Sektion für Mathematik

I

Sektion für Mathematik

(Zugleich Versammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft)

Dienstag. 8. August 1916

Einführender: Dr K. Merz
Praesident: Prof. Cailler
Sekretär: Prof. Crelier

---

1. K. Merz (Chur). — *Historisches zur Steiner'schen Fläche.* Wie Steiner seine Römerfläche, über die er nichts veröffentlichte, entstehen liess, ist mir durch Herrn Prof. *Geiser* mitgeteilt worden. Die Methode Steiners wendet Schröter an, nur nimmt er zur Vereinfachung statt des von Steiner angenommenen Bündels quadratischer Flächen ein Kegelschnittnetz an. Noch etwas vorausgehend hat Kummer die analytische Behandlung der Fläche begonnen, die er in einer von ihm aufgestellten Gleichung erkennt. In der folgenden tabellarischen Uebersicht[1] gibt die 1. Kolonne die synthetischen Bearbeitungen der Fläche an und die 3. Kolonne die analytischen mit Abbildung auf eine Ebene. In der 2. Kolonne ist die Behandlung durch quadratische Transformation eingeschaltet. Die übrige Kolonne gibt den Uebergang zur Theorie der biquadratischen Formen an, welche durch die Raumkurve 4. Ordg., 2. Art als Haupttangentenkurve mit der Steiner'schen Fläche in enger Beziehung sind.

[1] Die genaueren Literaturangaben zu dieser Tabelle findet man in: *K. Merz*, Parallelflächen und Centrafläche eines besonderen Ellipsoides und die Steinersche Eläche. Beispiel einer quadratischen Transformation, wobei noch zuzufügen sind:
Laguerre, Ouevres II, p. 281 und *Beltrami*, Opere III, p. 168. Siehe auch diese «Verhandlungen» 1914, II., Seite 102.

Steiner (Rom 1843) † 1863				[Frégier, Hesse, 1837]			
Schröter	1863			Kummer	1863	Weyerstrass	1863
Cremona	1864	Berner	1864	Cayley	1864		
Reye	1867	Reye	1867	Clebsch	1867	Laguerre	1872
Sturm	1871					Bertini	1872
				Gerbaldi	1881	Beltrami	1879
		(Stahl	1885)			Rohn	1890
		Reye	1896	Lacour	1896	Berzolari	1892
		Timerding	1898				

Diese historische Entwicklung zeigt, wie das Problem, das eine geniale geometrische Phantasie erschaut hat, immer mehr einer formal algebraischen Behandlung anheimfällt, wobei an Stelle der räumlich anschaulichen Darstellung die allgemeine rechnerische Methode tritt, so dass schliesslich die geometrische Erkenntnis als ein intuitiver Einblick in die arithmetischen Zusammenhänge erscheint, der zugleich als Wegweiser wirkt, in welcher Richtung fördernde und fruchtbare Ergebnisse zu erzielen sind.

2. L. Crelier (Berne-Bienne). — *Puissance d'une droite par rapport à un cercle.*

I. Puissance. — *Théorème: Etant donné tous les couples de tangentes à un cercle que l'on peut mener par les divers points d'une droite quelconque du plan du cercle, le produit des tangentes des demis angles de la première tangente et du prolongement de la seconde tangente de chaque couple avec la droite donnée est constant.*

Cette constante s'appellera la puissance de la droite par rapport au cercle. Nous aurons :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha'}{2} = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \beta'}{2} = \ldots = \frac{r + p}{r - p} = \text{const} \;,$$

II. Faisceaux. — Nous appellerons faisceaux de cercle F_3 ou F_4 l'ensemble des cercles admettant un même premier centre de similitude extérieur ou intérieur par rapport à tous les cercles. Nous aurons :

a) Etant donné deux faisceaux $F_3^{(1)}$ *et* $F_3^{(2)}$ *de même centre radical principal S les points de coupe des tangentes extérieures* *communes de deux cercles quelconques des faisceaux, pris l'un dans* $F_3^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_3^{(2)}$, *sont tous sur une même droite appelée* l'axe radical principal des faisceaux. *Les points de coupe des tangentes intérieures communes des mêmes cercles sont tous sur une autre droite appelée* l'axe radical secondaire des deux faisceaux.

b) Le même *théorème* subsiste pour deux faisceaux $F_4^{(1)}$ et $F_4^{(2)}$.

III. Involutions. — Considérons maintenant un point quelconque P du plan d'un faisceau F_3 ou F_4 complété par le faisceau conjugué F_3' ou F_4' et par ce point menons deux tangentes à chaque cercle du faisceau considéré. Soient t_1 et t_2 les deux tangentes à l'un quelconque des cercles. La puissance absolue de la droite PS $= a$, S étant le sommet du faisceau, sera la même par rapport à tous les cercles du faisceau F_3 et la même par rapport à tous les cercles du faisceau complémentaire F_3'.

