 A_2 A_3$  bestimmt, nämlich die durch die Berührungs punkte der  $D_m$  mit den Gegenseiten gehenden oder die Tangenten der  $D_m$  in  $A_1, A_2, A_3$ , je nachdem  $m > o$  oder  $m < o$  ist. Durch eine  $D_m$  und dem Fundamentelement des Koordinatensystems, das eine beliebige symmetrische Dreieckskurve  $D_k$  ( $k$  ganz-zahlig) sein kann, werden also 3 Doppelverhältnisse bestimmt, deren Produkt für jede  $D_m$  gleich  $(-1)^{k-m}$  ist; und umgekehrt

ist durch 3 solche Doppelverhältnisse eine  $D_m$  bestimmt. Wir können also die  $D_m$ -Koordination definieren durch

$$\begin{aligned} I \quad (-1)^{m-k} \quad A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_k D_m) &= \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \\ II \quad (-1)^{m-k} \quad A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_m D_k) &= \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \\ \text{oder } III \quad (-1)^{m-k} \left[ A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_k D_m) \right]^{(-1)^m} &= \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \end{aligned}$$

$(\lambda = 1, 2, 3).$

Die bekannten homogenen projektiven Punkt- und Linienkoordinaten sind  $D_0$ - und  $D_1$ -Koordinaten nach der Definition III. Ist eine Kurve in  $D_m$ -Koordinaten durch  $\varrho x_\lambda^{(m)} = f_\lambda(t)$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ), also als  $D_m$ -Ort gegeben, so hat der Träger der Kurve, also die Enveloppe aller dieser  $D_m$  in Punktkoordinaten die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} I' \quad \varrho x_\lambda &= \left[ \begin{matrix} f(t) \\ \lambda \end{matrix} \right]^{m+1} \left[ \begin{matrix} f(t) & f'(t) & -f(t) & f''(t) \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+2 \end{matrix} \right]^m \\ II' \quad \varrho x_\lambda &= \left[ \begin{matrix} f(t) \\ \lambda \end{matrix} \right]^{m-1} \left[ \begin{matrix} f(t) & f'(t) & -f(t) & f'(t) \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{matrix} \right]^m \\ \text{oder } III' \quad \varrho x_\lambda &= \left[ \begin{matrix} f(t) \\ \lambda \end{matrix} \right]^{m+(-1)^m} \left[ \begin{matrix} f(t) & f'(t) & -f(t) & f'(t) \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{matrix} \right]^m \end{aligned}$$

$(\lambda = 1, 2, 3).$

je nachdem I, II oder III benutzt wird. Es ist also speziell der Träger einer Kurve 1. Ordnung, also eines Grundgebildes resp. eine  $D_{m+1}$ ,  $D_{m-1}$  oder  $D_{m+(-1)^m}$ , wenn die  $D_m$  als Grundelemente angesehen werden.

Nunmehr können wir jeden projektiven Satz auf unendlich viele Weisen interpretieren, indem wir an Stelle der Punkte die  $D_m$ , wo  $m$  irgendeine ganze Zahl ist, als Grundelemente ansehen und dabei die  $D_{m+1}$  (I) oder die  $D_{m-1}$  (II) als die Träger der Grundgebilde nehmen. Dies verstehen wir unter dem Gesetz der infiniten Pluralität, wovon das der Dualität nur ein Spezialfall ist, indem dabei nur die Punkte und Gerade, die  $D_0$  und  $D_1$  sind, als Grundelemente angesehen werden. Das Gesetz der infiniten Pluralität im Raume besteht darin, dass wir ebenso wie die Punkte auch die tetraedral-symmetrischen Flächen von irgendeinem ganzzähligen Index  $m$  als die Elemente der projektiven Koordinaten-

bestimmung, also als die Grundelemente im Raume ansehen. Wir können jetzt auch jeden projektiven Satz der Liniengeometrie auf unendlich viele Weisen interpretieren, da wir jetzt die tetraedralsymmetrischen Kurven von irgendeinem ganzzahligen Index  $m$  ebenso wie die Geraden als Grundelemente im Raume ansehen können.

**13. K. MERZ (Chur).** — *Quadratische Transformation einer Kollineation und eine Massgeometrie.*

Durch  $\xi^2 = x^2 : (r^2 - x^2 - y^2)$ ;  $\eta^2 = y^2 : (r^2 - x^2 - y^2)$  wird die unbegrenzte Ebene  $\xi, \eta$  in das Innere des Kreises  $x^2 + y^2 = r^2$  abgebildet, wobei ihrer unendlich fernen Geraden der Umfang entspricht. Den Geraden parallel zu  $\xi$  entsprechen Ellipsen mit dem Kreisdurchmesser auf  $x$  als grosse Achse. Dem Werte  $\eta = 1$  entspricht dann auf  $y$  die kleine Halbachse  $r : \sqrt{2}$ . Wird diese Strecke als Einheit für die  $\eta$  angenommen und lässt man die Koordinatenachsen  $\xi, \eta$  mit  $x, y$  zusammenfallen, so entsprechen die Punkte auf  $x^2 + y^2 = r^2 : 2$  sich selbst. Einer Strecke  $A B$  im Innern des Kreises  $r$ , die verlängert, ihn in  $U$  und  $V$  schneidet, entspricht in zentrischer Lage ein Bogenstück  $A' B'$  einer Hyperbel mit den Asymptoten  $O U$  und  $O V$ .