Si nous posons : angle $(t_1\, a) = \alpha$ et angle $(t_2\, a) = \alpha'$, nous aurons :

$$\text{Puissance de } a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha'}{2}\,.$$

Avec les deux tangentes d'un autre quelconque des cercles du faisceau nous aurons également :

$$\text{Puissance de } a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{\pi-\beta'}{2} = \ldots = \text{const}\,.$$

Les bissectrices des angles compris entre a et t_1 ou a et le prolongement de t_2 donnent lieu à un produit de tangentes trigonométriques constant; ces bissectrices forment une involution. D'où nous tirons le théorème suivant :

Théorème: A tout point P du plan d'un faisceau F_3 *ou* F_4 *de centre radical principal* S *correspond une involution de rayons. Les rayons conjugués sont les bissectrices des angles compris entre l'axe* PS=a *et la première tangente menée de* P *à chaque cercle du faisceau, puis entre* a *et le prolongement de la deuxième tangente menée de* P *au même cercle. Les rayons doubles sont toujours réels dans le plan d'un faisceau* F_4 *et dans l'angle inté-*

rieur du plan d'un faisceau F_3. *Dans son angle extérieur ils sont imaginaires.*

Les rayons doubles réels sont les bissectrices des angles compris entre l'axe a *et les tangentes des deux cercles du faisceau passant par le point considéré.*

3. O. Spiess (Basel). — *Schliessungsprobleme bei konvexen Kurven.*

Zu einer beliebigen geschlossenen Kurve C sei eine Konstruktion K gegeben, die jedem Punkt A der Kurve einen andern A_1 zuordnet und zwar soll gelten:

1. A und A_1 bestimmen einander umkehrbar eindeutig.
2. Durchläuft A die Kurve in bestimmtem Sinn, so durchläuft A_1 dieselbe im Gegensinn.

Die Konstruktion K «schliesst», wenn $A_1 = A$ ist *(Fixpunkte)*; sie schliesst nach zweimaliger Ausführung, wenn $A_2 = A$ ist, d. h. wenn sich A und A_1 wechselseitig entsprechen *(Wechselpunkte)*. Das Schliessungsproblem besteht darin, die Fixpunkte und Wechselpunkte zu bestimmen. Man erkennt folgendes:

I. Es gibt immer genau zwei Fixpunkte; sie trennen je zwei entsprechende Punkte A und A_1.

II. Wechselpunkte *kann* es geben in endlicher oder unendlicher Zahl.

III. Ist A ein beliebiger Punkt von C (weder Fix- noch Wechselpunkt), so sind die durch Wiederholung von K entstehenden Punkte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ alle verschieden und nähern sich alternativ den Grenzpunkten

$$\lim_{k=\infty} \mathrm{A}_{2k} = \alpha \,, \qquad \lim_{k=\infty} \mathrm{A}_{2k+1} = \alpha_1 \,.$$

Ist $\alpha_1 \neq \alpha$, so sind α, α_1 Wechselpunkte; ist $\alpha_1 = \alpha$, so ist α Fixpunkt. In Praxi können daher diese Punkte durch endliche Wiederholung von K gefunden werden. Derselbe Schluss gilt für die aus der inversen Konstruktion K^{-1} entspringende Punktreihe $A, A_{-1}\, A_{-2} \ldots$

Ist C *konvex*, so lassen sich solche Konstruktionen K in mannigfacher Weise angeben. Man nehme n Punkte $P_1, \ldots P_n$ von denen eine *ungerade* Anzahl ausserhalb C liegen, ziehe AP_1 bis zum zweiten Schnittpunkt $A^{(1)}$ mit C, $A^{(1)}P_1$ bis $A^{(2)}$ etc., so hat der Punkt $A^{(n)} = A_1$ zu A die geforderten Beziehungen. Man erhält so z. B. den *Satz:*

«Jeder konvexen Kurve (ohne Ecken) lassen sich zwei ungerade Polygone bei gegebenen Richtungen der Seiten einschreiben — speziell z. B. unendlich viele Paare regelmässiger Dreiecke».

Die Punkte P_k lassen sich ersetzen durch konvexe Kurven T_k, an welche Tangenten gezogen werden. Ferner lassen sich diese Konstruktionen dual umformen.

4. C. Cailler (Genève). — *Sur la Géométrie réglée imaginaire.*

Dans ma communication de Genève, j'ai entretenu la section mathématique de la Géométrie des corps solides. De nouvelles recherches dont j'expose les résultats, avec tous les détails nécessaires, dans un mémoire actuellement en cours de publication dans les *Archives* de Genève, m'ont amené récemment à développer, sur l'ensemble du sujet, un point de vue inédit. Je désire en dire un mot aujourd'hui.

D'après cette nouvelle théorie, la Géométrie des corps solides se confond avec la Stéréométrie ordinaire, quand on prolonge celle-ci dans le domaine complexe. La première géométrie est simplement l'aspect réel de la Géométrie ponctuelle imaginaire.

Le *corps solide* est le pendant réel du *point* imaginaire.

Le pendant réel du *plan* imaginaire est la figure qu'on obtient en faisant chavirer un corps solide fixe autour de toutes les droites de l'espace ; j'appelle *vrilloïde* l'ensemble ainsi engendré.

Enfin si on fait tourner et glisser un corps solide le long d'un axe fixe, on décrit une *vrille*, c'est l'apparence réelle de la *droite* imaginaire.

Les propriétés manifestées par le *corps solide*, le *vrilloïde*, et la *vrille* sont identiques à celles du *point*, du *plan*, et de la *droite* de l'espace ordinaire, sauf en ceci que, dans les relations métriques, des quantités complexes se substituent aux quantités réelles. La place me manque pour justifier ici cette assertion. Je veux seulement entrer dans quelques détails touchant la *Géométrie des vrilles,* laquelle représente pour la nouvelle théorie, ce qu'est la Géométrie réglée par rapport à l'espace ordinaire.

L'espace réglé est de la quatrième dimension, l'espace vrillé de la huitième. Pour transformer les unes dans les autres toutes les vrilles de l'espace il faut disposer des ∞^{12} mouvements *complexes* de l'espace imaginaire ; les mouvements *réels* ne transforment une vrille donnée qu'en ∞^{4} vrilles nouvelles seulement.

Toute droite possède 6 coordonnées plückériennes l, m, n, p, q, r liées entre elles par la relation

$$lp + mq + nr = 0 \ .$$

Toute vrille possède de même 12 coordonnées plückériennes $l', l'', m', m'', n', n'', p', p'', q', q'', r', r''$ qui satisfont trois relations homogènes

$$\begin{aligned} l'l'' + m'm'' + n'n'' &= 0 \ , \\ l'p' - l''p'' + m'q' - m''q'' + n'r' - n''r'' &= 0 \ , \\ l'p'' + l''p' + m'q'' + m''q' + n'r'' + n''r' &= 0 \ , \end{aligned}$$

lesquelles restent invariantes quand on exécute les ∞^{12} mouvements complexes.

En Géométrie réglée, la forme fondamentale est le complexe linéaire de Plücker et Chasles, dont l'équation dépend linéairement des coordonnées l, m, n, p, q, r.

De même, dans l'espace vrillé, la forme fondamentale, qui fait symétrie au complexe linéaire, est une heptasérie, d'équation.

$$\begin{aligned} & a''l' + a'l'' + b''m' + b'm'' + c''n' + c'n'' \\ & + d''p' + d'p'' + e''q' + e'q'' + f''r' + f'r'' = 0 \ . \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de la condition précédente est analogue à celle du complexe en Géométrie réglée. Elle est seulement plus compliquée. Au lieu de la *distance* et de l'*angle* qui mesurent l'intervalle de deux droites quelconques, une nouvelle notion s'y rencontre : celle des *deux distances conjuguées* qui expriment, d'une manière analogue, l'intervalle entre deux vrilles.

J'ajoute que si on cherche à déterminer dans l'heptasérie les vrilles qui renferment un corps donné à volonté, les axes de ces vrilles décrivent un complexe linéaire Γ, lequel est ainsi associé d'une part à l'heptasérie, de l'autre au corps donné.

Il existe seulement ∞^4 complexes Γ de cette espèce ; la construction de cette famille de complexes, du second ordre, permet de définir géométriquement toutes les vrilles qui forment l'heptasérie linéaire fondamentale.

5. Prof. Dr. M. Grossmann (Zurich). — *Hinweis auf den Abschluss der allgemeinen Relativitætstheorie.*

Albert Einstein hat die vor mehreren Jahren begonnene Verallgemeinerung der von ihm, Lorentz und Minkowski geschaffenen Relativitätstheorie nunmehr zum völlig befriedigenden Abschluss gebracht. Es ergibt sich die allgemeine Kovarianz der Gleichungen, die den Ablauf der physikalischen Vorgänge beschreiben, wie auch der Differentialgleichungen, die das Gravitationsfeld bestimmen. Die Koordinaten von Raum und Zeit verlieren damit den letzten Rest anschaulicher Bedeutung und werden lediglich zu Parametern, die zur Punktbestimmung in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit dienen, deren Differentialgeometrie die physikalischen Vorgänge darstellt. Das Ergebnis tritt ins hellste Licht wenn es den weitausschauenden Ideen von Riemann, welche dieser in seinem Habilitationsvortrage (1854) entwickelte, gegenüber gestellt wird. (Vgl. die ausführliche Darstellung der Theorie durch Einstein : Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Joh. Amb. Barth).