Wendet man auf diese Abbildung die quadratische Transformation  $\xi^2 = \xi'$ ,  $\eta^2 = \eta'$ ,  $x^2 = x'$ ,  $y^2 = y'$  an, so entsteht daraus die zentrische Kollineation von  $O$  aus mit der Achse  $x' + y' = r^2 : 2$  und der Gegenachse  $x' + y' = r^2$ . Aus dieser Kollineation ergeben sich damit Eigenschaften jener Abbildung der Ebene  $\xi, \eta$  in den Kreis  $r$ .

Um eine Massgeometrie<sup>1</sup> im Innern des Kreises  $r$  zu erhalten, ist die Strecke  $A (x_1 y_1)$ ,  $B (x_2 y_2)$  durch eine solche Funktion  $F(x, y)$  zu messen, die unendliche Werte gibt, wenn  $A$  oder  $B$  in  $U$  oder  $V$  rücken. Dazu ist das Mass dargestellt durch den Hyperbelbogen  $A' B'$ . Die Koordinaten  $x, y$  eines Punktes  $P$  in  $r$  werden dann gemessen durch die zu  $P'$  gehörenden Hyperbelbögen  $u$  und  $v$ , welche die Abbildungen der Strecken  $x$  und  $y$

<sup>1</sup> Als Beispiel zu der allgemeinen Betrachtung über nichteuklidische Geometrie in: K. Merz. Zur Erkenntnistheorie von Raum und Zahl aus Historischem der Steinerschen Fläche (S. 104) im Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens, Chur 1917. (Separatabzug S. 40.)

sind. Diese krummlinigen Koordinaten sind durch elliptische Integrale dargestellt

$$u = \int \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)^2 + x^2 y^2}}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)^3}} dx; \quad v = \int \frac{\sqrt{(r^2 - x^2) + x^2 y^2}}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)^3}} dy.$$

Diese Bogen  $u$  und  $v$  schneiden sich in  $P'$  unter einem Winkel  $\varphi$ . Damit das Linienelement aus  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  durch das ihm entsprechende  $du^2 + dv^2 - 2 du dv \cos \varphi$  gemessen werde, ist der von  $dx$  und  $dy$  gebildete rechte Winkel als durch

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r^2 (r^2 - x^2 - y^2)}{xy (2 r^2 - x^2 - y^2)}$$

gemessen darzustellen.

Mit Hilfe von  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  ist nun die Massfunktion  $F(x, y)$  zu bestimmen.

Für diese Massgeometrie sind dann nicht Strecken  $A B$  geodätische Linien, sondern Ellipsenbogen  $A B$ , welche die Abbildung sind der Sehne im Hyperbelbogen  $A' B'$ . In der Umgebung von  $O$  nähern sich diese Bogen immer mehr den Strecken, und man erhält überhaupt euklidische Massbeziehungen.

#### 14. A. OSTROWSKI (Marburg a. d. L.) und G. PÓLYA (Zürich).

— Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern.

Die mitzuteilende Untersuchung ging von einer Fragestellung des Herrn Hurwitz aus, wurde durch Pólya bis zu einem gewissen Punkte durchgeführt und durch Ostrowski abgerundet und weiter verfolgt.

„Ganzwertig im Körper  $K$ “ heisst ein Polynom  $P(x)$ , das für ganze, im Körper  $K$  liegende Werte der Variablen ganze, im Körper  $K$  liegende Werte annimmt. Ein ganzwertiges Polynom  $m$ -ten Grades lässt sich immer in die Form

$$\frac{a x^m + \beta x^{m-1} + \dots + \lambda}{m!}$$

setzen, wo  $a, \beta, \dots, \lambda$  ganze Zahlen des Körpers sind.