6. H. Weyl (Zürich). — *Das Problem der Analysis situs*

In der Analysis situs, welche diejenigen Eigenschaften kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten untersucht, die ihnen unabhängig von jeder Massbestimmung zukommen, kann man gegenwärtig zwei Betrachtungsweisen unterscheiden, die *mengentheoretische* (vergl. namentlich die Arbeiten Brouwers) und die *kombinatorische* (die in dem Enzyklopädie-Artikel von Dehn und Heegaard die herrschende ist). Um die Bedeutung jeder dieser beiden Untersuchungsrichtungen und ihr gegenseitiges Verhältnis zu illustrieren, knüpft der Vortragende an dasjenige spezielle Problem der Analysis situs an, das in Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen die entscheidende Rolle spielt: die Bestimmung der Zusammenhangszahl zweidimensionaler geschlossener Mannigfaltigkeiten.

Durch Zerlegung einer solchen Mannigfaltigkeit in endlichviele « *Elementarflächenstücke* » entsteht aus ihr ein Polyëder (Möbius); zur weiteren Vereinfachung mag jedes Polygon in Dreiecke zerlegt werden. Nachdem man deren Ecken durch irgendwelche Symbole, z. B. Buchstaben, gekennzeichnet hat, stellt man in einer Tabelle die sämtlichen Dreiecke, aus denen die triangulierte Fläche besteht, zusammen; jedes Dreieck ist dabei durch Angabe seiner drei Ecken zu charakterisieren. So entsteht das kombinatorische « *Schema* » der Fläche. Zwei Schemata entspringen, wie sich plausibel machen lässt, durch verschiedene Triangulierung aus derselben Fläche, wenn sie « *homöomorph* » sind, d. h. durch « Unterteilung » in einund dasselbe dritte Schema übergeführt werden können. Die Homöomorphie ist eine rein kombinatorische Beziehung zwischen den beiden Schemata. Die wichtigste Schema-Invariante im Sinne der Homöomorphie ist die *Zusammenhangszahl* $= k - e - d + 3$ (k = Anzahl der Kanten, e der Ecken, d der Dreiecke); für « einfach zusammenhängende » Flächen ist sie $= 1$ *(Eulers Polyëdersatz)*.

Um aber streng zu begründen, dass die so gewonnene Zusammenhangszahl eine Analysis-situs-Invariante der ursprünglich gegebenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist, sind ganz anders geartete, auf den Begriffen der *Mengenlehre* basierende Betrachtungen nötig. Zunächst ist dazu eine exakte Festlegung des Begriffs der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit erforderlich. Um dann eine von jeder Triangulation unabhängige Definition der Zusammengszahl zu gewinnen, kann man einen

Weg gehen, der innerhalb der Analysis situs zu einer von Weierstrass auf funktionentheoretischem Felde, in der Theorie der Abelschen Integrale, benutzten Beweisführung analog ist: aus dem Verhalten der Integrale auf die Natur und die Beziehungen der Integrationswege zu schliessen. Dies wurde im Vortrag genauer ausgeführt.

7. M. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur l'arithmétique généralisée.*

Soit une infinité de *complexes à* n *coordonnées* tels que $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, où $a_0, a_1, \dots, a_n$, représentent des nombres *réels*. On érige une arithmétique et une algèbre généralisées portant sur ces éléments en définissant, sur ces complexes, l'*égalité* et deux opérations qu'on appellera *addition* et *multiplication*, par analogie avec l'arithmétique ordinaire. Ces trois définitions initiales sont arbitraires, ce qui n'empêche pas les opérations qui en résultent d'être soumises à certaines *lois fondamentales*. L'orateur cite les dix lois fondamentales qui caractérisent l'arithmétique et l'algèbre classiques et rappelle le théorème établissant qu'une nouvelle extension du domaine des nombres, au delà des nombres complexes ordinaires, n'est possible qu'au prix de l'abandon d'une ou de plusieurs de ces lois fondamentales. Le développement pris jusqu'ici par l'analyse mathématique montre que les lois d'associativité et de distributivité sont des plus importantes. En maintenant ces lois et laissant tomber seulement la commutativité de la multiplication et l'exclusion des diviseurs de zéro, on arrive aux systèmes des *polytettarions* que l'orateur définit. Posant entre les coordonnées des tettarions certaines relations appropriées, on obtient d'autres systèmes de nombres hypercomplexes, par exemple les quaternions, comme cas particuliers de certaines classes de polytettarions. Il semble que *les tettarions comprennent, comme sous-systèmes, tous les systèmes possibles de nombres hypercomplexes à multiplication associative et distributive.*

Parmi les connexions remarquables entre certaines lois fondamentales régissant les opérations de l'algèbre généralisée et les propriétés arithmétiques des domaines où ces lois sont valables, citons cette curieuse relation: soit un domaine de nombres hypercomplexes *entiers*, comprenant des complexes *irréductibles*, ou *premiers*, et α un complexe entier non irréductible de ce domaine. On pourra mettre α sous forme d'un produit de facteurs irréductibles, en imposant à ces derniers de se suivre dans un ordre tel que leurs normes suivent un ordre fixé arbitrairement pour les facteurs premiers de la norme $N(\alpha)$ du complexe entier donné α. Cette décomposition de α en facteurs premiers est *plurivoque* ou *unique*, suivant que la multiplication, dans le système envisagé, est commutative ou ne l'est pas.

8. Georg Pólya. — *Ein Gegenstück des Liouville'schen Approximationssatzes in der Theorie der Differentialgleichungen.*

Es sei α eine irrationale Zahl und es sei unter allen rationalen Zahlen, deren Nenner n nicht übersteigt, die Zahl r_n der Zahl α am nächsten gelegen. Der *Liouville*'sche Satz besagt, dass die für jede Wahl von α konvergente Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots \tag{1}$$

nicht beliebig schnell konvergieren kann, wenn α einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt.

Analog, wie die Folge (1) der Zahl α, ist jeder ganzen Funktion $f(x)$ ihre gegen sie konvergierende Taylor'sche Reihe zugeordnet. Genügt $f(x)$ einer algebraischen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, so kann die Taylorreihe von $f(x)$ nicht beliebig schnell konvergieren. Da bei ganzen Funktionen die Taylorreihe um so schneller konvergiert, je langsamer der absolute Betrag der Funktion anwächst, kann der Satz auch so ausgesprochen werden: Genügt eine ganze Funktion einer algebraischen Differentialgleichung, so kann ihr absoluter Betrag nicht beliebig langsam wachsen.

Diesen Satz spreche ich nur vermutungsweise aus, oder besser gesagt, ich stelle seinen Beweis als Problem hin. Wichtige Stücke davon können jedoch wirklich bewiesen werden. Ich bin in dieser Richtung, mich Arbeiten von *Hurwitz* und *Perron* anschliessend, zu verschiedenen Resultaten gelangt. Einige ganz bestimmte Beispiele: die ganze Funktion von x

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n$$

(die Hälfte einer Thetareihe) genügt keiner algebraischen Differentialgleichung, wenn q rational. — Die Differentialgleichung

$$x^{m-1} \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 x^{m-2} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{dy}{dx} - y = 0$$

ist irreduzibel, in dem Sinne, dass kein Integral von ihr einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten genügt, deren Ordnung $< m$ ist.

9. Dr. H. Berliner (Bern). — *Ueber zwei projektive natürliche Geometrien.*

Die beiden mittelst der Abszissen und Ordinatenwinkelsysteme entstehenden projektiven Massgeometrien (s. Berliner, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, 1915, Teil II, page 109) führen zu zwei natürlichen Geometrien. Definieren wir nämlich die Bogenlänge einer Kurve als den Grenzwert der Länge (im Sinne jener Massgeometrien) eines dem Kurvenbogen eingeschriebenen Polygons, dessen Seiten nach 0 streben, so wird *die Abszisse* und ebenso *der Ordinatenwinkel eines Punktes auf der Kurve* (s. a. a. O.) eine Funktion der Bogenlänge sein. Die Kenntnis dieser Funktion genügt nun, um die Gestalt (im Sinne jener Geometrien) der Kurve, nicht aber um ihre Lage in der Ebene zu bestimmen. In der Tat setzt man $A(BCQP) = (QP)_2 : (QP)_3$, $B(CAQP) = (QP)_3 : (QP)_1$, $C(ABQP) = (QP)_1 : (QP)_2$, so ist $(QP)_i = (QP_1)_i (P_1P_2)_i \ldots (P_{n-1}P_n)_i (P_nP)_i$ für $i = 1, 2, 3$; ferner ist $(QP)_i = \dfrac{y - z_i}{x - z_i}$, wo x, y die Abszissen von Q, P in dem QP zugeordneten Systeme bedeuten. Ist also eine stetige Funktion $\tau = \varphi(s)$ gegeben, und zieht man durch einen Punkt P_0 die Gerade P_0P_1, deren Abszisse im Systeme von $P_0 \varphi(s_0)$

ist, dann durch P_1 die Gerade P_1P_2, deren Abszisse im Systeme von $P_1 \varphi(s_1)$ ist, wenn die Entfernung $P_0P_1 = s_1 - s_0$ (wenn also $\varphi(s_0) + s_1 - s_0$ die Abszisse von P_1 im Systeme von P_0P_1 ist), usw., endlich durch P_{n-1} die Gerade $P_{n-1}P_n$, deren Abszisse im Systeme von $P_{n-1}\varphi(s_{n-1})$ ist, und ist $P_{n-1}P_n = s_n - s_{n-1}$, so ist

$$
\begin{aligned}
(P_0P_n)_i &= (P_0P_1)_i \dots (P_{n-1}P_n)_i \\
&= \frac{\varphi(s_0) + s_1 - s_0 - z_i}{\varphi(s_0) - z_i} \cdots \frac{\varphi(s_{n-1}) + s_n - s_{n-1} - z_i}{\varphi(s_{n-1}) - z_i} \\
&= \prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \left(1 + \frac{\Delta s_\lambda}{\varphi(s_\lambda) - z_i}\right).
\end{aligned}
$$