Im Körper  $K$  gibt es ein wohlbestimmtes Ideal  $\mathfrak{a}_m$  von folgender Eigenschaft:  $a$  ist dann und nur dann eine Zahl des Ideals  $\mathfrak{a}_m$ , wenn es ein ganzwertiges Polynom  $m$ -ten Grades gibt, dessen höchster Koeffizient  $\frac{a}{m!}$  heisst. Eine längere Schlussreihe gipfelt in der expliciten Berechnung des Ideals  $\mathfrak{a}_m$ . Man bezeichne mit

$p_1, p_2, \dots, p_e$  die sämtlichen in  $m!$  aufgehenden Primideale, mit  $N_1, N_2, \dots, N_e$  ihre Normen und man setze

$$k_i = \left[ \frac{m}{N_i} \right] + \left[ \frac{m}{N_i^2} \right] + \left[ \frac{m}{N_i^3} \right] + \dots$$

Dann ist

$$(I) \quad a_m \ p_1^{k_1} \ p_2^{k_2} \ \dots \ p_e^{k_e} = (m!).$$

Im rationalen Körper lässt sich bekanntlich jedes ganzwertige Polynom  $m$ -ten Grades in der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2} + \dots + a_m \binom{x}{m}$$

darstellen, wo  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  ganze Zahlen des rationalen Körpers sind. Die Polynome

$$1, x, \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}, \dots, \frac{x(x-1) \cdots (x-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m}, \dots$$

bilden also eine Art „Basis“ für die ganzwertigen Polynome des rationalen Körpers. Die Bedingung für die Existenz einer analogen Basis im Körper  $K$  ist, dass sämtliche Ideale  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$  Hauptideale sein sollen. Z. B. existiert die Basis in einem quadratischen Zahlkörper dann und nur dann, wenn sämtliche Idealteiler der Grundzahl Hauptideale sind, wie es sich leicht aus (I) ergibt. Etwas Analoges gilt allgemeiner für Galoissche Körper.

Unter denselben Bedingungen existiert auch eine ganz analog zu definierende Basis für ganzwertige Polynome mehrerer Veränderlichen.

### 15. L. G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Une nouvelle formule d'interpolation dans la théorie mathématique de la population.*

Pour étudier les variations  $\Delta P$  que subit un groupe de population  $P(t)$  avec le temps  $t$ , on suppose que l'effectif  $P(t)$  est une fonction continue du temps et l'on définit l'intensité de variation à l'instant  $t$  par

$$\sigma(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta P}{P \cdot \Delta t} \right) = \frac{dP}{P \cdot dt} = \frac{P'}{P}.$$

On définit de même des intensités spéciales, notamment l'intensité de natalité  $\nu(t)$ ; l'intensité de mortalité  $\mu(t)$ ; l'intensité d'immigration  $\iota(t)$ ; l'intensité d'émigration  $\varepsilon(t)$ . — Pour les facteurs qui tendent à diminuer l'effectif, on arrive à la même notion en partant de la théorie des

probabilités mathématiques; on définit par exemple le taux instantané de mortalité  $\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{nq_t}{n} \right)$  et l'on démontre qu'il est égal à l'intensité de mortalité  $\mu(t)$ . En vertu d'une propriété fondamentale des fonctions d'intensité ou taux instantanés, on peut écrire  $\sigma(t) = r(t) - \mu(t) + i(t) - e(t)$  la natalité, la mortalité, l'immigration et l'émigration étant les 4 facteurs dont la variation de l'effectif  $P(t)$  dépend directement.

En faisant des hypothèses appropriées sur le taux instantané de variation, on retrouve les théories formelles de la population émises jusqu'ici. Ainsi  $\sigma(t) = o$  donne la théorie de la population stationnaire (E. Halley);  $\sigma(t) = \text{const.}$  conduit à la théorie eulérienne de la population variant en progression géométrique;  $\sigma(t)$  inversement proportionnel à l'effectif,  $\sigma(t) = \frac{c}{P}$ , donne la théorie de la population variant en progression arithmétique (de Moivre); l'hypothèse  $\sigma(t) = c(m - P)$ , où  $c$  et  $m$  désignent des constantes positives, donne la théorie de F. P. Verhulst qui suppose que la population, partant de l'effectif initial  $P_0$ , augmente constamment, mais de plus en plus lentement et finit par atteindre un état stationnaire caractérisé par l'effectif  $m$ , abstraction faite des écarts accidentels; formule:

$$P(t) = P_0 \cdot \frac{m \cdot e^{mct}}{P_0 \cdot e^{mct} + m - P_0}.$$

On peut développer une théorie nouvelle en supposant qu'avec le temps surgissent des facteurs qui influencent l'intensité de variation. Une formule relativement simple se déduit entre autres de l'hypothèse  $\sigma(t) = \frac{2c}{P}(b - t)(P - m)^2$ ; elle conduit à

$$P(t) = n + \frac{P_0 - m}{c \cdot (P_0 - m) \cdot (t^2 - 2bt) + 1}$$

Partant de l'effectif initial  $P_0 = m + n$ , la population passe (après un temps  $b$ ) par un extrême, puis tend vers un état stationnaire caractérisé par l'effectif constant  $n$ , quand on attribue aux constantes des valeurs appropriées.

En terminant, l'auteur indique les bases d'une théorie future de la population, théorie formelle mieux adaptée à la réalité que celles émises jusqu'ici.