Lässt man nun sämtliche Δs_λ nach 0 streben und dementsprechend ihre Anzahl ∞ werden, so dass $\sum \Delta s_\lambda = s - s_0$, so wird

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
(P_0P_s)_i &= \lim_{\Delta s = 0} \prod_{s_0}^{s} \left(1 + \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}\right) \\
&= \lim_{\Delta s = 0} e^{\sum\limits_{s_0}^{s} \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}} = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s) - z_i}} \qquad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}
\right.
$$

sein; da $e^x \geqq 1 + x \geqq e^{x - x^2}$ für $|x| < \sqrt{2} - 1$ (es ist nämlich $e^{x-x^2} = 1 + x - \frac{x^2}{2}\left[2 - (1-x)^2 e^{\theta x(1-x)}\right]$, wo $0 < \theta < 1$), also

$$
e^{\sum\limits_{s_0}^{s} \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}} \geqq \prod_{s_0}^{s} \left(1 + \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}\right) \geqq e^{\sum\limits_{s_0}^{s} \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i} - \sum\limits_{s_0}^{s} \left(\frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}\right)^2}
$$

und

$$
\lim_{\Delta s = 0} \sum_{s}^{s_0} \left(\frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}\right)^2 = 0
$$

ist. Die Eckpunkte eines, in angegebener Weise konstruierten Polygons, dessen Seiten nach 0 streben, erfüllen also eine durch P_0 gehende Kurve, für die die Abszisse τ eines jeden ihrer Punkte P_s durch $\tau = \varphi(s)$ gegeben ist (wobei $s - s_0$ die Länge des Polygons und mithin, wie leicht einzusehen, auch die Länge des Kurvenbogens von P_0 bis P_s ist) und deren jeder beliebige Bogen mittels (1) konstruiert werden kann. Analog findet man, wenn $\tau = \varphi(s)$ nicht die Abszisse, sondern den Ordinatenwinkel des Kurvenpunktes angibt:

$$(2) \qquad (P_0P_s)_i = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{\cos^2\varphi(s)[\operatorname{tg}\varphi(s) - \operatorname{tg} z_i]}} \qquad (i = 1, 2, 3) \,.$$

Es ist also in der Abszissen- und ebenso in der Ordinatenwinkelgeometrie $\tau = \varphi(s)$ eine *natürliche Gleichung* der Kurve.

10. O. Bloch (Bern). — *Zur Geometrie der Gaussischen Zahlenebene.*

Im Zusammenhang mit elektrotechnischen Problemen wurde der Vortragende zu gebrochenen rationalen Funktionen geführt von der Form

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}v + \mathbf{C}v^2 + \ldots + \mathbf{M}v^m}{\mathbf{D} + \mathbf{E}v + \mathbf{F}v^2 + \ldots + \mathbf{N}v^n} \,,$$

wobei die konstanten Koeffizienten **A, B, C,** usw. irgendwelche konstante komplexe Zahlen sein können, wir deuten das durch *Fettdruck* an, während v ein reeller Parameter ist. **V** ist also wieder eine komplexe Zahl, deren geometrischer Ort in der Zahlenebene eine Kurve darstellt. Im besonderen führen Ausdrücke obiger Form zu *Unikursalkurven.* — Der Referent entwickelt einige Ergebnisse seiner Untersuchungen. Um diese kurz resumieren zu können, nummerieren wir die einzelnen Glieder von *Zähler* und *Nenner* mit *arabischen* bezw. *römischen* Ziffern. Diese setzen wir in Fettdruck, wenn die Glieder beliebige komplexe Koeffizienten haben und im gewöhnlichem Druck, wenn sie ein gemeinsames Argument aufweisen.

Dann bedeutet: (**1**) = fester Punkt; (**2**) = Gerade durch den Ursprung; (**1, 2**) = Gerade von allgemeiner Lage; (**1, I, II**)

= Kreis durch den Ursprung; (**1, 2, I, II**) = Kreis von allgemeiner Lage; (**1**, I, II) = Gerade durch den Ursprung; (**1, 2**, I, II) = Gerade von allgemeiner Lage; (**1, 2, 3**) = Parabel von allgemeiner Lage; (**1, 2, 3, I, II**) = zirkulare Kubik; (1, 2, 3, **I, II**) = zirkulare Kubik mit Doppelpunkt im Ursprung; (**1, 2**, I, II, III) = Kegelschnitt durch den Ursprung; (**1, 2, 3**, I, II, III) = Kegelschnitt in allgemeiner Lage; (1, 2, 3, **I, II, III**) = bizirkulare Quartik mit Doppelpunkt im Ursprung; (**1, 2, 3, I, II, III**) = bizirkulare Quartik in allgemeiner Lage usw. Die Gleichungen der Paskalschnecken und die Fokalgleichung der Kegelschnitte werden entwickelt. Die Diskussion der Gleichungen führt zum Teil auf noch unbekannte Erzeugungsweisen für bekannte Kurven und gelegentlich auch zu neuen Kurven. Man erhält die andern Unikursalkurven durch systematische Kombination der Glieder im Zähler und Nenner. Von der Zahl der Möglichkeiten erhält man einen Begriff, wenn man bedenkt, dass schon zwischen den ersten vier Gliedern in Zähler und Nenner der Grundgleichung 255 verschiedene Kombinationen möglich sind. Diese stellen aber erst Gruppen von Kurven dar, in denen noch mehr oder weniger zahlreiche Sonderfälle möglich sind. So ist z. B.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{A} + i(\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{C}v^2}{1 + iv}$$

die Gleichung der geraden Strophoide in allgemeiner Lage ein Sonderfall der allgemeinen Gleichung der zirkularen Kubik. Gelegentlich ergeben auch verschiedene Kombinationen dieselbe Kurvenart. (Vergl. oben die Gleichungen der Geraden).

Ueber die Behandlung der allgemeinen Probleme der analytischen Geometrie (Schnitt-, Tangentenprobleme usw.) zu referieren, fehlt dem Vortragenden die Zeit. Er verweist auf eine demnächst im Druck erscheinende ausführlichere Veröffentlichung.

11. W.-H. Young. — *Les intégrales multiples et les séries de Fourier.*

Le conférencier passe d'abord en revue quelques points dans sa méthode de développer la théorie de l'intégration simple.

1. *La méthode s'applique également quand l'intégration est ordinaire, ou par rapport à une fonction à variation bornée, soit continue, soit discontinue;*

2. *Elle s'applique également quand l'intégration est multiple;*

3. *Dans cet exposé il n'est pas nécessaire de recourir à une perspective illimitée de suites monotones.* Il s'agit seulement de définir les intégrales des fonctions semi-continues de M. Baire, qui sont précisément *les intégrales par excès et par défaut* de M. Darboux, et d'appliquer ensuite le théorème suivant :

L'intégrale d'une fonction f(x) *est en même temps la borne supérieure des intégrales des fonctions semi-continue supérieurement plus petites que* f(x), *et la borne inférieure des intégrales des fonctions semi-continues inférieurement plus grandes que* f(x). (Comptes rendus, t. 162, p. 909).

4. *La méthode n'exige pas une connaissance préalable de la théorie des ensembles, et en particulier de celle de la mesure.*

L'avantage du point de vue logique est que le traitement est uniforme. On définit la mesure comme un genre spécial d'intégrale, où la fonction intégrée ne prend que les valeurs 0 et 1. En effet, la définition de la mesure en général n'est pas justifiée sans l'emploi d'un raisonnement identique à celui que le conférencier adopte dans sa théorie de l'intégration. D'un autre point de vue, pourquoi définir d'abord, et d'une manière géométrique les intégrales des fonctions à deux valeurs, pour en déduire celles des fonctions générales ? Même les fonctions continues prennent toutes les valeurs entre leurs bornes supérieures et inférieures. C'est le nombre des limites nécessaires pour définir et exprimer une fonction qui en détermine la place dans l'armée des fonctions, et ceci ne dépend guère du nombre de valeurs qu'elle prend.

Après ces remarques le conférencier passe à la considération de l'intégrale multiple $\int f(x, y, z, \ldots) \, dg\,(x, y, z, \ldots)$. Ayant donné la définition, et observé que l'intégration ordinaire est l'intégration par rapport à la fonction xy, le conférencier montre sur une planche des formules fondamentales de l'intégration double. Entre ces formules on peut citer le suivant :

Si $F(x, y) = \int f(x, y)\, dx$,

$$\int_{0,0}^{a,b} F(x, y)\, dg(x, y) = \int_{y=0}^{b} \left[F\, dg\right]_{x=0}^{a} - \int_{0}^{a} \frac{dF}{dx}\, dg(x, y) \; ,$$

ainsi que le théorème de la moyenne, type Ossian Bonnet :

$$\int_{0,0}^{a,b} f(x, y) g(x, y)\, d(xy) = g(a, b) \int_{X,Y}^{a,b} f(x, y)\, d(xy) \quad .$$

où $g(x, y)$ est monotone non-decroissante par rapport à x , à y et à (x, y).

En conclusion le conférencier parle de l'application de sa théorie aux Séries de Fourier d'un nombre quelconque de variables. Il donne les résultats nouveaux pour le cas d'une variable. Nous n'en citons que le suivant :

La série de Fourier de f(x) *converge au point* x, *si*

$$\lim_{u=0} \big(f(x+u) + f(x-u)\big)$$

existe, et

$$\frac{1}{u} \int_{0}^{u} \left| d\big(u(f(x+u) + f(x-n))\big) \right|$$

est bornée.

12. W.-H. Young et M^me^ Young. — *La structure des fonctions à plusieurs variables.*

Le sujet de cette conférence est une généralisation pour plusieurs variables du théorème remarquable donné par M. Young à la séance de la British Association, à Leiceister, en 1907, d'après lequel les limites supérieures et inférieures d'indétermination $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de $f(x+h)$, où h est positif et s'approche de zéro, sont les mêmes que celles de $f(x\text{-}h)$, sauf dans un ensemble dénombrable de points. On exprime brièvement ce résultat en disant, qu'*il y a symétrie à droite et à gauche, sauf dans un ensemble dénombrable de points.*

Dans le plan, et dans n dimension, nous trouvons ainsi en général qu'une fonction quelconque possède une structure, pour ainsi dire, cristalline, en vertu du théorème suivant :

Si f(x, y) *est une fonction quelconque de* (x, y), *il y a symétrie complète autour du point* (x, y) *par rapport aux limites supérieures*

$$(\varphi_{++}, \varphi_{+-}, \varphi_{-+}, \varphi_{--})$$

et inférieures

$$(\psi_{++}, \psi_{+-}, \psi_{+-}, \psi_{--})$$

d'indétermination de f(x±h, y±k), *sauf pour des points tout à fait exceptionnels. Ces points gisent sur un ensemble dénombrable de courbes monotones, et forment en conséquence, un ensemble simple de mesure nulle.*

Pour une fonction de n *variables l'ensemble exceptionnel est toujours de mesure nulle, et gise sur un ensemble dénombrable de variétés de* (n-1) *dimensions.*

Ce théorème gagne en intérêt lorsqu'on le précise davantage. Si les *φ's* par exemple, ne sont pas tous égaux, on peut distinguer les cas suivants :

I) *Un des* φ's *est plus grand que chacun des autres (ensemble dénombrable) ;*

II) *deux des* φ's *sont égaux et plus grands que chacun des autres (dénombrable) ;*

III) *Deux des* φ's *sont égaux, et les deux autres sont égaux ;*

a) *Il y a symétrie latérale*

$$(\varphi_{++} = \varphi_{--}, \varphi_{+-}, \varphi_{-+}) \qquad (\varphi_{++} = \varphi_{+-}, \varphi_{-+} = \varphi_{--} ;$$

b) *Il y a manque complet de symétrie latérale,*

$$(\varphi_{++} = \varphi_{--}, \varphi_{+-} = \varphi_{-+}) ;$$

IV) *Trois des* φ's *sont égaux et plus petits que le dernier.*

Les cas III*b* et IV correspondent au cas général de notre théorème. Le cas III*a* est particulièrement intéressant et caractéristique pour notre système de coordonnées.

Les points où il y a symétrie à droite et à gauche gisent sur un ensemble dénombrable de lignes horizontales, et ceux où il y a symétrie au-dessus et au-dessous sur un ensemble dénombrable de lignes verticales.

La méthode de démonstration dépend du fait que chaque fois qu'on a deux φ'*s* différant par une quantité plus grande que c, où c est fixe, le point x n'est pas un point limite de points du même genre dans le quadrant correspondant au plus petit des deux φ'*s*. Attaché au point x on aura donc un petit « drapeau » dans l'intérieur duquel, au sens étroit, il n'y aura pas de points de l'ensemble. Il s'agit de démontrer que les ensembles de points avec un, deux ou trois « drapeaux » par point, ont certaines propriétés. En particulier *les ensembles à trois « drapeaux » sont dénombrables.*

13. M[me] Grace Chisholm Young. — *Quelques remarques sur les courbes de Cellérier et Weierstrass.*

L'année passée, à l'occasion de la conférence de M[me] Young, sur les courbes sans tangentes, M. Raoul Pictet a raconté que M. Cellérier lui avait parlé vers 1860 d'une courbe sans tangentes que celui-ci aurait construite. Un mémoire de Cellérier existe sur ce sujet, et a paru après la mort de l'auteur dans le Bulletin de M. Darboux (1890). Il reste incertain si la courbe de Cellérier est antérieure à celle de Weierstrass ou *vice versa.* En tout cas les deux semblent être indépendantes. Après avoir parcouru le mémoire du mathématicien genevois, M[me] Young constate avec le plus grand intérêt que la courbe de Cellérier est une courbe sans tangentes dans le sens le plus large. Elle n'a pas de tangentes, soit ordinaires, soit singulières.

La méthode de démonstration de Cellérier est tout à fait originale et d'une exactitude irréprochable. Comme Weierstrasse, il n'envisage pas la question du point de vue géométrique, et la question de tangentes singulières n'entre pas dans les recherches ni de l'un ni de l'autre. Mais la méthode de Weierstrass est moins profonde que celle de Cellérier; cette dernière suffit sans recherches ultérieures à trancher la question proposée.